Curs Recapitulativ

Ecuatiile diferentiale ale fizicii matematice

Partea II Ecuatii Diferentiale

O ecuatie diferentiala este o ecuatie in care necunoscutele sunt functii de una sau mai multe variabile si contin atat functiile cat si derivatele acestora. Fizic, sunt relatii intre cantitati si ratele lor de modificare in timp, spatiu sau alta variabila independenta pe care o introducem. Daca functiile necunoscute sunt functii de o singura variabila, atunci ecuatiile diferentiale sunt *ordinare*, iar daca functiile necunoscute sunt functii de mai multe variabile ecuatiile diferentiale sunt cu *derivate partiale*.

O derivata reprezinta rata de modificare instantanee a unei cantitati cu timpul sau cu spatiul:

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y} \qquad\qquad \frac{dy}{dx} = y'$$

O ecuaţie diferenţială *ordinară* este o ecuaţie de tipul:

$$F\left(x, y, y', \cdots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{1}$$

care pune în relaţie o variabilă independentă *x*, funcţia necunoscută $y = y(x)$ şi derivatele acesteia $y'(x), y''(x), \cdots, y^{(n)}(x)$. În acest context, *F* este o funcţie cunoscută de argumentele sale. Variabila independenta o notam cu *x* dar adesea o notam si cu *t* in special atunci cand vrem sa gandim ecuatia noastra ca ar descrie evolutia in timp a unei cantitati fizice.

Definiţie: *Ordinul* unei ecuaţii diferenţiale este ordinul cel mai mare al derivatelor prezente în ecuaţie.

Exemplu: Ecuaţia $y'' + y = 0$ este o ecuaţie diferenţială de ordinul doi.
Funcţia $y(x) = \sin x$ este o soluţie a acestei ecuaţii diferenţiale pe intervalul $(-\infty, +\infty)$

Definiţii:

- Rezolvarea unei ecuaţii diferenţiale se numeşte *integrarea* ecuaţiei diferenţiale.

- Graficul unei soluţii a unei ecuaţii diferenţiale se numeşte *curbă integrală* a ecuaţiei.

Fie $F(x, y, y') = 0$ o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi. Dacă este rezolvabilă în y', obţinem o altă formă a ecuaţiei:

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

unde $f(x, y)$ este o funcţie cunoscută în argumentele sale.

O altă formă echivalentă a ecuaţiei este:

$$dy - f(x, y)dx = 0 \tag{3}$$

sau, mai general, punand pe pozitie de egalitate variabila independenta *x* si variabila dependenta *y* , obtinem forma simetrica a ecuatiei diferentiale:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{4}$$

Vom vedea ca ecuatiile diferentiale ajung intr-o astfel de forma inainte de integrare.

Această ecuaţie este obţinută din precedenta prin înmulţire cu o funcţie $N(x, y) \neq 0$. Funcţiile $M(x, y)$ şi $N(x, y)$ sunt funcţii cunoscute.

In general, o ecuaţie diferenţială are o infinitate de soluţii. Pentru a preciza o anumită soluţie a ecuaţiei $y' = f(x, y)$ trebuie să impunem o *condiţie iniţială*, adică să presupunem că la o anumită valoare x_0 a variabilei x funcţia căutată ia o anumită valoare y_0:

$$y\big|_{x=x_0} = y_0 \quad \text{sau} \quad y(x_0) = y_0 \tag{5}$$

Geometric, condiţia iniţială implică precizarea unui punct $M_0(x_0, y_0)$ prin care va trece curba integrală căutată.

Definiţie: Problema determinării acelei soluţii a ecuaţiei $y' = f(x, y)$ care verifică condiţia suplimentară $y(x_0) = y_0$, se numeşte *problemă Cauchy* sau *problemă iniţială*.

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{6}$$

Ecuaţii cu variabile separate

Au forma generală:

$$f_1(y)dy = f_2(x)dx \qquad (7)$$

cu $f_1(y)$ şi $f_2(x)$ funcţii continue cunoscute. Prin integrare obţinem:

$$\int f_1(y)dy = \int f_2(x)dx + C$$

Exemplu: $ydy = -xdx$

Integrăm ambele părţi ale relaţiei şi găsim integrala generală a ecuaţiei diferenţiale date:

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = C$$

Ecuaţii cu variabile separabile

Au forma generală:

$$f_1(x)\varphi_1(y)dx = f_2(x)\varphi_2(y)dy \qquad (8)$$

Coeficienţii diferenţialelor pot fi factorizaţi în factori ce depind doar de *x* sau doar de *y*. Prin împărţire cu $\varphi_1(y)\,f_2(x) \neq 0$, ecuaţia se reduce la una cu variabile separate:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy$$

Exemplu: Integraţi ecuaţia: $\left(1+y^2\right)x\ dx = \left(1+x^2\right)y\ dy$

Împărţim ecuaţia cu $\left(1+y^2\right)\left(1+x^2\right) \neq 0$

$$\frac{x}{1+x^2}dx = \frac{y}{1+y^2}dy \quad \Rightarrow \quad \int \frac{x}{1+x^2}dx = \int \frac{y}{1+y^2}dy + C$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) = \frac{1}{2}\ln\left(1+y^2\right) + C$$

$$\frac{1+x^2}{1+y^2} = C$$

Observaţii: Impărţirea cu $\varphi_1(y)\,f_2(x) \neq 0$ poate conduce la o pierdere de soluţii, soluţii care fac $\varphi_1(y)f_2(x)$ zero.

Exemplu: Integraţi ecuaţia: $xdy = ydx \quad |: xy \neq 0$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \ln|x| + \ln|C| \quad \Rightarrow \quad \ln|y| - \ln|C| = \ln|x| \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{|y|}{|C|} = \ln|x|$$

$$\Rightarrow \quad \frac{|y|}{|C|} = |x| \quad \Rightarrow \quad |y| = |Cx| \quad \Rightarrow \quad y = \pm Cx \quad \Rightarrow \quad y = Cx$$

unde constanta C poate avea valori pozitive, negative, dar nenule. Împărţind ecuaţia cu y am pierdut soluţia $y = 0$, soluţie care poate fi inclusă în soluţia generală $y = Cx$ dacă permitem lui C să ia şi valoarea zero.

Integrati ecuatia: $\frac{dy}{dx} = x(y-1)$

$$\frac{dy}{y-1} = xdx$$

$$\int \frac{dy}{y-1} = \int xdx \quad \Rightarrow \quad \ln|y-1| = \frac{x^2}{2} + C \quad \Rightarrow \quad |y-1| = e^{\frac{x^2}{2}+C}$$

$$|y-1| = e^C e^{\frac{x^2}{2}} \quad \Rightarrow \quad |y-1| = Ce^{\frac{x^2}{2}} \quad \Rightarrow \quad y-1 = \pm Ce^{\frac{x^2}{2}} \quad y-1 = Ce^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y(x) = 1 + Ce^{\frac{x^2}{2}}$$

Integrati ecuatia: $\frac{dy}{dx} = 2x(1-y)^2$

$$\frac{dy}{(1-y)^2} = 2xdx$$

$$\int \frac{dy}{(1-y)^2} = 2\int xdx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1-y} = x^2 + C \quad \Rightarrow \quad y(x) = 1 - \frac{1}{x^2 + C}$$

Observam ca $y(x) = 1$ este este solutia pierduta prin impartirea cu $(1-y)^2$ si nu se afla in solutia parametrizata.

Observatie: Cea mai importanta ecuatie cu variabile separabile este: $\dot{y} = ky$ cu k o constanta nenula.

$$\frac{dy}{dt} = ky \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = kdt \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = kt + C \quad \Rightarrow \quad |y| = e^{kt+C} \quad \Rightarrow \quad y(t) = Ce^{kt}$$

Exemplu:

$$\left(1+y^2\right)\left(e^{2x}dx-e^y dy\right)-\left(1+y\right)dy=0$$

$$\left(1+y^2\right)e^{2x}dx=\left(1+y^2\right)e^y dy+\left(1+y\right)dy$$

$$e^{2x}dx=\left(e^y+\frac{1+y}{1+y^2}\right)dy$$

$$\int e^{2x}dx=\int e^y dy+\int\frac{1}{1+y^2}dy+\int\frac{y}{1+y^2}dy$$

$$\frac{1}{2}e^{2x}=e^y+arctg\ y+\frac{1}{2}\ln\left(1+y^2\right)+C$$

In cele ce urmeaza ne ocupam de ecuatii diferentiale liniare, de ordinul intai.

Definiţie: O *ecuaţie diferenţială liniară de ordinul întâi* este o ecuaţie liniară în funcţia necunoscută $y=y(x)$ şi în derivata sa dy/dx. În general o astfel de ecuaţie are forma:

$$A(x)\frac{dy}{dx}+B(x)y=f(x) \qquad (9)$$

unde coeficienţii $A(x)$, $B(x)$ şi $f(x)$ sunt funcţii definite pe un interval (α,β). Dacă $f(x)=0$, ecuaţia se numeşte *omogenă*. În caz contrar, *neomogenă*.

Presupunem că $A(x)\neq 0$, şi împărţim ecuaţia (5.27) cu $A(x)$:

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x) \qquad (10)$$

În această ecuaţie $p(x)=B(x)/A(x)$ şi $q(x)=f(x)/A(x)$.

□ Integrare prin metoda variaţiei de constantă

O ecuaţie diferenţială liniară *omogenă*, corespunzătoare ecuaţiei (5.28), are forma:

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0 \qquad (11)$$

Această ecuaţie se integrează separând variabilele:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C|$$

$$y(x) = Ce^{-\int p(x)dx} \qquad (12)$$

Formula (12) reprezintă *soluţia generală* pentru ecuaţia (11) în banda $a < x < b$, $-\infty < y < +\infty$.

Ecuaţia liniară neomogenă (10) poate fi integrată folosind *metoda variaţiei de constantă*. Aceasta constă în următoarele:
Mai întâi integrăm ecuaţia omogenă:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0,$$

a cărei soluţie, stim deja, este:

$$y(x) = Ce^{-\int p(x)dx}$$

unde C este o constantă arbitrară.
Apoi, facem constanta C functie, $C \to C(x)$, si căutăm o soluţie pentru ecuaţia neomogenă sub forma:

$$y(x) = C(x)e^{-\int p(x)dx} \qquad (13)$$

unde $C(x)$ este o nouă funcţie necunoscută.

Calculăm derivata funcţiei (13) şi o substituim împreună cu funcţia în ecuaţia neomogenă (10):

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \qquad (10)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dC}{dx}e^{-\int p(x)dx} + C(x)e^{-\int p(x)dx}\left(-p(x)\right)$$

Înlocuim in ecuaţia (10):

$$\frac{dC}{dx}e^{-\int p(x)dx}+C(x)e^{-\int p(x)dx}\left(-p(x)\right)+p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx}=q(x)$$

$$\frac{dC}{dx}+C(x)\left(-p(x)\right)+p(x)C(x)=q(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$\frac{dC}{dx}=q(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$dC=q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

$$C(x)=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C \qquad (14)$$

unde C este o constantă de integrare.
Atunci:

$$y(x)=C(x)e^{-\int p(x)dx}$$

$$y(x)=\left(C+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right)e^{-\int p(x)dx}$$

$$y(x)=Ce^{-\int p(x)dx}+e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx \qquad (15)$$

Aceasta este *soluţia generală* a ecuaţiei diferenţiale liniare neomogene (10). Se observă că soluţia generală pentru ecuaţia liniara si neomogena (10) este suma soluţiei generale a ecuaţiei omogene (11) şi a soluţiei particulare pentru ecuaţia neomogenă (10) care rezultă din (15) pentru $C=0$, adică:

$$y_{gen.neomogena}=y_{gen.omogena}+y_{partic.neomogena} \qquad (16)$$

Exemplu 1: Integraţi ecuaţia diferenţială liniară:

$$\frac{dy}{dx}+y\cos x=2\cos x$$

Rezolvam ecuatia omogena:

$$\frac{dy}{dx}+y\cos x=0 \qquad \frac{dy}{y}=-\cos x\,dx \qquad \ln|y|=-\sin x+\ln|C|$$

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\sin x \qquad \left|\frac{y}{C}\right| = e^{-\sin x} \qquad y(x) = Ce^{-\sin x}$$

Pentru a rezolva ecuatia neomogena, aplicam variatia de constanta:

$$y(x) = C(x)e^{-\sin x}$$

$$\frac{dC(x)}{dx}e^{-\sin x} + C(x)e^{-\sin x}\cdot(-\cos x) + C(x)e^{-\sin x}\cdot\cos x = 2\cos x$$

$$\frac{dC(x)}{dx}e^{-\sin x} = 2\cos x \qquad dC(x) = 2\cos x\, e^{\sin x}dx$$

$$C(x) = 2\int\cos x\, e^{\sin x}dx \qquad C(x) = 2e^{\sin x} + C$$

$$y(x) = Ce^{-\sin x} + 2$$

Observăm că 2 este o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene.

Exemplul 2: Integraţi ecuaţia diferenţială liniară:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$$

Desigur are forma generala: $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$

Incepem cu rezolvarea ecuatiei *omogene*:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0 \qquad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \qquad \ln|y| = \ln|x| + \ln|C|$$

$$y(x) = Cx \quad \text{soluţia generală a ecuaţiei omogene}$$

Căutăm soluţia ecuaţiei *neomogene* cu metoda *variaţiei de constantă*:

$$y(x) = C(x)x$$

$$\frac{dC(x)}{dx}x + C(x) - \frac{1}{x}C(x)x = x$$

$$\frac{dC(x)}{dx}x = x \qquad dC(x) = dx$$

$$C(x) = x + C$$

Deci, soluţia generală a ecuaţiei neomogene este: $y(x) = (x + C)x$

$$y(x) = Cx + x^2$$

Observăm că x^2 este o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene.

Observaţie: Dacă soluţia particulară a ecuaţiei liniare neomogene poate fi ghicită, atunci căutarea soluţiei generale este mult simplificată.

Exemplu 3: $y' + y = x + 3$

Rezolvam ecuatia *omogena*:

$$\frac{dy}{dx} + y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = -x + C$$

$$|y| = e^{-x+C} \quad \Rightarrow \quad |y| = e^C e^{-x} \quad \Rightarrow \quad |y| = Ce^{-x}$$

$y = \pm Ce^{-x} \quad \Rightarrow \quad y(x) = Ce^{-x}$ solutia gen. Ec. omogena

Cautam solutia ecuatiei *neomogene* in forma:

$$y(x) = C(x)e^{-x}$$

$$\frac{dC(x)}{dx}e^{-x} + C(x)e^{-x}(-1) + C(x)e^{-x} = x + 3$$

$$\frac{dC(x)}{dx}e^{-x} = x + 3 \qquad dC(x) = (x + 3)e^{x}dx$$

$$\int dC(x) = \int (x+3)e^x dx \qquad \int dC(x) = \int xe^x dx + 3\int e^x dx$$

$$\int dC(x) = \left(xe^x - \int e^x dx\right) + 3\int e^x dx \qquad C(x) = xe^x + 2e^x + C$$

$$y(x) = \left(xe^x + 2e^x + C\right)e^{-x}$$

$$y(x) = Ce^{-x} + x + 2$$

Observvăm că $x+2$ este o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene.

Ecuatii diferentiale de ordinul doi

O ecuaţie diferenţială de ordinul *doi*, rezolvată în derivata cea mai mare, are forma

$$y^{(2)} = f(x, y, y') \qquad (1)$$

Pentru a obţine o soluţie particulară a acesteia, trebuie să precizăm *doua* condiţii initiale sau conditii la limita:

$$y\big|_{x=x_0} = y_0, \qquad y'\big|_{x=x_0} = y'_0 \qquad (2)$$

unde y_0, y'_0, …, $y_0^{(n-1)}$ sunt numere reale.

Problema Cauchy constă în determinarea soluţiei ecuaţiei diferenţiale (1) care satisface condiţiile iniţiale (2).

O ecuaţie diferenţială *liniară* şi *omogenă* de ordinul doi are forma:

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \qquad (3)$$

unde $p_1(x)$, $p_2(x)$ sunt funcţii continue pe un interval $[a,b]$ şi sunt cunoscute. Ecuaţia este liniară în funcţia necunoscută $y(x)$ şi în derivatele acesteia.

O ecuaţie diferenţială liniară omogenă cu coeficienţi constanţi de ordinul doi are forma:

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0 \qquad (4)$$

unde p_1 şi p_2 sunt numere reale. Pentru a determina soluţia generală a ecuaţiei, trebuie să găsim *două soluţii particulare liniar independente* ale acesteia. Căutăm aceste soluţii de forma:

$$y(x) = e^{\lambda x}, \quad \lambda = \text{constantă}$$

Derivăm această funcţie şi o substituim în ecuaţia diferenţială (4):

$$e^{\lambda x}\left(\lambda^2 + p_1\lambda + p_2\right) = 0$$

Deoarece exponenţiala este nenulă, polinomul în λ din paranteză trebuie să fie nul. În consecinţă, funcţia $y(x) = e^{\lambda x}$, este soluţie a ecuaţiei diferenţiale numai dacă λ este rădăcină a polinomului din paranteză, numit *polinom caracteristic,*

$$\lambda^2 + p_1\lambda + p_2 = 0 \qquad (5)$$

Această ecuaţie se numeşte *ecuaţie caracteristică* în raport cu ecuaţia diferenţială (4). Vom nota cu λ_1 şi λ_2 *rădăcinile polinomului caracteristic*. Acestea pot fi: (1) reale şi distincte (2) complexe (3) reale şi egale.
Considerăm separat fiecare caz:

(1) Dacă rădăcinile λ_1 şi λ_2 sunt reale şi distincte, atunci soluţiile particulare pentru ecuaţia (4) vor fi:

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \quad \text{şi} \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x} \qquad (6)$$

Aceste soluţii sunt liniar independente şi formează un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţie. Soluţia generală va fi de forma combinatii liniare ca in teorema de structura:

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \qquad (7)$$

cu C_1 şi C_2 constante arbitrare.

Exemple: 1) Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei: $y'' - 3y' + 2y = 0$

Rezolvăm mai întâi ecuaţia caracteristică:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 2$$

Soluţia generală va fi o combinaţie liniară de exponenţiale:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

2) Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei: $y'' - 7y' + 12y = 0$

Rezolvăm mai întâi ecuaţia caracteristică:

$$\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$$

$$\lambda_1 = 3 \qquad \lambda_2 = 4$$

Soluţia generală va fi o combinaţie liniară de exponenţiale:

$$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}$$

(2) Dacă rădăcinile λ_1 şi λ_2 sunt complexe, deoarece coeficienţii p_1 şi p_2 sunt reali, rădăcinile λ_1 şi λ_2 sunt complex conjugate, adică: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ şi $\lambda_2 = \alpha - i\beta$.
Soluţiile particulare ale ecuaţiei diferenţiale pot fi scrise în forma:

$$\tilde{y}_1(x) = e^{(\alpha+i\beta)x} \qquad \text{şi} \qquad \tilde{y}_2(x) = e^{(\alpha-i\beta)x} \tag{8}$$

Acestea sunt funcţii cu valori complexe. Ne-am dori soluţii reale. Pentru aceasta ne vom folosi de relaţiile Euler:

$$e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x$$
$$e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i\sin\beta x$$

Cu acestea, putem reprezenta soluţiile particulare în forma:

$$\tilde{y}_1(x) = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$$

$$\tilde{y}_2(x) = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$$

Atat partea reală cat şi partea imaginară a acestor solutii, sunt soluţii particulare pentru ecuaţia diferenţială (4). Atunci

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x \quad \text{şi} \quad y_2(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x \qquad (9)$$

sunt soluţii si sunt liniar independente deoarece

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = tg(\beta x) \neq \text{ ct}$$

Cum aceste soluţii sunt liniar independente, formează un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţie. Soluţia generală va fi de forma:

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x \qquad (10)$$

Exemplu: Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei:

1. $y'' + 2y' + 5y = 0$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_1 = -1 + 2i \qquad \lambda_2 = -1 - 2i$$

$$\alpha = -1 \qquad \beta = 2$$

$$y(x) = C_1 e^{-x}\cos 2x + C_2 e^{-x}\sin 2x$$

2. $y'' - 4y' + 13y = 0$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$$

$$\lambda_1 = 2 + 3i \qquad \lambda_2 = 2 - 3i$$

$$\alpha = 2 \qquad \beta = 3$$

$$y(x) = C_1 e^{2x}\cos 3x + C_2 e^{2x}\sin 3x$$

(3) Presupunem radăcinile polinomului caracteristic reale si egale $\lambda_1 = \lambda_2$.
O soluţie particulară a ecuatiei (4) este $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$
Cea de-a doua soluţie trebuie să fie liniar independentă cu prima şi o căutăm în forma:

$$y_2(x) = e^{\lambda_1 x} \cdot u(x) \tag{11}$$

cu $u(x)$ noua necunoscută. Aceasta formă a soluţiei secunde împreună cu derivatele sale le înlocuim în ecuaţia (4).

$$y_2'(x) = \lambda_1 e^{\lambda_1 x} \cdot u(x) + e^{\lambda_1 x} \cdot u'(x)$$

$$y_2''(x) = \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} \cdot u(x) + \lambda_1 e^{\lambda_1 x} \cdot u'(x) + \lambda_1 e^{\lambda_1 x} \cdot u'(x) + e^{\lambda_1 x} \cdot u''(x)$$

$$e^{\lambda_1 x}\left(\lambda_1^2 u + 2\lambda_1 u' + u'' + p_1\lambda_1 u + p_1 u' + p_2 u\right) = 0$$

$$e^{\lambda_1 x}\left[u'' + (2\lambda_1 + p_1)u' + \left(\lambda_1^2 + p_1\lambda_1 + p_2\right)u\right] = 0$$

Cum λ_1 este radăcina dublă a polinomului caracteristic, avem:

$$\lambda_1^2 + p_1\lambda_1 + p_2 = 0 \quad \text{si} \quad 2\lambda_1 + p_1 = 0$$

Atunci, ecuaţia a cărui soluţie trebuie să fie funcţia necunoscută $u(x)$ este: $u'' = 0$.
Cu două integrari succesive obţinem:

$$u' = A \qquad u = Ax + B$$

Consideram $A=1$, $B=0$. Atunci, $u(x) = x$ şi a doua soluţie particulară este:

$$y_2(x) = e^{\lambda_1 x} \cdot x \tag{12}$$

Cu două soluţii liniar independente determinate, care formează un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţie, soluţia generală va fi de forma:

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x} \tag{13}$$

Exemple: Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei:

1. $y'' + 2y' + y = 0$.

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

Rădăcina dublă a acestui polinom este $\lambda_1 = -1$.

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$$

2. $y'' - 4y' + 4y = 0$.

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

Rădăcina dublă a acestui polinom este $\lambda_1 = 2$.

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$$

Ecuaţii diferenţiale liniare omogene cu coeficienţi constanţi de ordinul doi sunt importante in toata fizica!

Exemplu: Pendulul simplu se supune aproximativ unei miscari armonice.
Pendulul simplu este un corp cu masa agatat de un cablu fara masa care oscileaza in plan vertical.
Fie *l* lungimea cablului si fie $\theta(t)$ unghiul pe care cablul il face cu verticala (vezi figura) Atunci forta gravitationala ce actioneaza asupra corpului cu masa *m* in directie tangentiala este $-mg\sin\theta$.
Masa punctiforma executa o traiectorie pe un arc de cerc de raza *l*, parametrizata de unghiul θ. Viteza tangenta la cerc este $l\dot{\theta}$ si acceleratia este $l\ddot{\theta}$. Legea lui Newton $F = ma$ pe directie tangentiala se scrie:

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$$

Componenta radiala a gravitatiei echilibreaza tensiunea din cablu si ecuatia radiala $F = ma$ serveste doar la calcularea tensiunii din cablu.

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} = -\omega_0^2 \sin\theta \ , \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

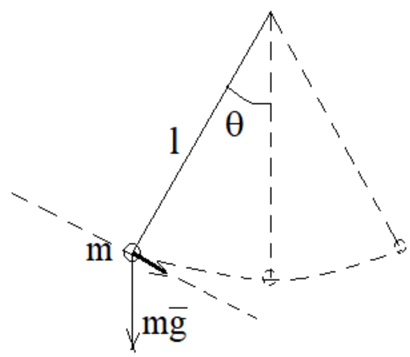

Figura 2 Pendul matematic

Ecuatia $\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \sin\theta$ neliniara, de ordinul doi, este ecuatia pendulului matematic. Descrie oscilatiile pendulului in jurul echilibrului $\theta = 0$. Daca presupunem ca oscilatiile sunt mici, $\theta \ll 1$, atunci putem aproxima $\sin\theta \approx \theta$ si transformam ecuatia diferentiala in una liniara:

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \theta$$

Aceasta este faimoasa ecuatie a unei oscilatii armonice simple care descrie miscarea unui pendul perturbat usor.

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$$

$$\theta(t) = C_1 \cos\omega_0 t + C_2 \sin\omega_0 t$$

$$\theta(t) = A\cos\phi\cos\omega_0 t - A\sin\phi\sin\omega_0 t = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

Viteza este $\dot{\theta}(t) = -A\omega\sin(\omega_0 t + \phi)$

Constantele A si ϕ pot fi fixate din conditii initiale:

$$\theta(0) = \theta_0 \ \text{ si } \ \dot{\theta}(0) = \Omega_0$$

Astfel pendulul are o miscare oscilatorie armonica cu frecventa $\omega_0 = \sqrt{g/l}$. Daca t creste cu $2\pi/\omega_0$, atunci argumentul lui cosinus creste cu 2π si pozitia si viteza pendulului revin la valorile avute. Perioada sau timpul necesar unei oscilatii complete este $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$. Miscarea reala este arbitrar de apropiata de aceasta pentru amplitudini suficient de mici.

In multe ocazii in fizica, in urma unor calcule, ajungem la o ecuatie de tipul $\ddot{z} + \omega^2 z = 0$, unde ω^2 este o cantitate pozitiva ce depinde de parametrii din problema. Cand intalnim aceasta ecuatie suntem ff fericiti, pentru ca fara efort putem scrie solutia $z(t) = A\cos(\omega t + \phi)$. Oricat de complicat ar fi sistemul, stim ca miscarea acestuia este armonica simpla cu o frecventa egala cu radicalul coeficientului lui z, oricare ar fi acesta , daca este pozitiv si are dimensiunea timp la puterea -2.