3.4 Derivate laterale
continuare

Fie $f(x)$ o funcție *continuă* în x_0. Spunem că $f(x)$ are *derivată infinită* în x_0, dacă în acest punct are loc:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \pm\infty \tag{10}$$

In această situație tangenta la curba $y = f(x)$ în punctul $(x_0, f(x_0))$ este paralela cu axa *Oy* si perpendiculară pe axa *Ox*.

Exemplu: Fie $f(x) = \sqrt[3]{x}$ si considerăm $x = 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}$$

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$$

Tangenta la curba $y = \sqrt[3]{x}$ în punctul $(0,0)$ coincide cu axa *Oy*.

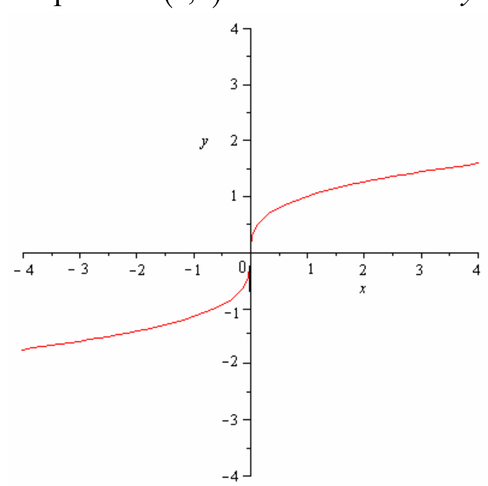

Figura 3.7 $f(x) = \sqrt[3]{x}$

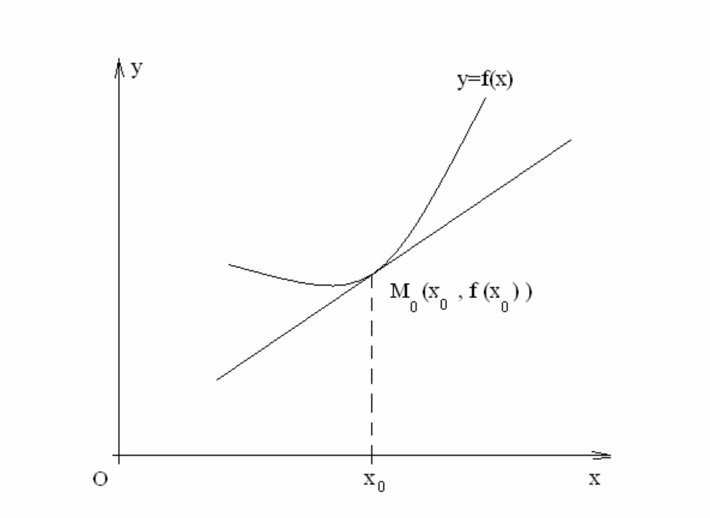

Figura 3.8

De reținut: Dacă o funcție $f(x)$ are derivată finită în x_0, atunci există o tangentă la graficul $y = f(x)$ în punctul $M_0\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ şi ecuația acestei tangente este:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \tag{11}$$

Definiție: O funcție $f(x)$ este *netedă* pe (a,b) dacă $f(x)$ şi $f'(x)$ sunt continue pe (a,b).

Dacă o funcție $f(x)$ este continuă în x_0 şi are derivate laterale diferite în x_0, $f'(x_0 - 0) \neq f'(x_0 + 0)$, atunci în punctul $M_0\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ curba $y = f(x)$ nu admite tangentă. In această situație, curba $y = f(x)$ nu este netedă, iar prin punctul $M_0\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ trec două drepte, una tangentă la ramura stângă a curbei şi alta tangentă la ramura dreaptă a curbei. Punctul $M_0\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ se numeşte *punct unghiular*.

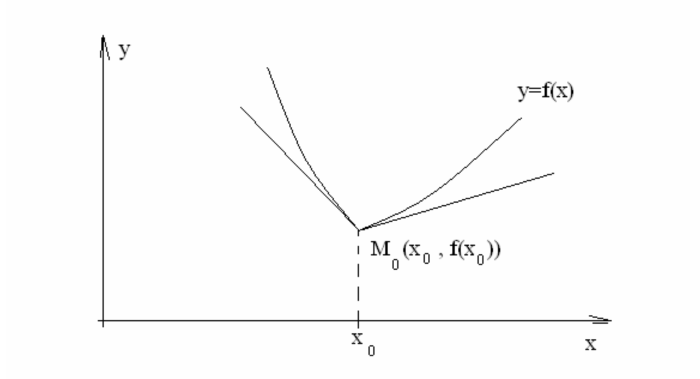

Figura 3.9

Exemplu: Funcția $y = |x|$ are un punct unghiular în $O(0,0)$

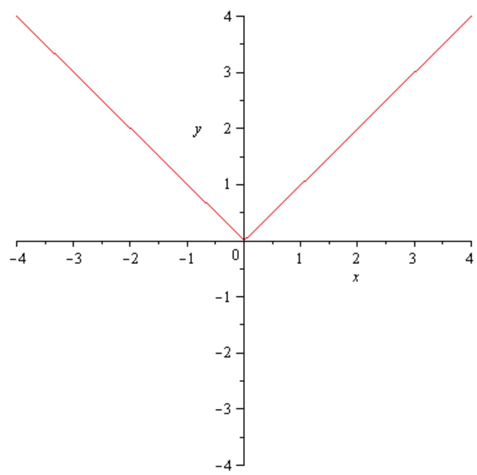

Figura 3.10 $f(x) = |x|$

Dacă o funcție $f(x)$ este continuă în x_0 şi are derivată infinită în x_0, putem distinge cazurile:

1) $f'(x_0) = +\infty$
2) $f'(x_0) = -\infty$
3) $f_s'(x_0) = -\infty \quad f_d'(x_0) = +\infty \quad x_0$ este punct de intoarcere
4) $f_s'(x_0) = +\infty \quad f_d'(x_0) = -\infty \quad x_0$ este punct de intoarcere

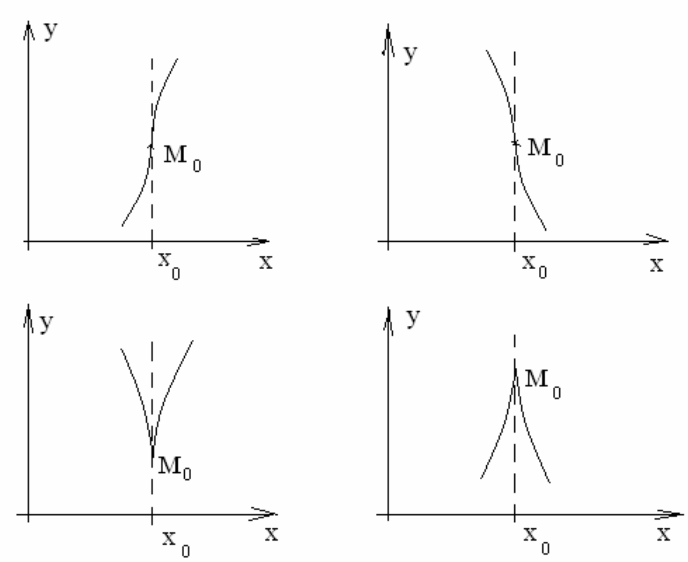

Figura 3.11

3.5 Funcții diferențiabile

Fie $f(x)$ o funcție definită pe (a,b) şi fie $x \in (a,b)$. Considerăm o creştere Δx a argumentului x astfel încât $x+\Delta x \in (a,b)$. Creşterea Δx a argumentului produce o creştere Δy pentru funcție:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \tag{12}$$

Definiție: Funcția $f(x)$ se numeşte *diferențiabilă* în punctul $x \in (a,b)$ dacă creşterea funcției $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$, corespunzătoare creşterii Δx a argumentului admite o reprezentare de forma:

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \tag{13}$$

unde *A* este un număr independent de Δx, dar în general dependent de *x* şi $\alpha(\Delta x) \to 0$ pentru $\Delta x \to 0$.

Exemplu: $f(x) = x^2$

Pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ şi $\forall \Delta x$,

$$\Delta y = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x \Delta x$$

$$A = 2x \quad \alpha(\Delta x) = \Delta x$$

Cu definiția, $f(x) = x^2$ este diferențiabilă $\forall x \in \mathbb{R}$.

Teorema 1: Pentru ca o funcție $y = f(x)$ să fie diferențiabilă într-un punct *x* este necesar şi suficient ca funcția să aibă derivată finită $f'(x)$ în punctul *x*.

Demonstrație:

$\Rightarrow$ Considerăm $y = f(x)$ diferențiabilă în *x* $\Rightarrow$ o creştere Δx în *x* produce o creştere Δy a funcției care poate fi scrisă:

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$$

unde *A* este o constantă pentru un *x* dat şi $\alpha(\Delta x) \to 0$ pentru $\Delta x \to 0$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A = f'(x)$$

Deci, derivata funcției în punctul x există.

$\Leftarrow$ Considerăm că funcția are derivata $f'(x)$ în punctul $x \Rightarrow \exists \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$

Cu teorema de reprezentare de la operații cu limite avem:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$$

unde $\alpha(\Delta x) \to 0$ pentru $\Delta x \to 0$. Atunci $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$

Deoarece $f'(x)$ este independent de Δx şi $\alpha(\Delta x) \to 0$ pentru $\Delta x \to 0 \Rightarrow$ funcția este diferențiabilă în x.

Observație: Această teoremă stabileşte o corespondență unu-la-unu între noțiunea de funcție diferențiabilă într-un punct şi noțiunea de funcție cu derivată finită în acelaşi punct. In consecință, operația de calcul a derivatei unei funcții se numeşte şi diferențierea unei funcții.

Teorema 2(Continuitatea funcțiilor diferențiabile)**:** Dacă o funcție $y = f(x)$ este diferențiabilă într-un punct x, atunci funcția este continuă în punctul x.

Demonstrație:

Considerăm $y = f(x)$ diferențiabilă în $x \Rightarrow$ o creştere Δx a argumentului in x produce o creştere Δy a funcției care poate fi scrisă:

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

unde A este o constantă pentru un x dat şi $\alpha(\Delta x) \to 0$ pentru $\Delta x \to 0$.

$\Rightarrow \quad \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, adică funcția este continuă în x.

Reciproca nu este adevărată. Dacă $f(x)$ este continuă în x, nu este necesar să fie şi diferețiabilă în x.

Exemplu: $f(x) = |x|$ este continuă în $x = 0$, dar nu are derivată în $x = 0$, deci nu este nici diferențiabilă în acest punct.

Diferențiala

Fie $y = f(x)$ o funcție diferențiabilă în punctul *x*. Atunci o creștere Δx în *x* produce o creștere Δy a funcției care poate fi scrisă:

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

unde $\alpha(\Delta x) \to 0$ pentru $\Delta x \to 0$.
Dacă $A \neq 0$, partea liniară $A\Delta x$ a lui Δy se numește *diferențiala* funcției $y = f(x)$ și se notează cu *dy* sau $df(x)$, adica

$$dy = A\Delta x \tag{14}$$

$A\Delta x$ este *partea liniară principală* a lui Δy, deoarece $\alpha(\Delta x)\Delta x$ este un infinitezimal de ordin mai mare decât $A\Delta x$ pentru $\Delta x \to 0$. Cu alte cuvinte, <u>diferențiala</u> este partea principală a creșterii funcției relativ la creșterea Δx a argumentului.

Dacă $A = 0$, diferențiala este nulă.
Din demonstrația teoremei 1 avem $A = f'(x)$, ceea ce conduce la

$$dy = f'(x)\Delta x$$

Observație: Diferențiala unei variabile independente *x* este:

$$dx = \Delta x \tag{15}$$

Atunci, diferențiala funcției $y = f(x)$ se poate scrie:

$$dy = f'(x)dx \tag{16}$$

Din această scriere rezultă imediat *notația Leibniz* pentru derivată în forma unui raport de două diferențiale:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \tag{17}$$

Definiție: Spunem că o funcție $y = f(x)$ este diferențiabilă pe (a,b) dacă funcția este diferențiabilă în orice punct din (a,b).

Interpretarea geometrică a diferențialei

Fie $y = f(x)$ o funcție diferențiabilă pe (a,b). Desenăm tangenta la curba $y = f(x)$ într-un punct *M* de abscisă *x* și considerăm un punct M_1 cu abscisa *x*+*dx*. Desigur, $f'(x) = tg\varphi$. Considerăm triunghiul MPQ, în care

$$PQ = MP \cdot tg\varphi = f'(x)dx = dy$$

Astfel, diferențiala $dy = f'(x)dx$ a funcției $y = f(x)$ este creşterea ordonatei tangentei la curba $y = f(x)$ în *M* când *x* are creşterea *dx*.

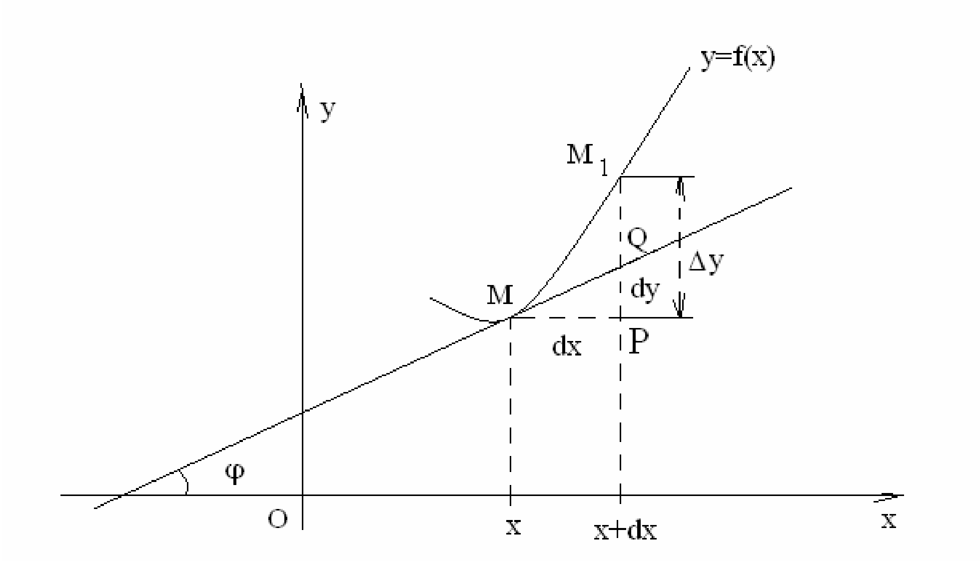

Figura 3.12

Exemple:

1.

a) Determinați creşterea funcției şi diferențiala funcției $y = 3x^2 - x$

b) Calculați Δy şi *dy* pentru această funcție, dacă $x = 1$ şi $\Delta x = 0.01$

a. $$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \left[3(x+\Delta x)^2 - (x+\Delta x)\right] - (3x^2 - x) =$$
$$= 3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - x - \Delta x - 3x^2 + x = 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - \Delta x$$
$$\Delta y = (6x-1)\Delta x + 3\Delta x \cdot \Delta x$$
$$dy = (6x-1)\Delta x$$

Sau $dy = f'(x)dx \;\Rightarrow\; dy = (6x-1)dx$

b. $$\Delta y = (6\cdot 1 - 1)\cdot 0.01 + 3\cdot 0.01 \cdot 0.01 = 0.0503$$
$$dy = (6\cdot 1 - 1)\cdot 0.01 = 0.05$$

2. Determinați creşterea Δy şi diferențiala *dy* a funcției $y = 5x + x^2$ pentru $x = 2$ şi $\Delta x = 0.001$.

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \left[5(x+\Delta x) + (x+\Delta x)^2\right] - (5x + x^2) =$$
$$= 5x + 5\Delta x + x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 5x - x^2 = 5\Delta x + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$
$$\Delta y = (5+2x)\Delta x + \Delta x \cdot \Delta x$$
$$\Delta y = 9\cdot 0.001 + 0.000001 = 0.009001$$

$$dy = f'(x)dx \;\Rightarrow\; dy = (5+2x)dx \qquad dy = 9 \cdot 0.001 = 0.009$$

3. Determinați diferențialele următoarelor funcții pentru valori arbitrare ale argumentului şi ale creşterilor.

a) $y = e^{-x^2}$ b) $y = x\ln x - x$

$$dy = f'(x)dx \;\Rightarrow\; dy = \left(-2xe^{-x^2}\right)dx$$

$$dy = f'(x)dx \;\Rightarrow\; dy = \left(\ln x + x\cdot\frac{1}{x} - 1\right)dx \;\Rightarrow\; dy = (\ln x)dx$$

4. Calculați diferențiala funcției $y = tg\ x$ pentru $x = \frac{\pi}{3}$ şi $\Delta x = \frac{\pi}{180}$.

$$dy = f'(x)dx \;\Rightarrow\; dy = \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx \;\Rightarrow\; dy = \left(\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{3}}\right)\frac{\pi}{180} = 4\cdot\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{45} \approx 0.0698$$

3.6 Reguli de diferențiere

□ **Derivata unei funcții constante**

Funcția $y = C = ct$, $\forall x \in (a,b)$ are derivata $y' = 0$, $\forall x \in (a,b)$.
Într-adevăr, $\forall x \in (a,b)$, $\forall \Delta x$ astfel încât $x + \Delta x \in (a,b)$, are loc:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{C - C}{\Delta x} = 0, \qquad \forall x \in (a,b)$$

În concluzie, $(C)' = 0$ şi $dC = 0$

□ **Derivata sumei de funcții**

Fie $u(x)$ şi $v(x)$ două funcții diferențiabile în *x*. Atunci, suma $y(x) = u(x) + v(x)$ este şi ea diferențiabilă în *x* şi are loc:

$$y'(x) = \big(u(x) + v(x)\big)' = u'(x) + v'(x)$$
$$d(u+v) = du + dv$$

Demonstrație:
Cu definiția derivatei avem:

$$(u+v)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u+v)(x+\Delta x) - (u+v)(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x) - u(x) - v(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right]$$

$$(u+v)'(x) = u'(x) + v'(x)$$

Rezultatul poate fi extins la suma unui număr finit de funcții diferențiabile.

Exemplu:

$$y = e^x + x^2 + 2 \qquad\qquad y' = e^x + 2x + 0$$

□ **Derivata produsului de funcții**

Fie $u(x)$ şi $v(x)$ două funcții diferențiabile în *x*. Atunci, produsul $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ este şi el diferențiabil în *x* şi are loc:

$$\big(u(x) \cdot v(x)\big)' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$
$$d(u \cdot v) = vdu + udv$$

Demonstrație:
Cu definiția derivatei avem:

$$(u \cdot v)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u \cdot v)(x+\Delta x) - (u \cdot v)(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) \cdot v(x+\Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x) + u(x+\Delta x) \cdot v(x+\Delta x) - u(x+\Delta x) \cdot v(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\left(\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \right) v(x) + u(x+\Delta x) \left(\frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right) \right]$$

Cum limita sumei este suma limitelor, are loc:

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \right) v(x) + \lim_{\Delta x \to 0} u(x+\Delta x) \left(\frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right)$$

$$(u \cdot v)'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Unde, s-a folosit

$$\lim_{\Delta x\to 0} u(x+\Delta x) = u(x)$$

datorită continuității funcției $u(x)$. Demonstrația regulii de derivare a produsului presupune derivabilitatea funcțiilor *u* şi *v*, ceea ce implică continuitatea acestora.

Exemplu:

$$y = (x^2 - 2)(e^x + 2)$$

Observație: Un factor constant iese în fața derivatei şi diferențialei, adică

$$(Cu(x))' = Cu'(x)$$
$$d(Cu(x)) = Cdu$$

Regula produsului poate fi generalizată la un număr finit de funcții diferențiabile:

$$(u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x))' = u_1'(x)u_2(x)\cdots u_n(x) + u_1(x)u_2'(x)\cdots u_n(x) + \ldots + u_1(x)u_2(x)\cdots u_n'(x)$$

- **Derivata raportului de funcții**

Fie $u(x)$ şi $v(x)$ două funcții diferențiabile în x şi $v(x)\neq 0$ în x. Atunci, raportul $y(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ este şi el diferențiabil în x şi are loc:

$$y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \tag{25}$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2},\quad v(x)\neq 0 \tag{26}$$

Demonstrație:
Cu definiția derivatei avem:

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\frac{u}{v}\right)(x+\Delta x) - \left(\frac{u}{v}\right)(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\frac{u(x+\Delta x)v(x) - u(x)v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)v(x)}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\frac{u(x+\Delta x)v(x) - u(x)v(x) + u(x)v(x) - u(x)v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)v(x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} v(x) - u(x) \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}}{v(x+\Delta x) v(x)}$$

$$= \frac{u'(x) v(x) - u(x) v'(x)}{\left[v(x)\right]^2}$$

Exemplu: $y = \dfrac{e^x - 1}{x^2 + 3}$

$$y' = \frac{\left(e^x - 1\right)' \left(x^2 + 3\right) - \left(e^x - 1\right)\left(x^2 + 3\right)'}{\left(x^2 + 3\right)^2} = \frac{e^x \left(x^2 + 3\right) - \left(e^x - 1\right) 2x}{\left(x^2 + 3\right)^2}$$

3.7 Derivatele unor funcții elementare

□ Funcția exponențială $y = a^x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$ definită $\forall x \in \mathbb{R}$

Pentru $\forall x$, $\forall \Delta x$, creșterea funcției este

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x \left(a^{\Delta x} - 1\right)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

Facem schimbarea de variabilă $y = a^{\Delta x} - 1$, $1 + y = a^{\Delta x}$, $\log_a (1 + y) = \Delta x$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \lim_{y \to 0} \frac{y}{\log_a (1 + y)} = a^x \lim_{y \to 0} \frac{1}{\log_a (1 + y)^{\frac{1}{y}}} = a^x \frac{1}{\log_a e} = a^x \ln a$$

$$\Rightarrow \quad \left(a^x\right)' = a^x \ln a \qquad (27)$$

Caz particular: $\left(e^x\right)' = e^x$ (28)

□ Funcția logaritmică $y = \ln x$, $(x > 0)$

Pentru $\forall x$, $\forall \Delta x$, astfel încât $x + \Delta x > 0$ creşterea funcției este

$$\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \ln \lim_{\Delta x \to 0}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}\cdot\frac{1}{x}} = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \quad (\ln x)' = \frac{1}{x} \tag{29}$$

Observație: $\log_a x = \log_a e \cdot \ln x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$

$$(\log_a x)' = \log_a e (\ln x)' = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x \ln a}$$

$$\Rightarrow \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \tag{30}$$

□ Funcția putere $y = x^{\alpha}$, $(\alpha \in \mathbb{R})$ definită $\forall x > 0$

Pentru $\forall x$, $\forall \Delta x$, creşterea funcției este

$$\Delta y = (x + \Delta x)^{\alpha} - x^{\alpha} = x^{\alpha}\left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1\right]$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} x^{\alpha} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1}{\Delta x} = x^{\alpha} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1}{x \frac{\Delta x}{x}} = x^{\alpha} \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1}{\frac{\Delta x}{x}} = x^{\alpha - 1}\alpha$$

Unde am folosit limita $\lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)^{\alpha} - 1}{x} = \alpha$

Într-adevăr,

$$y = (1 + x)^{\alpha} - 1 \quad \Rightarrow \quad 1 + y = (1 + x)^{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \ln(1 + y) = \ln(1 + x)^{\alpha}$$

$$\ln(1 + y) = \alpha \ln(1 + x)$$

$$\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\frac{y}{x}=\frac{y}{\ln(1+y)}\cdot\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}$$

Trecem la limită:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}\cdot\lim_{x\to 0}\alpha\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\alpha$$

În concluzie, formula de derivare a funcției putere este:

$$\Rightarrow\quad \left(x^{\alpha}\right)'=\alpha x^{\alpha-1} \qquad (31)$$

□ Funcții trigonometrice $y=\sin x$, $x\in\mathbb{R}$

Pentru $\forall x$, $\forall\Delta x$, creșterea funcției este

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=1\cdot\cos x$$

$$\Rightarrow\quad (\sin x)'=\cos x \qquad \text{Similar,} \qquad (\cos x)'=-\sin x \qquad (32)$$

$$(tg\ x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos x\ \cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x},\quad x\neq(2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow\quad (tg\ x)'=\frac{1}{\cos^2 x},\quad x\neq(2n+1)\frac{\pi}{2} \qquad (33)$$

Similar, $\quad (ctg\ x)'=-\frac{1}{\sin^2 x},\quad x\neq n\pi \qquad$ (34)_

Exercițiu: Reprezentați grafic $f(x)=\frac{1}{x},\ x\neq 0$ și $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

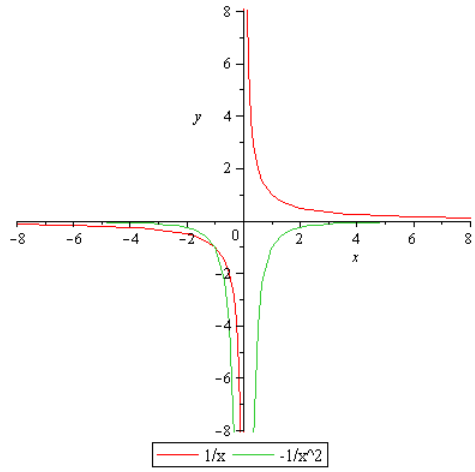

Figura 3.13

Observație: Graficele funcțiilor $f(x)$ și $f'(x)$ sunt diferite. Mai mult, $f(x)$ este funcție impară iar $f'(x)$ este funcție pară. În general, derivata unei funcții impare este o funcție pară și vice-versa.

3.8 Derivatele funcțiilor compuse

Teorema 1: Fie $u=\varphi(x)$ o funcție diferențiabilă în x_0 și fie $y=f(u)$ o funcție diferențiabilă în $u_0=\varphi(x_0)$. Atunci, funcția compusă $y=f[\varphi(x)]$ este diferențiabilă în x_0 și are loc:

$$\left\{f\left[\varphi(x)\right]\right\}'(x_0)=f'(u_0)\varphi'(x_0) \tag{35}$$

Observație: Egalitatea de mai sus poate fi scrisă și în alte moduri:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \qquad \text{sau} \qquad y'_x=y'_u u'_x \tag{36}$$

Demonstrație:
Creşterea Δx a argumentului determină o creştere Δu a funcției $u=\varphi(x)$. Această creştere Δu determină şi aceasta o creştere Δy pentru $y=f(u)$. Cum $y=f(u)$ este diferențiabilă în u_0 avem:

$$\Delta y=f'(u_0)\Delta u+\alpha(\Delta u)\cdot\Delta u \qquad \alpha(\Delta u)\to 0,\ \Delta u\to 0$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(u_0)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x} \tag{37}$$

Cum $u = \varphi(x)$ o funcție diferențiabilă în x_0 aceasta este şi continuă în x_0 deci $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0$

În relația (37) trecem la limită $\Delta x \to 0$ şi obținem relația (35).

Exemple:

1) Calculați derivata funcției $y = e^{\sin x}$

y este o funcție compusă de x care poate fi scrisă în forma

$$y = e^{u(x)} \quad \text{cu} \quad u(x) = \sin x$$

$$\Rightarrow \qquad y'_x = \left(e^u\right)'_u u'_x = e^u \cos x = e^{\sin x} \cos x$$

2) Calculați derivata funcției $y = \sin\left(x^2\right)$

y este o funcție compusă de x care poate fi scrisă în forma

$$y = \sin u(x) \quad \text{cu} \quad u(x) = x^2$$

$$\Rightarrow \qquad y'_x = (\sin u)'_u u'_x = \cos u \cdot 2x = 2x \cdot \cos\left(x^2\right)$$

3) Calculați derivata funcției $y = \ln|x|,\ x \neq 0$

y este o funcție pară definită pe $\mathbb{R} - \{0\}$

Dacă $x > 0 \ \Rightarrow\ |x| = x \ \Rightarrow\ y = \ln x \ \Rightarrow\ y'_x = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}, \quad x > 0$

Dacă $x < 0 \ \Rightarrow\ |x| = -x \ \Rightarrow\ y = \ln(-x)$

In această situație derivăm funcția compusă:

$$y'_x = y'_u u'_x = \frac{1}{u}(-1) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}, \quad x < 0$$

In concluzie,

$$\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

Observație: Teorema 1 este valabilă şi pentru compunerea unui număr finit de funcții. De exemplu, dacă

$$y = f(u), \quad u = \varphi(z) \quad \text{şi} \quad z = \psi(x) \tag{38}$$

Atunci derivata funcției compuse $y = f\{\varphi[\psi(x)]\}$ este:

$$y'_x = y'_u u'_z z'_x \tag{39}$$

cu condiția ca derivatele implicate să existe.

Exemplu: $y = \sin^3 4x \qquad y'_x = y'_u u'_z z'_x \qquad y = u^3 \quad u = \sin z \quad z = 4x$

$$y' = 3\sin^2 4x \cdot \cos 4x \cdot 4$$

Invarianța diferențialei

Dacă $y = f(u)$ este o funcție diferențiabilă de variabila independentă *u* atunci

$$dy = f'(u)du \tag{40}$$

unde $du = \Delta u$.

Fie $u = \varphi(x)$ o funcție diferențiabilă de variabilă independentă *x*. Atunci putem considera *y* ca o funcție compusă $y = f[\varphi(x)]$ de variabilă *x*. Putem exprima diferențiala funcției compuse astfel

$$dy = \{f[\varphi(x)]\}'_x dx \tag{41}$$

Cu teorema 1 de derivare a funcțiilor compuse avem

$$dy = f'(u)\varphi'(x)dx \tag{42}$$

Şi deoarece $\varphi'(x)dx = du$, obținem din nou relația

$$dy = f'(u)du$$

De reținut Diferențiala unei funcții se exprimă cu aceeaşi formulă indiferent dacă argumentul funcției este o *variabilă independentă* sau este o *funcție de o altă variabilă*. Această proprietate se numeşte *invarianța formei de exprimare a diferențialei.*

In formula $dy = f'(u)du$, diferențiala *du* este egală cu o creştere arbitrară Δu a unei variabile independente *u* sau dacă *u* nu este variabilă independentă, adică $u = \varphi(x)$, atunci $du = \varphi'(x)dx$ este partea liniară a creşterii funcției $u = \varphi(x)$ şi este în general diferită de Δu.

Exerciții:

Calculați derivatele funcțiilor:

$$y = \left(x^2 - 2x + 3\right)^5$$

$$y' = 5\left(x^2 - 2x + 3\right)^4 \left(x^2 - 2x + 3\right)' = 5\left(x^2 - 2x + 3\right)^4 (2x - 2)$$

$$y = (2a + 3bx)^2, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$y' = 2(2a + 3bx)(2a + 3bx)' = 2(2a + 3bx)(3b)$$

$$y = \sqrt[3]{a + bx^3}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$y' = \frac{1}{3}\left(a + bx^3\right)^{\frac{1}{3}-1}\left(a + bx^3\right)' = \frac{1}{3}\left(a + bx^3\right)^{-\frac{2}{3}}\left(b3x^2\right)$$

$y = \cos\left(\alpha x + \beta\right), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$y' = -\sin\left(\alpha x + \beta\right)\left(\alpha x + \beta\right)' = -\sin\left(\alpha x + \beta\right)\left(\alpha\right)$$