Set Probleme 9

1. Scrieţi numerele complexe în formă trigonometrică şi exponenţială:

$$z=-2 \qquad z=2i \qquad z=-i \qquad z=-3+\sqrt{3}i$$

2. Scrieţi în formă algenrică:

a) $\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ b) $4e^{i\frac{\pi}{2}}$ c) $2e^{4\pi i}$ d) $e^{1+i\frac{\pi}{2}}$

3. Calculaţi $z_a=(1+i)^2$ şi $z_b=(1+i)^{10}$ folosind forma algebrică a numerelor complexe şi folosind forma exponenţială a numerelor complexe.

4. Calculaţi: $(2-2i)^7$, $\left(\sqrt{3}-3i\right)^6$

5. Calculaţi rădăcinile: $\sqrt[4]{1}$, $\sqrt[4]{-i}$, $\sqrt[3]{-27}$, $\sqrt{2-2\sqrt{3}i}$

6. Schiţaţi mulţimile definite de următoarele relaţii şi stabiliţi dacă sunt deschise, închise, mărginite sau simplu conexe:

   a) $|z|<2$ b) $|z+3|<2$ c) $0<|z-1|<2$

7. Determinaţi partea reală şi partea imaginară a funcţiilor:

$$w=z^2+i \qquad w=\frac{1}{z} \qquad w=\frac{\bar{z}}{z}$$

8. Folosind condiţiile Cauchy-Riemann, determinaţi dacă funcţiile sunt analitice în cel puţin un punct:

$$w=|z|\operatorname{Re} z \qquad w=e^{z^2}$$

9. Determinaţi partea reală şi imaginară a funcţiilor:

a) $w=e^{-z}$ b) $w=\sin z$ c) $w=ch(z-i)$ d) $w=tgz$

R: a) $u=e^{-x}\cos y \quad v=-e^{-x}\sin y$ b) $u=\sin x\cdot ch\, y \quad v=sh\, y\cdot\cos x$

c) $u=ch\, x\cdot\cos(y-1) \quad v=sh\, x\cdot\sin(y-1)$ d) $u=\dfrac{\sin x\cos x}{ch^2 y-\sin^2 x} \quad v=\dfrac{shychy}{ch^2 y-\sin^2 x}$

10. Determinaţi modulul şi valoarea principală a argumentului funcţiei date în punctul z_0.

$w=ze^z$, $z_0=i\pi$ R: $|w(z_0)|=\pi$, $\arg\left(w(z_0)\right)=-\dfrac{\pi}{2}$

11. Aratati cu definitia ca functia $f(z)=z^2+z$ este diferentiabila in oricare $z\in\mathbb{C}$ planului complex.