1. Noțiuni introductive

1.1 Mulțimi. Operații cu mulțimi

O *mulțime* este o colecție de obiecte distincte pe care le numim *elemente*. Exemple: mulțimea literelor scrise pe această pagină, mulțimea rădăcinilor unei ecuații, mulțimea studenților din anul întâi.

Modul convențional de a scrie o mulțime este să-i listăm toate elementele între două acolade:

$$A = \{a\} \qquad B = \{a,b\} \qquad C = \{a,b,c\} \tag{1}$$

Mulțimea numerelor naturale $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$
Mulțimea pătratelor numerelor naturale $\{0,1,4,9,\ldots\}$
Mulțimea numerelor întregi $\mathbb{Z} = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$

Elementele unei mulțimi trebuie să fie distincte, iar ordinea elementelor nu contează.

$$\{a,b\} = \{b,a\}$$

Scrierea $x \in A$, înseamnă că *x* este un element al mulțimii *A*. De exemplu, $2 \in \mathbb{N}$. Scrierea $y \notin A$, înseamnă că *y* nu este un element din mulțimea *A*.

Compararea mulțimilor

Scrierea $A \subset B$ înseamnă că mulțimea *A* este inclusă în mulțimea *B* sau *A* este *submulțime* pentru *B*, ceea ce implică că fiecare $x \in A$ este şi element în a doua mulțime, $x \in B$. De exemplu, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Notăm cu ϕ mulțimea vidă. Pentru orice mulțime *A* avem $\phi \subset A$.

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ şi } B \subset A \tag{2}$$

Operații cu mulțimi

Fie A şi B două mulțimi.
Reuniunea lui A cu B, notată $A \cup B$, este mulțimea tuturor elementelor $x \in A$ sau $x \in B$.
Intersecția lui A cu B, notată $A \cap B$, este mulțimea tuturor elementelor $x \in A$ şi simultan $x \in B$.
Diferența lui A cu B, notată $A - B$, este mulțimea tuturor elementelor $x \in A$ şi $x \notin B$.

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ sau } x \in B\}$$
$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ si } x \in B\}$$
$$A - B = \{x | x \in A \text{ si } x \notin B\}$$

Dacă $A \cap B = \phi$, A şi B se spune că sunt mulțimi *disjuncte*.

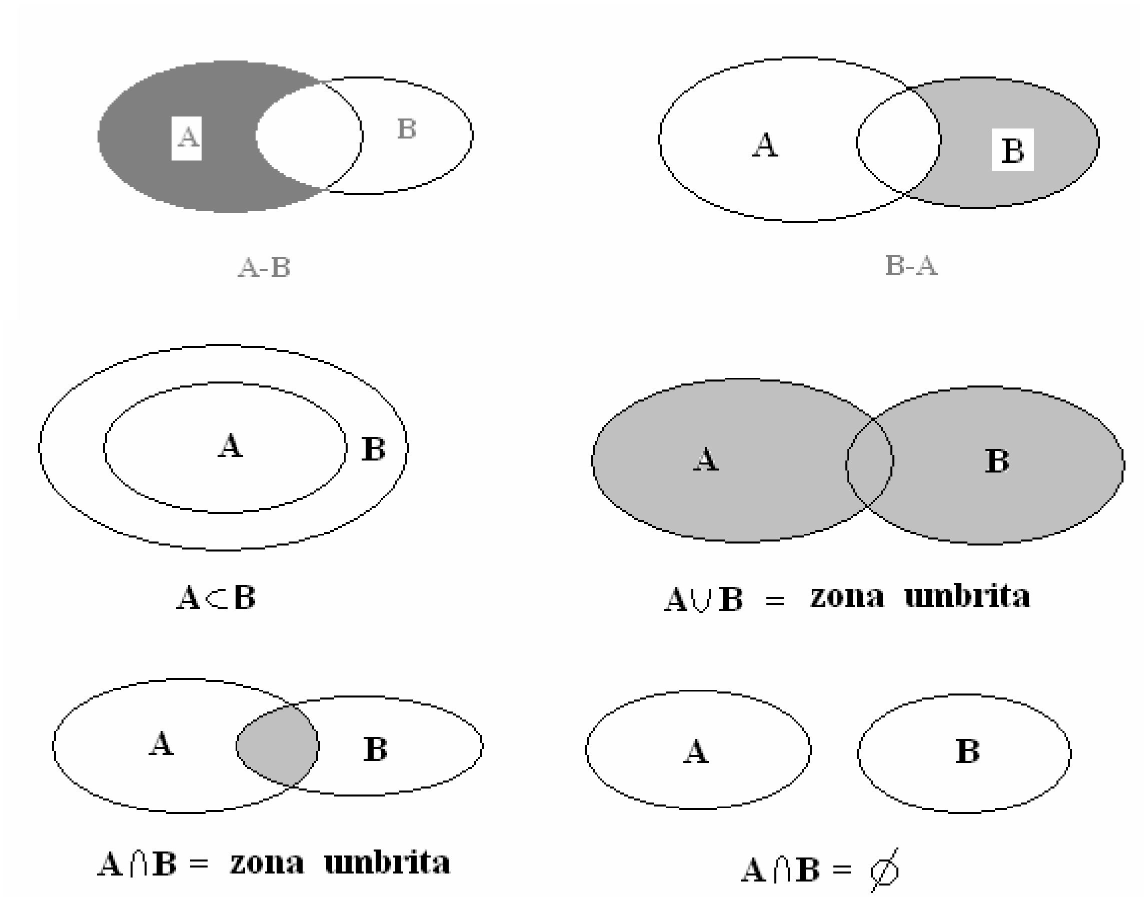

Figura 1.1 Operații cu mulțimi.

Definiția reuniunii şi intersecției de două mulțimi poate fi extinsă la un număr finit sau chiar infinit de mulțimi. Astfel,

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup \ldots \cup A_n \qquad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \qquad (3)$$

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap \ldots \cap A_n \qquad \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \qquad (4)$$

Exemple:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] = [0,1)$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[0, \frac{1}{n}\right] = \{0\}$$

Fie $A \subset E$. Numim *complementara* mulțimii A în raport cu E, mulțimea notată $C_E A$, unde

$$C_E A = E - A = \{x \mid x \in E \text{ si } x \notin A\} \qquad (5)$$

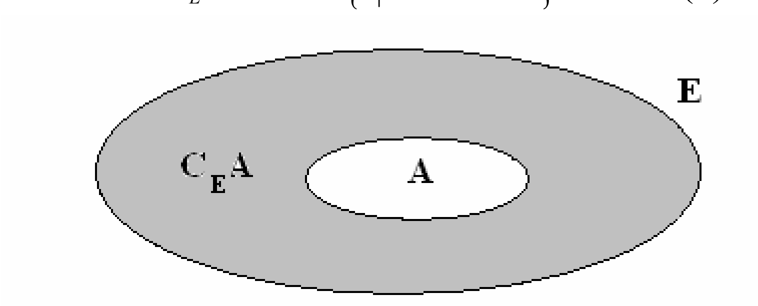

Figura 1.2 Complementara unei mulțimi.

Proprietăți:

1. $A \cap C_E A = \varnothing$
2. $A \cup C_E A = E$
3. $C_E(C_E A) = A$
4. $C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$
5. $C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$

Ultimele două egalități poartă numele de *relațiile lui De Morgan*.

Diferența simetrică a două mulțimi A şi B este mulțimea elementelor lor necomune.

$$A\Delta B=(A-B)\cup(B-A) \tag{6}$$

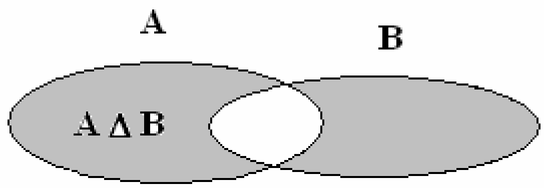

Figura 1.3 Diferența simetrică a două mulțimi.

Proprietăți:

1. $A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$
2. $A\Delta A=\varnothing$

Produsul cartezian a două mulțimi *A* şi *B* este mulțimea de perechi (a,b), $a\in A$ şi $b\in B$.

$$A\times B=\{(a,b)|a\in A \text{ si } b\in B\} \tag{7}$$

Exemplu: $A=\{0,2,4,6,8\}$ şi $B=\{1,2,3,4\}$

$$A\cup B=\{0,1,2,3,4,6,8\}$$
$$A\cap B=\{2,4\}$$
$$A-B=\{0,6,8\}$$
$$B-A=\{1,3\}$$
$$A\Delta B=\{0,1,3,6,8\}$$

$$A\times B=\begin{Bmatrix}(0,1),(0,2),(0,3),(0,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),\\(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(8,1),(8,2),(8,3),(8,4)\end{Bmatrix}$$

Proprietățile operațiilor cu mulțimi:

1. Reuniunea, intersecția şi diferența simetrică sunt comutative:

$$A\cup B=B\cup A,\qquad A\cap B=B\cap A,\qquad A\Delta B=B\Delta A \tag{8}$$

Diferența şi produsul cartezian nu sunt comutative.

2. Reuniunea, intersecția şi diferența simetrică sunt asociative:

$$\begin{gathered}(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)\\(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)\\(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)\end{gathered} \tag{9}$$

3. Intersecția este distributivă față de reuniune:

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C) \tag{10}$$

4. Reuniunea este distributivă față de intersecție:

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C) \tag{11}$$

O mulțime este *finită* dacă are un număr finit de elemente. Mulțimea locuitorilor oraşului Timişoara este finită. *Cardinalul* unei mulțimi finite reprezintă numărul elementelor din acea mulțime. Vom nota cu $cardA$, cardinalul mulțimii *A*.

Proprietăți:

1. $card(A\cup B)=cardA+cardB-card(A\cap B)$ (12)

2. $card(A\cup B\cup C)=cardA+cardB+cardC-card(A\cap B)-card(B\cap C)-card(A\cap C)+$
$+card(A\cap B\cap C)$ (13)

3. $card(A-B)=cardA-card(A\cap B)$ (14)

4. $card(A\times B)=cardA\cdot cardB$ (15)

Exemplu: In anul întâi sunt în total 25 de studenți. 14 dintre ei s-au înscris la cursul de matematică, 12 studenți sau înscris la cursul de chimie, iar 13 au participat la cursul de fizică generală. 6 dintre ei s-au înscris şi la chimie şi la fizica, 5 s-au înscris şi la chimie şi la matematică, 7 s-au înscris şi la fizică şi la matematică, iar 2 studenți s-au înscris la toate cele trei cursuri. Câți studenți nu s-au înscris la nici un curs?

Reprezentăm prin diagrame mulțimea M a studenților care s-au înscris la cursul de matematică, respectiv mulțimile C şi F ale studenților care s-au înscris la chimie, respectiv fizică. Din enunț rezultă că:

$$cardM = 14 \qquad cardC = 12 \qquad cardF = 13$$
$$card(M \cap C \cap F) = 2$$
$$card(F \cap C) = 6 \qquad card(C \cap M) = 5 \qquad card(F \cap M) = 7$$

$$card(M \cup C \cup F) = cardM + cardC + cardF - card(M \cap C) - card(C \cap F) - card(M \cap F) + \\ + card(M \cap C \cap F)$$

$$card(M \cup C \cup F) = 14 + 12 + 13 - 5 - 6 - 7 + 2 = 23$$

În concluzie, doi studenți nu s-au înscris la nici unul din cele trei cursuri.

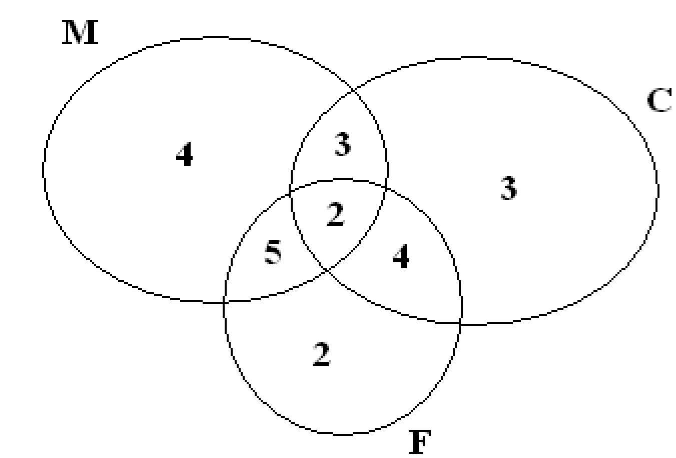

Figura 1.4 Diagrama mulțimilor pentru exemplu.

Numărul submulțimilor unei mulțimi cu n elemente este 2^n.

Exemplu: Submulțimile mulțimii cu trei elemente $\{a,b,c\}$ sunt:

$$\varnothing,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a,b\},\ \{b,c\},\ \{a,c\},\ \{a,b,c\}$$

O mulțime este *infinită* dacă nu este finită. Mulțimea numerelor naturale $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$ este infinită.

Fie A şi B două mulţimi. Spunem că există o *corespondenţă unu-la-unu* între A şi B dacă fiecare element din A este asociat cu un element din B astfel încât:

(i) elemente distincte din A sunt asociate cu elemente distincte din B

(ii) fiecare element din B este în corespondenţă cu un element din A.

In această situaţie spunem că mulţimile A şi B sunt *echivalente* şi scriem $A \approx B$.

O mulţime infinită se spune că este *numărabilă* dacă poate fi pusă în corespondenţă unu-la-unu cu mulţimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale. Orice mulţime infinită conţine o submulţime numărabilă.

Mulţimea numerelor raţionale este numărabilă, iar mulţimea numerelor reale nu are această proprietate.

1.2 *Numere reale*

Numerele $\ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ +1,\ +2,\ldots$ se numesc numere întregi.

Numerele raţionale se scriu ca o fracţie de forma $\pm\frac{p}{q}$, unde p şi q sunt numere întregi pozitive $p \ge 0$ şi $q > 0$. Toate numerele raţionale pot fi scrise, în urma unui proces de împărţire, în formă de fracţie zecimală:

$$\frac{p}{q} = \alpha_0.\alpha_1\alpha_2\ldots \tag{16}$$

unde α_0 este un întreg pozitiv şi $\alpha_k\,(k = 1,2,\ldots)$ sunt cifre zecimale. Fracţia zecimală din dreapta relaţiei (16) se numeşte *reprezentare zecimală* a numărului raţional p/q. Reprezentarea zecimală poate fi pusă sub forma unei serii infinite:

$$\alpha_0 + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{10^i}$$

Reprezentarea zecimală a unui număr raţional poate fi una *finită*:

$$\frac{p}{q} = \alpha_0.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m = \alpha_0.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m 00\ldots \qquad (\alpha_m > 0) \tag{17}$$

sau una *infinită periodică*:

$$\frac{p}{q} = \alpha_0.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\beta_1\ldots\beta_k\beta_1\ldots\beta_k\ldots = \alpha_0.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m(\beta_1\ldots\beta_k) \tag{18}$$

Incepând cu poziția $m+1$, un bloc finit de cifre $\beta_1\ldots\beta_k$ se repetă la infinit şi nu toate cifrele β_j sunt nule.

Prima formă cea finită, poate fi redusă la cea de-a doua impunând:

$$\frac{p}{q} = \alpha_0.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m-1}(\alpha_m - 1)99\ldots \tag{19}$$

De exemplu, $0.5 = 0.4(9)$
$3.175 = 3.174(9)$
$1.0 = 0.(9)$

Pentru a demonstra ultima egalitate, se foloseşte seria numită *progresie geometrică*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n = \frac{aq}{1-q}, \quad |q| < 1$$

$$0.(9) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10^n} \quad \text{deci } a = 9 \text{ şi } q = \frac{1}{10} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10^n} = \frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}} = 1$$

Pe lângă fracțiile zecimale periodice există şi fracții zecimale infinite neperiodice, de exemplu:

$0.1010010001\ldots$, $0.121122111222\ldots$, $\sqrt{2} = 1.41\ldots$ şi numărul π.

Definiție: Prin număr *irațional* înțelegem o fracție zecimală infinită neperiodică arbitrară

$$a = \alpha_0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$$

unde α_0 este un întreg pozitiv şi $\alpha_k(k = 1,2,\ldots)$ sunt cifre zecimale.

Reuniunea numerelor raționale şi iraționale formează mulțimea *numerelor reale*. Prin convenție, mulțimea numerelor naturale, întregi, raționale şi reale se notează cu $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ şi $\mathbb{R}$ respectiv.

Proprietățile numerelor reale

Mulțimea numerelor reale este o mulțime ordonată de relația <, care are următoarele proprietăți.

I. *Proprietăți de ordine*:

I.1. Pentru orice pereche de numere reale *a* şi *b* are loc una şi numai una din relațiile:

$$a = b, \qquad a < b \quad \text{şi} \quad a > b$$

I.2. Dacă $a < b$ şi $b < c$, atunci $a < c$ (tranzitivitatea relației exprimate prin simbolul $<$)

I.3. Dacă $a < b$, atunci există un număr *c* astfel încât $a < c < b$.

Pe mulțimea numerelor reale, sunt definite operațiile de adunare şi înmulțire astfel încât fiecărei perechi de numere reale i se asociază în mod unic numerele reale numite sumă şi produs.

II. *Proprietățile operațiilor de adunare şi scădere:*

II.1. $a + b = b + a$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ comutativitate

II.2. $(a + b) + c = a + (b + c)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ asociativitate

II.3. $a + 0 = a$, $\forall a \in \mathbb{R}$ element neutru

II.4. $a + (-a) = 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$

II.5. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ pentru oricare *c* real.

III. *Proprietățile operațiilor de înmulțire şi împărțire:*

III.1. $ab = ba$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ comutativitate

III.2. $(ab)c = a(bc)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ asociativitate

III.3. $a \cdot 1 = a$, $\forall a \in \mathbb{R}$ element neutru

III.4. $a \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = 1$, $a \neq 0$

III.5. $(a + b)c = ac + bc$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ distributivitate

III.6. $a < b$, $c > 0 \Rightarrow ac < bc$.

Valori absolute pentru numere reale

Fie a un număr real. Valoarea absolută sau modulul lui a este egal cu a dacă a este pozitiv şi este egal cu $-a$ dacă a este negativ. Valoarea absolută a lui zero este zero. Notăm valoarea absolută a lui a cu $|a|$ şi scriem

$$|a| = \begin{cases} a, a \geq 0 \\ -a, a < 0 \end{cases} \tag{20}$$

Inegalitatea $|a| < \varepsilon$ cu $\varepsilon > 0$, este echivalentă cu inegalităţile:

$$-\varepsilon < a < +\varepsilon \tag{21}$$

Inegalitatea $|a-b| < \varepsilon$ este echivalentă cu

$$\begin{gathered} -\varepsilon < a-b < +\varepsilon \\ b-\varepsilon < a < b+\varepsilon \end{gathered} \tag{22}$$

Proprietăţi:

1. $|a| \geq 0$ (23)
2. $|a| = |-a|$ (24)
3. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ (25)
4. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0$ (26)
5. $|a+b| \leq |a| + |b|$ (27)

Intr-adevăr,

$$-|a| \leq a \leq |a|$$
$$-|b| \leq b \leq |b|$$
$$-(|a|+|b|) \leq a+b \leq |a|+|b|$$

6. $||a|-|b|| \leq |a-b|$ (28)

Intr-adevăr,

$$|a| = |(a-b)+b| \leq |a-b| + |b|$$

$$|a| - |b| \le |a - b|$$

$$|b| = |(b - a) + a| \le |b - a| + |a| = |a - b| + |a|$$

$$-|a - b| \le |a| - |b|$$

$$-|a - b| \le |a| - |b| \le |a - b|$$

$$\big||a| - |b|\big| \le |a - b|$$

Bibliografie

1.M.Krasnov, A.Kiselev, G.Makarenko, E.Shikin, *Mathematical Analysis for Engineers* (MIR, Moscow 1989).

2.Elemente de analiza matematica, clasa a XI-a, Mircea Ganga, Editura Mathpress 2005.

3.Matematica M1. Manual pentru clasa a XI-a, Marcel Tena, Dinu Serbanescu, Marian Andronache, Editura Art, 2010