Curs Recapitulativ

Ecuatiile diferentiale ale fizicii matematice

Partea I Serii

O *serie* este o suma care are un numar infinit de termeni:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1.1)$$

Suma primilor *n* termeni din serie se numeste *a n-a sumă parţială* a seriei si o notam S_n :

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad (1.2)$$

Suma unei serii infinite de termeni este definita cel mai bine prin considerarea *sumei partiale* a primilor *n* termeni, S_n. Daca valoarea sumei partiale S_n tinde la o limita finita, *S*, atunci cand *n* tinde la infinit, spunem ca seria este *convergenta* si *suma* sa este limita *S*. Cu alte cuvinte,

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n \qquad (1.3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \qquad (1.4)$$

Dacă limita $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ nu există sau este infinită, atunci seria este *divergentă* şi *nu are sumă*.

Exemplu: seria cunoscută ca *progresie geometrică* cu raţia *q*:

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}, \qquad a \in \mathbb{R}^* \qquad (1.5)$$

A n-a sumă parţială a seriei este:

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1}$$

$$= a\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}, \qquad q \neq 1 \qquad (1.6)$$

- Dacă $|q|<1$, atunci $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ şi astfel:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}\right) = \frac{a}{1-q}$$

Adică seria este convergentă şi suma sa este $\frac{a}{1-q}$ sau

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q} \qquad (1.7)$$

Test *necesar* pentru convergenţa seriilor numerice: Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă, atunci:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Exista cateva criterii de convergenta pentru serii cu termeni pozitivi (curs1). Redau mai jos unul dintre ele, foarte popular:

Test D'Alembert: (Testul D'Alembert pentru convergenţa unei serii) Considerăm seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cu $a_n > 0$. Dacă:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda \qquad (1.8)$$

atunci pentru $0 \le \lambda < 1$ seria este convergentă, şi pentru $\lambda > 1$ seria este divergentă. Dacă $\lambda = 1$, atunci nu se ştie natura seriei.

Exemplu: Examinaţi convergenţa seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

$$a_n = \frac{n^2}{2^n} \qquad a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2 2^n}{2^{n+1}n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=\frac{1}{2}<1$$

Cu testul D’Alembert seria este convergentă.

Seria

$$f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x) \qquad (1.9)$$

a cărui termeni $f_n(x)$, $n=1,2,\ldots$, sunt funcţii definite pe o mulţime reală $E\subset\mathbb{R}$, se numeşte *serie de funcţii*.

Seria de funcţii (1.9) este *convergentă* în punctul $x_0\in E$, dacă seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x_0)$ este convergentă.

Dacă seria de funcţii (1.9) este convergentă $\forall x\in D\subseteq E$, atunci se spune că seria (1.9) este *simplu convergentă* pe *D*, şi *D* se numeşte *mulţime de convergenţă* a seriei.

Exemplu: Determinaţi intervalul de convergenţă al seriei $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}ne^{nx}$

Considerăm seria:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}ne^{nx}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}ne^{nx} \qquad (1.10)$$

Deoarece termenii sunt pozitivi, vom aplica de exemplu, testul D’Alembert:

$$\lambda=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)e^{(n+1)x}}{ne^{nx}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)e^{x}}{n}=e^x$$

Seria (2.2) va fi convergentă dacă $e^x<1$, adică $x<0$. În consecinţă seria este absolut convergentă pe intervalul $(-\infty,0)$. Pentru $x\geq 0$ seria este divergentă.

Dintre seriile de functii cele mai importante sunt seriile de puteri si seriile de functii trigonometrice.

O serie de forma:

$$c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n \qquad (1.11)$$

sau:

$$c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots + c_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n \qquad (1.12)$$

unde $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ sunt coeficienţi constanţi, se numeşte *serie de puteri* în *x*, respectiv în $x - x_0$.

Pentru o serie de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ care este convergentă în mai mult decât $x = 0$, există un număr $R > 0$ pozitiv şi unic astfel încât seria este absolut convergentă pentru $|x| < R$ şi divergentă pentru $|x| > R$.

Mulţimea de *convergenţă absolută* a seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ este intervalul $(-R, +R)$.

Seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ cu $x_0 \neq 0$ are aceeaşi rază de convergenţă ca şi seria $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, dar intervalul de convergenţă este $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Raza de convergenţă pentru seriile $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$, $x_0 \neq 0$ poate fi calculată cu formulele:

$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} \qquad (1.13)$$

$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} \qquad (1.14)$$

Exemplu: Determinaţi intervalul de convergenţă pentru seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^n}(x+2)^n$

$$c_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^n} \qquad c_{n+1} = \frac{(-1)^n}{(n+1)2^{n+1}}$$

$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{\left| \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^n} \right|}{\left| \frac{(-1)^n}{(n+1)2^{n+1}} \right|} = \lim_{n \to \infty} 2\frac{n+1}{n} = 2$$

$R=2$, seria este absolut convergentă pe $(-4,0)$. Examinăm si convergenţa seriei la capetele intervalului.

$x=-4 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}(-2)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergentă

$x=0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}(2)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ semiconvergentă

Intervalul de convergenţă este $(-4,0]$.

Serii Taylor

Fie $f(x)$ o funcţie care are derivate de orice ordin în $x=x_0$, adică există $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $\ldots$, $f^{(n)}(x_0),\ldots$.

Definiţie: Seria de puteri de forma:

$$f(x)= f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\ldots$$
$$\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (1.15)$$

se numeşte *serie Taylor* a funcţiei $f(x)$ în punctul x_0.

$x_0=0 \Rightarrow$ *serie Maclaurin* a funcţiei $f(x)$ în punctul $x_0=0$:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad (1.16)$$

O lista de serii populare:

$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$ pentru $-\infty<x<+\infty$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots \text{ pentru } -\infty<x<+\infty$$

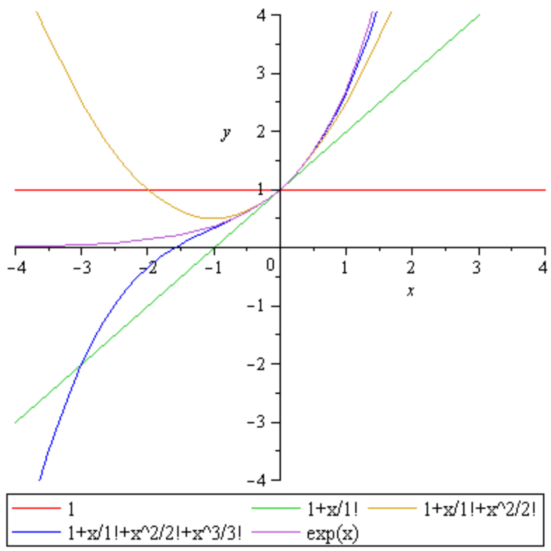
$$arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots \text{ pentru } -1<x<+1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots \text{ pentru } -\infty < x < +\infty$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \text{ pentru } -1 < x \le 1$$

$$(1+x)^n = 1 + nx + n(n-1)\frac{x^2}{2!} + n(n-1)(n-2)\frac{x^3}{3!} + \ldots \text{pentru} -1 < x < +1$$

Pentru functia e^x reprezentam grafic functia si aproximarile acesteia realizata cu un termen, doi termeni, trei termeni din seria Taylor:



Exemple:

1. Dezvoltaţi funcţia $\frac{1}{4-x}$ într-o serie de puteri în $x-2$ cu $x_0 = 2$

Aplicam algoritmul de dezvoltare in serie, avem nevoie de derivatele functiei:

$$f(x) = \frac{1}{4-x} \qquad f(2) = \frac{1}{4-2} = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{(4-x)^2}(-1) = \frac{1}{(4-x)^2} \qquad f'(2) = \frac{1}{(4-2)^2} = \frac{1}{4}$$

$$f''(x) = -2\frac{1}{(4-x)^3}(-1) = \frac{2}{(4-x)^3} \qquad f''(2) = \frac{2}{(4-2)^3} = \frac{1}{4}$$

$$f'''(x) = -6\frac{1}{(4-x)^4}(-1) = \frac{6}{(4-x)^4} \qquad f'''(2) = \frac{6}{(4-2)^4} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{1}{4-x}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{4}\frac{(x-2)^2}{2!}+\frac{3}{8}\frac{(x-2)^3}{3!}+\dots$$

$$\frac{1}{4-x}=\frac{1}{2}+\frac{x-2}{2^2}+\frac{(x-2)^2}{2^3}+\frac{(x-2)^3}{2^4}+\dots$$

2. *Erorile de aproximare cu serii Taylor*

   Am vazut cum sa dezvoltam o functie $f(x)$ intr-o serie de puteri infinita, serie care este exact egala cu $f(x)$ $\forall x$ din intervalul de convergenta al seriei. Dar, in fizica nu ne dorim sume cu un numar infinit de termeni, ci preferam sa folosim doar un numar finit de termeni din seriile Taylor pentru a *aproxima* o functie intr-un anumit domeniu al valorilor lui *x*. In acest caz, este de dorit sa stim care este eroarea posibila maxima asociata cu aproximarea facuta.

   Asa cum am vazut, cu relatia

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2}f''(x_0)+\dots+\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0)+R_n(x)$$

o functie $f(x)$ poate fi reprezentata cu o serie finita de puteri de ordinul $n-1$ impreuna cu un termen ce constitue restul.

$$R_n(x)=\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(\xi)$$

si ξ necunoscut se afla in intervalul $[x_0,x]$. $R_n(x)$ este termenul rest si reprezinta eroarea in aproximarea lui $f(x)$ cu seria finita de puteri de ordinul $n-1$ de mai sus. Deoarece valoarea exacta a lui ξ care satisfice expresia lui $R_n(x)$ este necunoscuta, o limita superioara a erorii poate fi gasita prin derivarea lui $R_n(x)$ in raport cu ξ si egalarea derivatei cu zero pentru a determina maximul.

Exemplu: Dezvoltati functia $f(x)=\cos x$ in serie Taylor in jurul lui $x=0$ si gasiti eroarea asociata cu folosirea aproximarii la evaluarea lui $\cos(0.5)$ daca se retin numai primii doi termeni nenuli. (Observatie: Dezvoltarile Taylor pentru functiile trigonometrice sunt valabile numai pentru unghiuri exprimate in radiani.)

Evaluam functia si derivatele sale in $x=0$:

$$f(0)=\cos 0=1$$
$$f'(0)=-\sin 0=0$$
$$f''(0)=-\cos 0=-1$$
$$f'''(0)=\sin 0=0$$

Astfel, pentru $|x|$ mic, gasim ca:

$$\cos x \approx 1-\frac{x^2}{2}$$

Deoarece $\cos x$ este functie para, dezvoltarea in serie de puteri contine numai puteri pare ale lui *x*. Atunci, pentru a estima eroarea in aceasta aproximatie, trebuie sa consideram termenul in x^4, care este urmatorul in serie. Derivata necesara este $f^{(4)}(x)$ si este egala cu $\cos x$. Astfel, adaugam la aproximatia facuta termenul rest $R_4(x)$,

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}\cos\xi$$

unde ξ se afla in $[0,x]$. Astfel, cea mai mare eroare posibila este $x^4/4!$, deoarece $\cos\xi$ nu depaseste valoarea unu. Daca $x=0.5$, considerand numai primii doi termeni $\cos(0.5)\approx 0.875$ cu o eroare prezisa mai mica decat 0.0026. Cum $\cos(0.5)=0.87758$, la aceasta acuratete, erorea reala este 0.00258, adica o eroare de 0.3%.

3. Estimati $\sqrt{26}$ folosind primii trei termeni dintr-o dezvoltare in serie Taylor pentru functia $\sqrt{x}$ in jurul lui $x_0=25$.

Serii Fourier

Dacă o funcţie periodică $f(x)$ cu perioada 2π este *monotonă pe porţiuni* şi *mărginită* pe intervalul $[-\pi,\pi]$, atunci seria sa Fourier este convergentă în fiecare punct al intervalului. Suma seriei:

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right) \qquad (1.17)$$

Cu coeficientii:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad n=0,1,2,\ldots \qquad (1.18)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx \qquad n = 1,2,\dots \tag{1.19}$$

verifică relatiile:

- $S(x) = f(x)$ în punctele de continuitate a lui $f(x)$ din $(-\pi,+\pi)$.
- $S(x) = \frac{1}{2}\left(f(x+0) + f(x-0)\right)$ în punctele de discontinuitate a lui $f(x)$ din $(-\pi,+\pi)$.
- $S(-\pi) = S(\pi) = \frac{1}{2}\left(f(-\pi+0) + f(\pi-0)\right)$ (1.20)

Exemple: 1.Funcţia $f(x) = \pi - x$ cu perioada 2π, îndeplineşte pe intervalul $[-\pi,+\pi]$, condiţiile din teoremă şi poate fi dezvoltată în serie Fourier.

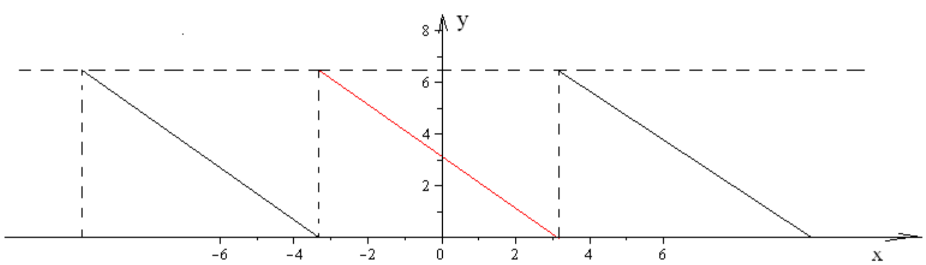


Figura 1

Determinăm coeficienţii Fourier integrând prin părţi:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)\,dx = -\left.\frac{(\pi - x)^2}{2\pi}\right|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)\cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)\,d\left(\frac{\sin nx}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}(\pi - x)\left.\frac{\sin nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\, dx =$$

$$= -\left.\frac{\cos nx}{\pi n^2}\right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\cos(-n\pi) - \cos n\pi}{\pi n^2} = 0 \qquad n = 1,2,\dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)\sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)\,d\left(-\frac{\cos nx}{n}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi}(\pi - x)\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{2\pi}{\pi n}\cos(-n\pi) - \frac{1}{\pi n^2}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{n}\cos n\pi = 2\frac{(-1)^n}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Seria Fourier a funcţiei date este:

$$\pi - x = \pi + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n}, \qquad x \in (-\pi, \pi)$$

La capetele intervalului $[-\pi, \pi]$, în $x = -\pi$ şi $x = \pi$ care sunt discontinuităţi de speţa întâi, suma seriei este: $S(-\pi) = S(\pi) = \frac{2\pi + 0}{2} = \pi$

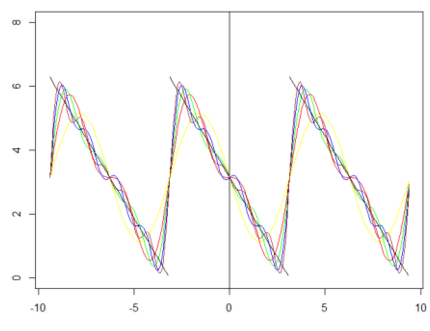


Figura 2

Intr-un punct de discontinuitate, reprezentarea Fourier a functiei se va abate de la valoarea functiei. Desi pe masura ce luam in considerare tot mai multi termeni din serie, abaterea se va deplasa intr-o pozitie apropiata de discontinuitate, aceasta abatere nu va disparea nici la limita unui numar infinit de termeni.

2.Dezvoltaţi funcţia $f(x) = x^2$ în serie Fourier pe intervalul $[-\pi, \pi]$.

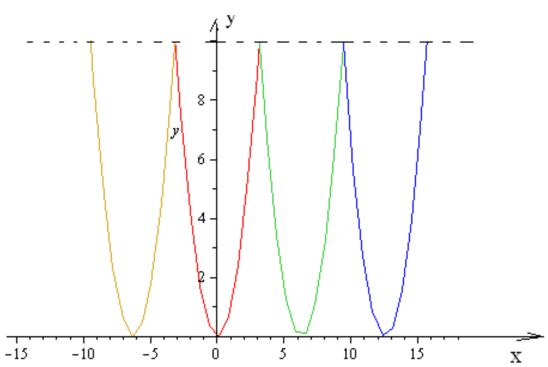


Figura 3

Funcţia este monotonă pe porţiuni şi mărginită şi este o funcţie *pară*. Atunci seria Fourier are forma:

$$x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

Determinăm coeficienţii Fourier:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^2$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx\ dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 d\left(\frac{\sin nx}{n}\right) =$$
$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2 \sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x \sin nx\ dx\right) =$$
$$= \frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} xd\left(\frac{\cos nx}{n}\right) = \frac{4}{n\pi}\left(x\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right) =$$
$$= \frac{4}{\pi n^2}\pi \cos n\pi = \frac{4}{n^2}(-1)^n, \qquad n = 1, 2, \ldots \text{n}$$

Seria Fourier pentru funcţia dată este:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}$$
$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \ldots\right)$$

Relaţia (4.22) are loc $\forall x \in [-\pi, \pi]$, şi în $x = \pm\pi$ suma seriei coincide cu valorile funcţiei. Graficul funcţiei şi cel al sumei seriei coincid.

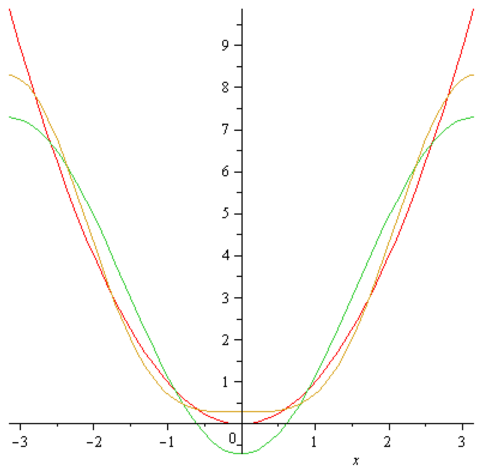


Figura 4

În figura 4 am reprezentat primele două sume parţiale s_1 şi s_2 care aproximează destul de bine funcţia.

Observaţie: Această serie Fourier permite determinarea sumelor unor serii numerice convergente. De exemplu, pentru $x=0$, avem

$$0=\frac{\pi^2}{3}-4\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\dots\right)$$

$$\frac{\pi^2}{12}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\dots \tag{1.21}$$

Pentru $x=\pi$, avem

$$\pi^2=\frac{\pi^2}{3}-4\left(-\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}-\dots\right)$$

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\dots \quad \text{sau} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6} \tag{1.22}$$

Fie $f(x)$ o funcţie cu perioada $2l,\ l\neq 0$.

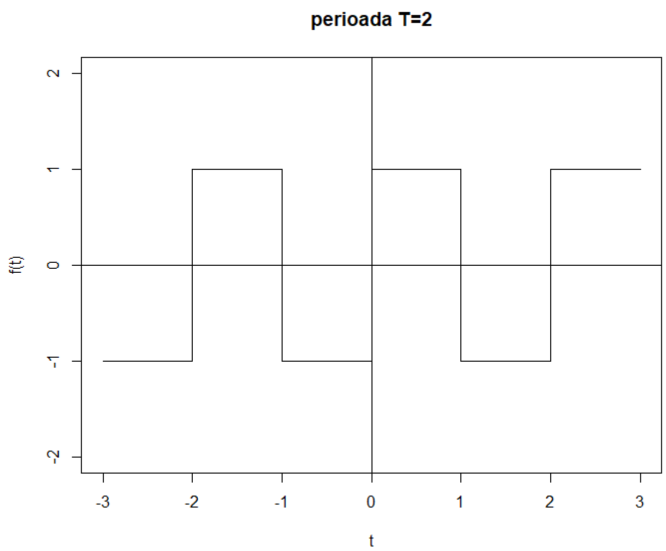
$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{1.23}$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\quad n=0,1,2,\dots \tag{1.24}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx\,,\quad n = 1,2,\ldots \qquad (1.24)$$

Exemplu: Dezvoltati unda patrata ca o serie Fourier. Fizic, aceasta unda poate reprezenta inputu-ul intr-un circuit electric care face trecerea intre doua stari cu o perioada T. Unda patrata poate fi reprezentata matematic:

$$f(t) = \begin{cases} -1, & -\frac{1}{2}T \le t < 0 \\ +1, & 0 \le t < \frac{1}{2}T \end{cases}$$



Pentru a determina coeficientii seriei Fourier observam ca functia este impara si seria va contine numai termeni cu sinusuri. Determinam coeficiantii sinusurilor :

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)dt = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2}\sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)dt =$$

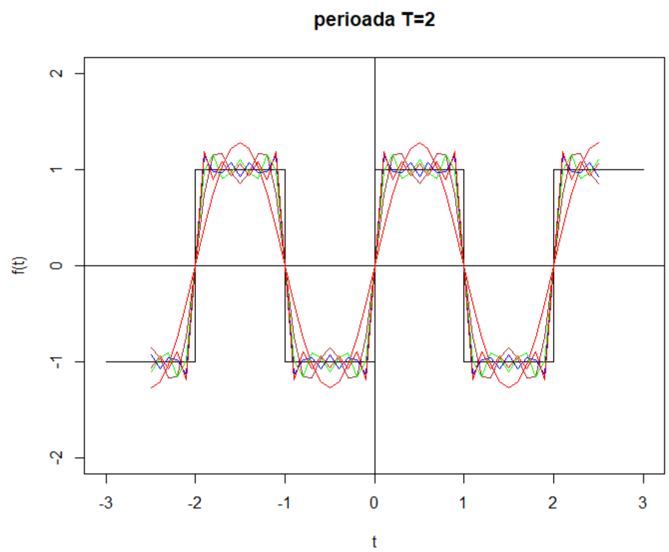
$$= \frac{4}{T}\left(-\frac{\cos\frac{2n\pi t}{T}}{\frac{2n\pi}{T}}\right)\Bigg|_0^{T/2} = -\frac{4}{T}\frac{T}{2n\pi}\left(\cos(n\pi)-1\right) = \frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)$$

$$b_n = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \frac{4}{n\pi}, & n \text{ impar} \end{cases}$$

Deci, coeficientii pari sunt nuliiar cei impari sunt $4/n\pi$. Seria Fourier pentru functia unda patrata se poate scrie:

$$f(t)=\frac{4}{\pi}\left(\sin\omega t+\frac{\sin 3\omega t}{3}+\frac{\sin 5\omega t}{5}+\dots\right)$$

unde, $\omega=2\pi/T$ se numeste frecventa unghiulara.



Prima suma partiala sau prima armonica $4/\pi\sin\omega t$ reprezentata cu rosu are frecventa undei patrate.

Seriile Fourier pot fi scrise si in forma complexa, mai compacta:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{inx} \tag{1.25}$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx\,,\qquad n=0,\pm1,\pm2,\dots \tag{1.26}$$

Exemplu: Dezvoltaţi într-o serie Fourier complexă funcţia periodică:

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0\\ 1, & 0\le x<\pi\end{cases} \qquad T=2\pi$$

Funcţia îndeplineşte condiţiile de dezvoltare în serie Fourier.

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-inx}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{in}e^{-inx}\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{1}{2\pi ni}\left(1-e^{-in\pi}\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi ni}\left(1-\cos n\pi+i\sin n\pi\right)=\frac{i}{2\pi n}\left((-1)^n-1\right)$$

$$c_n=\begin{cases}0, & n \text{ par}\\ -\dfrac{i}{\pi n}, & n \text{ impar}\end{cases}$$

$$c_{2n-1}=-\frac{i}{\pi(2n-1)}$$

$$f(x)=-\frac{i}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i(2n-1)x}}{2n-1}, \qquad x\in(-\pi,0)\cup(0,\pi) \qquad S(0)=\frac{1}{2}$$