3.9 Diferențierea funcției inverse

Fie $y = f(x)$ cu $f:[a,b] \to [\alpha,\beta]$. Si, presupunem că fiecare punct $y \in [\alpha,\beta]$ este imaginea unui singur punct $x \in [a,b]$ astfel încât $f(x) = y$, deci functia este bijectiva.

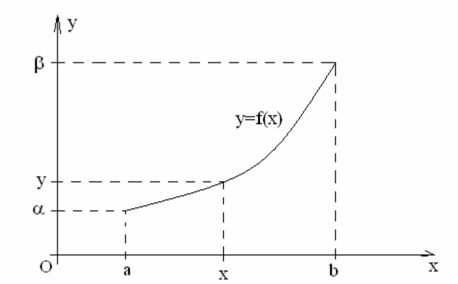

Figura 3.14

Atunci, putem defini funcția $x = \varphi(y)$ cu $\varphi:[\alpha,\beta] \to [a,b]$ care asociază la fiecare $y \in [\alpha,\beta]$ un $x \in [a,b]$ a.î. $f(x) = y$. Funcția $x = \varphi(y)$ se numeşte *funcția inversă* a funcției $y = f(x)$.
Observație: Dacă $x = \varphi(y)$ este inversa funcției $y = f(x)$, atunci $y = f(x)$ este inversa funcției $x = \varphi(y)$ şi scriem

$$f[\varphi(y)] = y \qquad \text{şi} \qquad \varphi[f(x)] = x$$

Atunci când aplicăm funcția f peste inversa φ rămâne doar argumentul. Exemple: $\ln e^x = x$, $arctg(tgx) = x$.

Procedeu de determinare a funcției inverse:
Fie $y = f(x)$ o ecuație rezolvabilă în x astfel încât fiecare y este asociat cu exact un x, altfel spus ecuația are soluție unică. Atunci, ecuația obținută în urma rezolvării $x = \varphi(y)$, defineşte pe x ca o funcție de y şi este inversa funcției $y = f(x)$.
Exemple:
1) Fie funcția $y = 3x$ definită pe $[0,1]$. Atunci funcția $x = \frac{y}{3}$ definită pe $[0,3]$ este funcția inversă funcției date.

2) Fie funcția $y = x^3$, $x \in \mathbb{R}$. Funcția inversă este $x = \sqrt[3]{y}$, $y \in \mathbb{R}$.

Observație: Funcțiile $y = f(x)$ și $x = \varphi(y)$ specifică aceeași curbă în planul *xy*. Dacă reprezentăm variabilele independente pe axa *x* în ambele cazuri, adică dacă reprezentăm funcțiile $y = f(x)$ și $y = \varphi(x)$ în loc de $y = f(x)$ și $x = \varphi(y)$, atunci graficele celor două funcții vor fi simetrice relativ la linia bisectoare din cadranele unu și trei ale planului de coordonate.

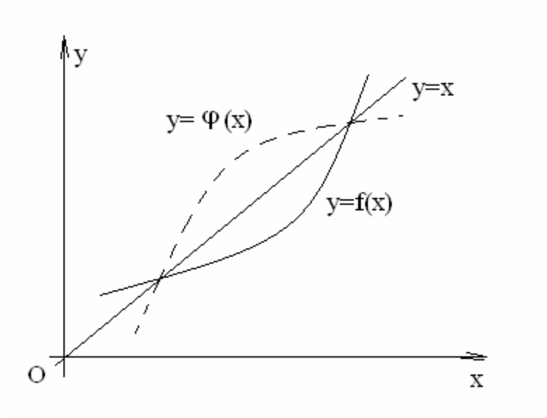

Figura 3.15

Exemplu:

Funcția $y = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ are ca funcție inversă pe $x = \ln y$, $y \in (0, +\infty)$

Dacă reprezentăm variabila independentă pe aceeași axă *Ox*, atunci funcția inversă este $y = \ln x$, $x \in (0, +\infty)$, iar graficele sunt simetrice față de prima bisectoare.

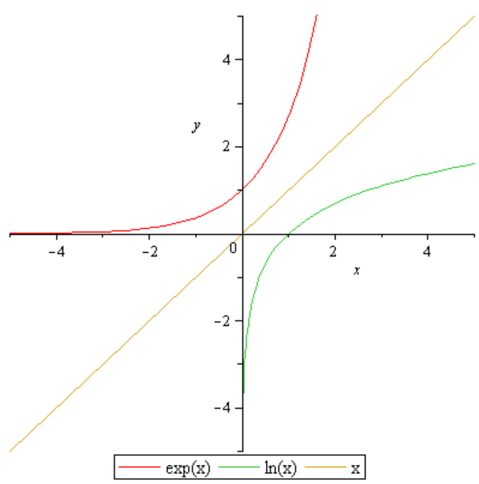

Figura 3.16

Definiții: O funcție $y = f(x)$ este *strict crescătoare* pe $[a,b]$ dacă $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ cu $x_1 < x_2$, are loc $f(x_1) < f(x_2)$.

O funcție $y = f(x)$ este *strict descrescătoare* pe $[a,b]$ dacă $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ cu $x_1 < x_2$, are loc $f(x_1) > f(x_2)$.

Exemplu: Funcția $y = x^3$ este strict crescătoare $\forall x \in \mathbb{R}$ (vezi figura 5.17).

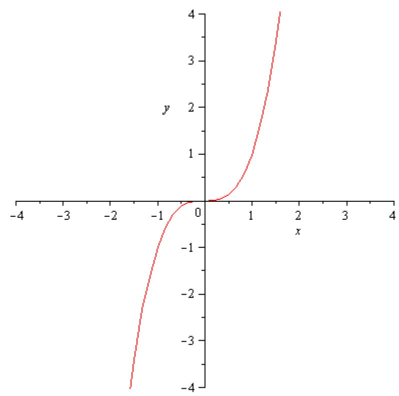

Figura 3.17 $f(x) = x^3$

Presupunem, $x_1 < x_2$ si aratam ca $f(x_1) < f(x_2)$

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)\left(x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2\right) > 0$$

Teorema 1: Fie $y = f(x)$ o funcție *continuă* și *strict crescătoare* pe $[a,b]$ și fie $\alpha = f(a)$ și $\beta = f(b)$. Atunci $y = f(x)$ admite funcție inversă $x = \varphi(y)$ definită pe $[\alpha, \beta]$ și mai mult $x = \varphi(y)$ este continuă și strict crescătoare pe $[\alpha, \beta]$.

Interpretare geometrică:

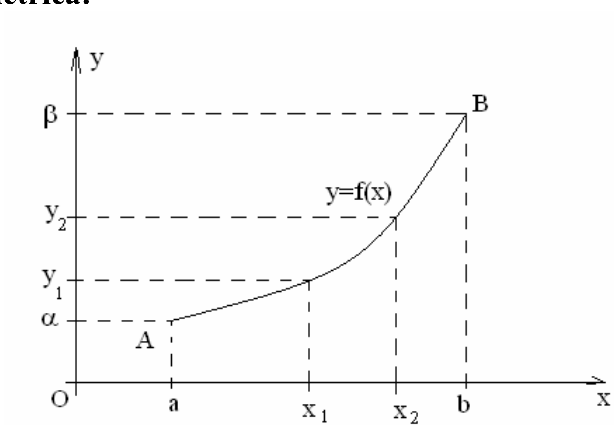

Figura 3.18

Observație: Considerații similare pot fi aplicate și în cazul unei funcții continue și strict descrescătoare pe un interval $[a,b]$.

Teorema 2: Fie $y = f(x)$ o funcție care are derivată nenulă în x_0, adică $f'(x_0) \neq 0$ şi fie $x = \varphi(y)$ funcția inversă, funcție care este continuă în $y_0 = f(x_0)$. Atunci funcția inversă $x = \varphi(y)$ are derivată în y_0 şi are loc:

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \qquad f'(x_0) \neq 0$$

Regula de derivare din teorema 2 se poate scrie şi în forma: $x'_y = \frac{1}{y'_x}$ sau $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$.

Interpretare geometrică:
Dacă $y = f(x)$ are derivată nenulă în x_0, atunci există tangentă la graficul $y = f(x)$ în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ şi această tangentă nu este paralelă cu axa *x*. Atunci, există şi tangenta la curba $x = \varphi(y)$ în acelaşi punct $M_0(x_0, f(x_0))$.

Funcțiile $y = f(x)$ şi $x = \varphi(y)$ sunt inverse una alteia şi sunt reprezentate grafic de aceeaşi curbă.

$$f'(x_0) = tg\ \alpha$$

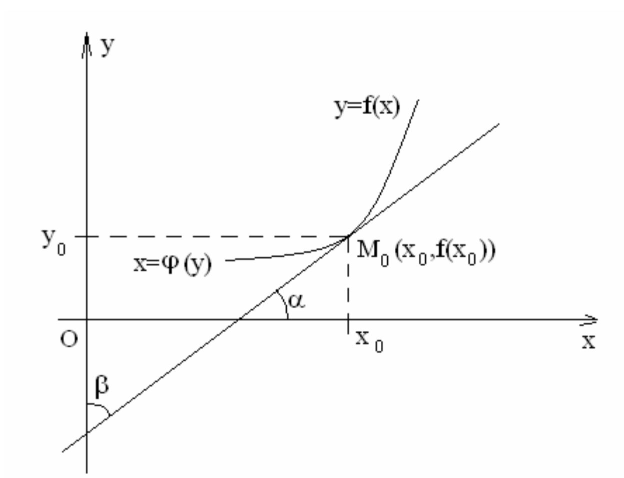

Figura 3.19

$$\varphi'(y_0) = tg\ \beta$$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$tg\ \beta = tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = ctg\ \alpha = \frac{1}{tg\ \alpha}$$

$$\Rightarrow \qquad \varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Exerciții:

Determinați derivata x'_y, dacă:

a) $y = x + \ln x$

$$y'_x = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x} \quad \Rightarrow \quad x'_y = \frac{x}{x+1}$$

b) $y = 3x + x^3$

$$y'_x = 3 + 3x^2 \quad \Rightarrow \quad x'_y = \frac{1}{3+3x^2}$$

c) $y = x - \sin x$

$$y'_x = 1 - \cos x \quad \Rightarrow \quad x'_y = \frac{1}{1-\cos x}$$

Diferențierea funcțiilor trigonometrice inverse

a) $y = \arcsin x$, $x \in [-1,+1]$

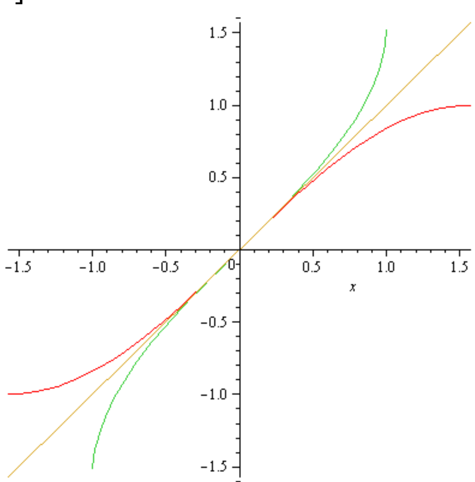

Figura 3.20 $f(x) = \arcsin x$

$y = \arcsin x$ este inversa funcției $x = \sin y$ definită pentru $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$. Funcția $x = \sin y$ are derivată pozitivă $x'_y = \cos y$ pentru $\forall y \in \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow \quad \exists \quad y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, +1)$$

$$\Rightarrow \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in (-1, +1)$$

Observație: Punctele $x = \pm 1$ nu sunt luate în considerare deoarece derivata $x'_y = \cos y$ este nulă în $y = \pm \pi / 2$.

b) $y = arctg\ x$**,** $x \in \mathbb{R}$

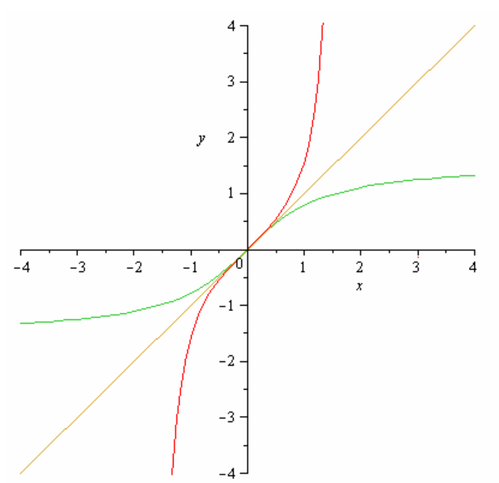

Figura 3.21 $f(x) = arctg\ x$

$y = arctg\ x$ este inversa funcției $x = tg\ y$ pentru $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$. Functi a are derivată pozitivă $x'_y = \frac{1}{\cos^2 y}$ pentru $\forall y \in \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$.

$$\Rightarrow \quad y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \quad (arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

c) Pentru a determina formulele de derivare pentru funcțiile $y = \arccos x$ şi $y = arcctgx$ este suficient să utilizăm relațiile:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$arctg\ x + arcctg\ x = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow\ (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad x \in (-1,+1)$$

$$\Rightarrow\ (arcctg\ x)' = -\frac{1}{1+x^2},\quad x \in \mathbb{R}$$

Diferențierea funcțiilor hiperbolice

Definiții: $shx \overset{def}{=} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\qquad chx \overset{def}{=} \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$$(shx)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = chx$$

$$(chx)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = shx$$

Definiții: $thx = \dfrac{shx}{chx}$ $\qquad cthx = \dfrac{chx}{shx}$

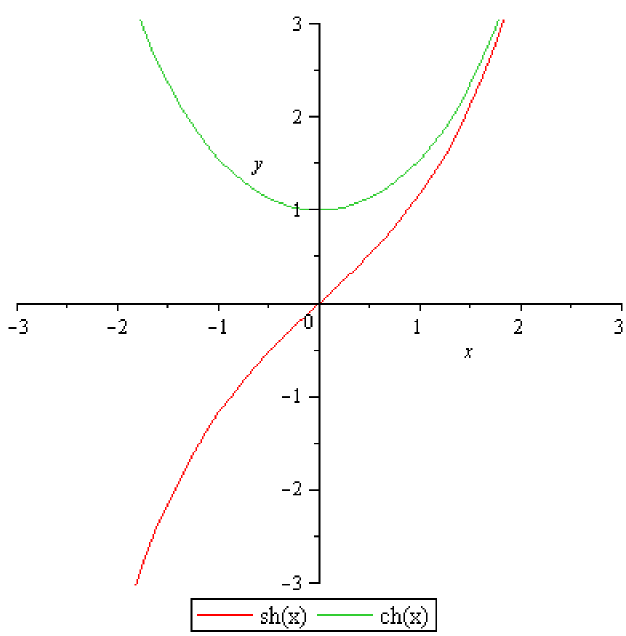

Figura 3.22

Utilizând regula de derivare a raportului şi identitatea $ch^2x - sh^2x = 1$, obținem:

$$(thx)' = \left(\frac{shx}{chx}\right)' = \frac{ch^2x - sh^2x}{ch^2x} = \frac{1}{ch^2x}$$

$$(cthx)' = \left(\frac{chx}{shx}\right)' = \frac{sh^2x - ch^2x}{sh^2x} = -\frac{1}{sh^2x}, \quad x \neq 0$$

3.10 Diferențierea funcțiilor elementare de bază

1) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \in R$, $x > 0$

2) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$

3) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$

4) $(a^x)' = a^x \ln a$, $a > 0$, $a \neq 1$

5) $(e^x)' = e^x$

6) $(\sin x)' = \cos x$

7) $(\cos x)' = -\sin x$

8) $(tg\ x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

9) $(ctg\ x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

10) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,+1)$

11) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,+1)$

12) $(arctg\ x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

13) $(arcctg\ x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

14) $(shx)' = chx$

15) $(chx)' = shx$

16) $(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}$

17) $(cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}, \quad x \neq 0$

Diferențierea logaritmică

Aceasta este utilă în cazul funcțiilor compuse de tip putere-exponențială

$$y = \left[u(x)\right]^{v(x)}$$

unde $u(x) > 0$ şi $u(x)$, $v(x)$ sunt diferențiabile.

$$\ln y = v(x) \ln u(x)$$

$$\frac{y'}{y} = v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$y' = \left[u(x)\right]^{v(x)} \left(v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right)$$

Exemple:

1. $y = x^x, \quad x > 0$

$$\ln y = x \ln x$$

$$\frac{y'}{y} = \ln x + 1$$

$$y' = x^x (\ln x + 1)$$

2. $y = (\sin x)^x, \quad \sin x > 0$

$$\ln y = x \ln(\sin x)$$

$$\frac{y'}{y} = \ln(\sin x) + x \frac{1}{\sin x} \cos x$$

$$y' = (\sin x)^x \left(\ln(\sin x) + x \cdot ctg\ x \right)$$

Derivate de ordin superior

Dacă $f(x)$ o funcţie derivabilă pe (a,b), atunci derivata funcţiei $f'(x)$ este şi ea o funcţie pe (a,b). Este posibil ca $f'(x)$ să fie şi ea o funcţie derivabilă pe (a,b). Derivata lui $f'(x)$ se numeşte *derivată secundă* a funcţiei $f(x)$ sau derivată de ordinul doi a lui $f(x)$.

Notaţie: $f''(x)$, $f^{(2)}(x)$

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' \tag{44}$$

Similar, derivata de ordinul n a funcţiei $f(x)$ este derivata derivatei de ordinul $n-1$ a funcţiei $f(x)$, adică

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)' \tag{45}$$

Exemple:

1) Calculaţi derivata de ordinul n pentru $y = e^{kx}$, cu $k = const$.

$$y' = ke^{kx}, \qquad y'' = k^2 e^{kx}, \qquad y''' = k^3 e^{kx} \qquad \ldots$$

Prin inducţie se arată că:

$$\left(e^{kx}\right)^{(n)} = k^n e^{kx}, \qquad k = 1,2,\ldots \tag{46}$$

2) Calculaţi derivata de ordinul n pentru $y = \sin x$.

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'' = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$$

....

Prin inducţie se arată că:

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{47}$$

3) Calculaţi derivata de ordinul n pentru $y = \cos x$.

$$y' = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$y'' = -\cos x = \cos\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\ldots$$

Prin inducție se arată că:

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{48}$$

Definitii: Mulțimea funcțiilor $f(x)$ definite pe (a,b) cu derivate până la ordinul n continue pe (a,b) se notează cu $C^n(a,b)$. O funcție $f(x)$ este *infinit sau indefinit diferențiabilă* pe (a,b) şi scriem $f(x) \in C^\infty(a,b)$ dacă $f(x)$ are derivate de orice ordin în $\forall x \in (a,b)$. De exemplu, e^x, $\sin x$, şi $\cos x$ sunt infinit diferențiabile pe $\mathbb{R}$.

Exemplu: Calculați toate derivatele funcției $y = x^4$

$$y^{(1)} = 4x^3, \quad y^{(2)} = 12x^2, \quad y^{(3)} = 24x, \quad y^{(4)} = 24$$

Deoarece $y^{(4)}$ este o constantă atunci toate derivatele de ordin mai mare ca patru sunt nule

$$y^{(5)} = y^{(6)} = \ldots = y^{(n)} = \ldots = 0$$

Interpretare fizică:
Considerăm legea mişcării rectilinii a unui punct material $s = s(t)$. Prima derivată $s'(t) = v(t)$ defineşte viteza punctului material la momentul *t*, iar derivata secundă $s''(t) = v'(t) = a(t)$ defineşte accelerația punctului material la momentul *t*.

Formula Leibniz

Fie $u(x)$ şi $v(x)$ două funcții care au derivate de ordinul *n*. Atunci:

a) dacă $y(x) = u(x) \pm v(x) \;\Rightarrow\; y^{(n)}(x) = u^{(n)}(x) \pm v^{(n)}(x)$
b) dacă $y(x) = u(x) \cdot v(x) \;\Rightarrow$

$$y' = u'v + uv'$$
$$y'' = u''v + 2u'v' + uv''$$
$$y''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''' \quad \text{etc.}$$

Prin inducție se arată că are loc *formula Leibniz*:

$$(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)}v + \frac{n}{1!}u^{(n-1)}v^{(1)} + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v^{(2)} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \ldots + uv^{(n)}$$

Exemplu:

Calculați derivata $y^{(1001)}$ pentru funcția $y = x^2 e^x$

$$y^{(1001)} = \left(e^x \cdot x^2\right)^{(1001)} = \left(e^x\right)^{(1001)} x^2 + \frac{1001}{1!}\left(e^x\right)^{(1000)}\left(x^2\right)' + \frac{1001 \cdot 1000}{2!}\left(e^x\right)^{(999)}\left(x^2\right)'' + 0$$

$$y^{(1001)} = e^x x^2 + 2002 e^x x + 1001 \cdot 1000 \cdot e^x$$

Diferențiale de ordin superior

Fie $y = f(x)$ o funcție diferențiabilă în punctul *x*. Diferențiala $dy = f'(x)dx$ poate fi şi ea o funcție diferențiabilă de *x*. Atunci, există diferențiala unei diferențiale a unei funcții date care se numeşte *diferențială de ordinul* doi sau diferențială secundă a lui $y = f(x)$.

Notație: $d^2 y$

$$d^2 y = d(dy) \tag{49}$$

Similar, diferențiala de ordinul *n* unei funcții $y = f(x)$ este diferențiala diferențialei de ordinul $n-1$ a funcției $y = f(x)$, adică

$$d^n y = d\left(d^{n-1} y\right) \tag{50}$$

In continuare, deducem câteva formule importante pentru diferențialele de ordin superior.

1. Fie $y = f(x)$ o funcție de variabilă independentă *x* şi care are diferențiale de orice ordin. Atunci

$$dy = f'(x)dx$$

unde $dx = \Delta x$ este independent de *x*. Prin definiție,

$$d^2 y = d(dy) = d\left(f'(x)dx\right)$$

Diferențiala $f'(x)dx$ este o funcție de *x* în care factorul *dx* este independent de *x* şi poate ieşi în afara semnului de diferențiere.

$$d^2 y = d\left(f'(x)\right)dx = \left(f'(x)\right)' dxdx = f''(x)(dx)^2 = f''(x)dx^2$$

Unde, $(dx)^2 = dx^2$ este o notatie specifica.
Prin inducție se arată că formula diferențialei de ordinul n este:

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n \quad \text{unde} \quad dx^n = (dx)^n . \tag{51}$$

In notația Leibniz derivata de ordinul n poate fi scrisă ca un raport de diferențiale:

$$f^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$$

2. Fie $y = f(u)$ cu $u = \varphi(x)$ o funcție diferențiabilă de un număr suficient de ori. Diferențiala are forma invariantă

$$dy = f'(u)du$$

unde $du = \varphi'(x)dx$ este în general dependentă de *x*.

$$d^2 y = d(dy) = d(f'(u)du) = d(f'(u))du + f'(u)d(du) = f''(u)du^2 + f'(u)d^2 u$$

$$d^2 y = f''(u)du^2 + f'(u)d^2 u \tag{52}$$

Obs: Dacă *u* este variabilă independentă, atunci $d^2 u = 0$ şi $d^2 y = f''(u)du^2$.

$$d^3 y = d\left(d^2 y\right) = d\left(f''(u)du^2 + f'(u)d^2 u\right)$$

$$= d\left(f''(u)\right)du^2 + f''(u)d\left(du^2\right) + d\left(f'(u)\right)d^2 u + f'(u)d(d^2 u)$$

$$= f'''(u)du\ du^2 + f''(u)2du\ d(du) + f''(u)du\ d^2 u + f'(u)d^3 u$$

$$d^3 y = f'''(u)du^3 + 3f''(u)du\ d^2 u + f'(u)d^3 u \tag{53}$$

Obs: Dacă *u* este variabilă independentă, atunci $d^2 u = 0$, $d^3 u = 0$ şi $d^3 y = f'''(u)du^3$.

Exerciții:

1. Calculați $d^2 y$ pentru $y = \cos 5x$.
   $d^2 y = f''(x)dx^2$
   Cum $y' = -5\sin 5x$ şi $y'' = -25\cos 5x \Rightarrow d^2 y = -25\cos 5x\ dx^2$
2. Calculați $d^2 y$ pentru $y = \arccos x$.
   $d^2 y = f''(x)dx^2$

Cum $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ şi

$$y'' = \left[-\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]' = (-1)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}-1}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}$$

$$\Rightarrow\ d^2y = -\frac{x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}dx^2$$

3. Calculaţi d^2y pentru $y = \sin x \cdot \ln x$.

Cum $y' = \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}$ şi $y'' = -\sin x \ln x + \frac{\cos x}{x} + \frac{\cos x \cdot x - \sin x}{x^2}$

$$\Rightarrow\ d^2y = \left(-\sin x \ln x + 2\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}\right)dx^2$$

3.12 Diferenţierea funcţiilor date în formă parametrică

În plan, considerăm un sistem cartezian de coordonate *xOy* şi două funcţii *continue* $\varphi(t)$ şi $\psi(t)$ definite pe intervalul $[\alpha,\beta]$. Acestea definesc o curbă parametrizată continuă Γ. Ecuaţiile parametrice ale curbei sunt:

$$\Gamma : \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \qquad t \in [\alpha,\beta] \tag{54}$$

Curba Γ este formată din mulţimea punctelor *M* cu coordonatele $(\varphi(t),\psi(t))$ obţinute atunci când *t* parcurge intervalul $[\alpha,\beta]$.

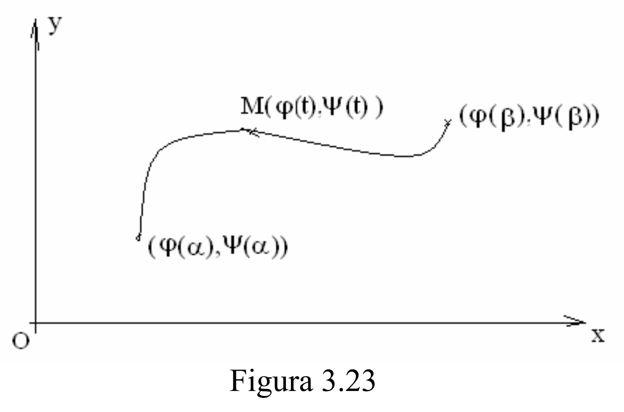

Figura 3.23

Exemple:

1. Cercul de rază *R*, şi centru originea sistemului de coordonate:

$$\Gamma : \begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}, \qquad t \in [0, 2\pi] \tag{55}$$

Parametrul t este unghiul dintre axa Ox şi vectorul de poziție $\vec{OM}$ al unui punct de pe cerc măsurat în radiani.

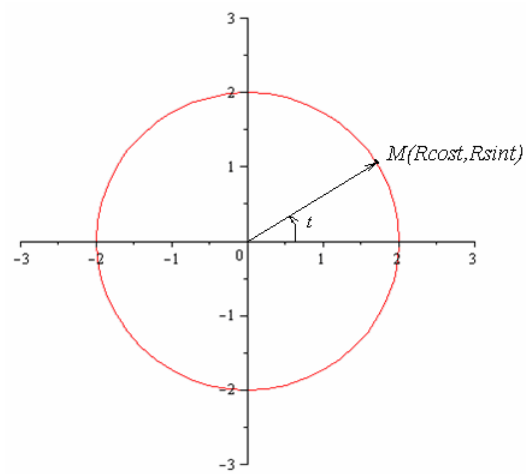

Figura 3.24 Cercul cu raza $R = 2$

2. Elipsa cu semiaxele a şi b:

$$\Gamma : \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, \qquad t \in [0, 2\pi] \tag{56}$$

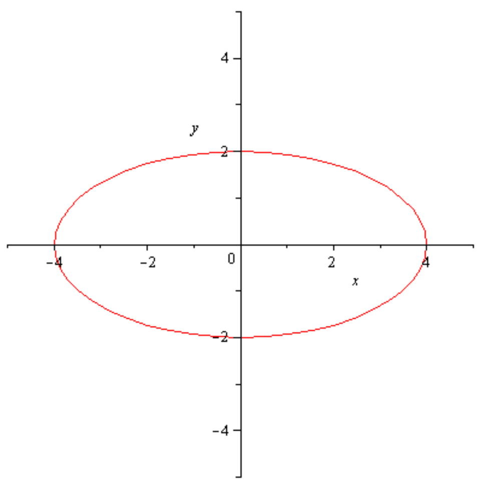

Figura 3.25 Elipsa cu semiaxele $a = 4$, $b = 2$

Ecuațiile parametrice ale unei curbe plane pot fi reduse la ecuația $F(x, y) = 0$, eliminând parametrul t. De exemplu,

-în cazul cercului

$$\Gamma : \begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

eliminând parametrul t se obține $x^2+y^2=R^2$ (57)

-în cazul elipsei:

$$\Gamma:\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}, \qquad t\in[0,2\pi]$$

prin eliminarea lui t se obține $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (58)

Uneori este dificilă eliminarea parametrului t, situație în care avem nevoie de tehnici de determinare a derivatei lui y în raport cu x. Astfel, fie o curbă definită parametric de funcțiile continue $\varphi(t)$ şi $\psi(t)$ definite pe $[\alpha,\beta]$.

$$\Gamma:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}, \qquad t\in[\alpha,\beta]$$

Presupunem că funcția $x=\varphi(t)$ admite inversă $t=g(x)$. Atunci, $y=\psi[g(x)]$ este o funcție compusă de x. Mai mult, presupunem că $\varphi(t)$ şi $\psi(t)$ sunt diferențiabile în $t\in(\alpha,\beta)$, $\varphi'(t)\neq 0$ şi $t=g(x)$ este diferențiabilă în punctul x corespunzător lui t. Cu teorema de derivare a funcțiilor compuse, funcția $y=\psi[g(x)]$ este diferențiabilă în x şi

$$y'_x=y'_t\cdot t'_x$$

Cu teorema de derivare a funcției inverse:

$$t'_x=\frac{1}{x'_t}$$

$$y'_x=y'_t\cdot\frac{1}{x'_t}=\frac{y'_t}{x'_t}$$

$$\Rightarrow \qquad y'_x=\frac{y'_t}{x'_t} \tag{59}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad \varphi'(t)\neq 0$$

Acelaşi rezultat se poate obține dacă împărțim numărătorul şi numitorul din $\dfrac{dy}{dx}$ cu dt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

Exemplu:

Considerăm un cerc reprezentat parametric:

$$\Gamma : \begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{R\cos t}{-R\sin t} = -ctg\ t$$

sau: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$

Dacă $\varphi(t)$ şi $\psi(t)$ au derivate de ordinul *k*, şi $\varphi'(t) \neq 0$, atunci funcția compusă $y = \psi[g(x)]$ are derivate de ordinul *k* în raport cu *x*.

Astfel, derivata secundă este:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$$

Şi în general,

$$y_x^{(n)} = \frac{\left(y_x^{(n-1)}\right)'_t}{x'_t} \tag{60}$$

În aceste formule de derivare, funcția $y = f(x)$ este definită în mod parametric de ecuațiile $x = x(t)$ şi $y = y(t)$.

Exemplu:

Calculați $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ pentru funcția definită parametric:

$$\Gamma : \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, \qquad t \in [0, 2\pi] \text{ numită cicloidă}$$

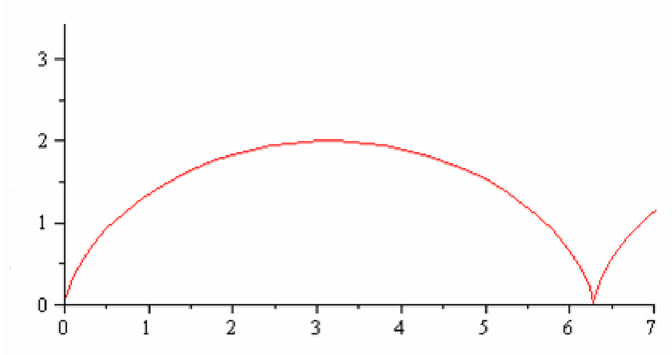

Figura 3.26 Cicloida cu $a = 1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = ctg\frac{t}{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(ctg\frac{t}{2}\right)\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(ctg\frac{t}{2}\right)\cdot\frac{1}{dx/dt} =$$

$$= -\frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}}\frac{1}{2}\frac{1}{a(1-\cos t)} = -\frac{1}{4a\sin^2\frac{t}{2}\sin^2\frac{t}{2}} = -\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}$$

Exemplu: Determinați derivata $y' = \dfrac{dy}{dx}$ pentru funcția y reprezentată parametric.

$$\begin{cases} x = \dfrac{2at}{1+t^2} \\ y = \dfrac{a\left(1-t^2\right)}{1+t^2} \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{a\dfrac{-2t\left(1+t^2\right)-\left(1-t^2\right)2t}{\left(1+t^2\right)^2}}{2a\dfrac{1\cdot\left(1+t^2\right)-t\cdot 2t}{\left(1+t^2\right)^2}} = \frac{-t-t^3-t+t^3}{1+t^2-2t^2} = \frac{-2t}{1-t^2}$$

Teorema 1 (Rolle):

Dacă o funcție $f(x)$ este:

1. continuă pe intervalul închis $[a,b]$
2. derivabilă pe intervalul deschis (a,b)
3. ia valori egale la capetele intervalului, adică $f(a)=f(b)$

atunci există cel puțin un punct $\xi \in (a,b)$ astfel încât $f'(\xi)=0$

Interpretare geometrică: între *a* şi *b* există cel puțin un punct ξ în care tangenta la curba $y=f(x)$ este paralelă cu axa *x*.

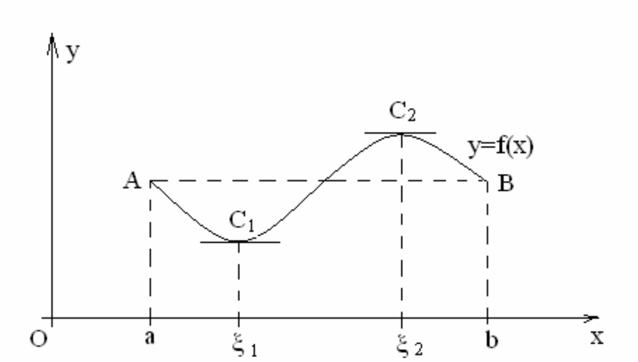

Figura 3.27

Exemple:

1) Arătați că funcția $f(x)=x-x^3$ verifică ipotezele teoremei Rolle pe intervalele $[-1,0]$, $[0,1]$. Determinați valori potrivite pentru ξ.

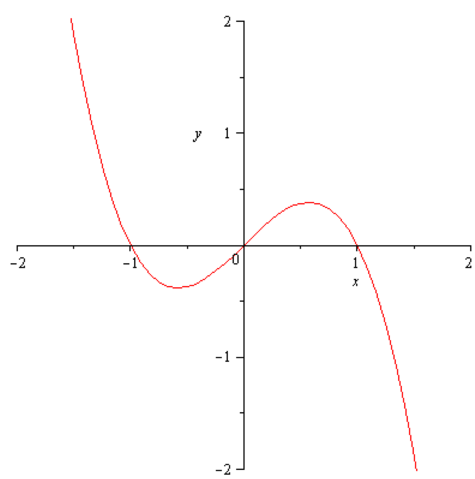

Figura 3.29 $f(x)=x-x^3$

Funcția $f(x) = x - x^3$ este elementară deci continuă şi derivabilă. $f(-1) = f(0) \overset{TR}{\Rightarrow}$ $\exists \xi \in (-1, 0)$ a.î. $f'(\xi) = 0$. $1 - 3\xi^2 = 0 \Rightarrow \xi = -\sqrt{\frac{1}{3}}$. Analog, $f(0) = f(1)$ şi $\xi = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

2) $f(x) = |x|$, $x \in [-1, +1]$ (subliniază importanța ipotezelor teoremei)

Pentru această funcție, nu este îndeplinită ipoteza 2 a teoremei, deoarece funcția nu este derivabilă în $x = 0$. Teorema lui Rolle nu este aplicabilă, şi în intervalul $(-1, +1)$ nu există nici un punct în care $f'(x) = 0$.

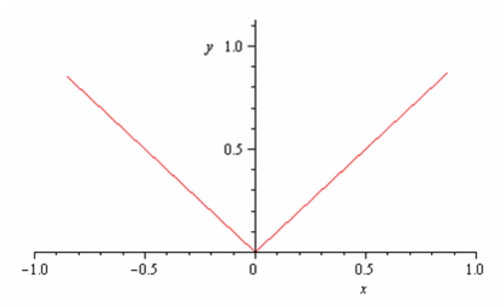

Figura 3.28 $f(x) = |x|$