Set Probleme 8

I. Cu metoda variaţiei constantelor a lui Lagrange, rezolvaţi ecuaţiile diferenţiale liniare neomogene:

1. $xy'' + y' = x^2$ $\quad R: y(x) = \frac{x^3}{9} + C_1 \ln x + C_2$
2. $x^2 y'' - xy' = 3x^3$ $\quad R: y(x) = x^3 + C_1 x^2 + C_2$
3. $y'' + y = tgx$ $\quad R: y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right|$
4. $(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = (2x+1)^2$ $\quad R: y(x) = C_1 x + C_2 e^{-2x} + x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

III. Integraţi următoarele ecuaţii diferenţiale cu metoda variaţiei constantelor, ştiind că ecuaţia omogenă admite soluţiile indicate.

1. $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 2x^2 e^x$, $\quad y_1(x) = x^2 e^x \quad y_2(x) = e^x$

$$R: y(x) = C_1 x^2 e^x + C_2 e^x + \frac{2}{3} x^3 e^x$$

2. $(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 2(x^2+1)^2 e^x$ $\quad y_1(x) = x \quad y_2(x) = x^2 - 1$

$$R: y(x) = C_1 x + C_2 (x^2 - 1) + 2(x-1)^2 e^x$$

IV. Găsiţi soluţiile generale pentru ecuaţiile diferenţiale neomogene cu coeficienţi constanţi:

1. $y''' + y'' + y' + y = xe^x$

$$R: y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x + \left(\frac{1}{4}x - \frac{3}{8}\right)e^x$$

2. $y'' + 2y' + 2y = e^x \sin x$

$$R: y(x) = C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \sin x + \frac{1}{8} e^x (\sin x - \cos x)$$

3. $y'' + y = \sin x - \cos x$

$$R: y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2} x (\cos x + \sin x)$$

4. $y^{(4)} - 2y^{(3)} + y'' = x^3$

$$R: C_1 + C_2 x + C_3 e^x + C_4 x e^x + x^2\left(\frac{1}{20}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x + 12\right)$$

V. Fie $z = 1 + 2i$ şi $w = 2 - i$. Calculaţi:

a) $z + 3w$ b) $\bar{w} - z$ c) z^3 d) $z^2 + \bar{z} + i$ e) $\operatorname{Re}\left(w^2 + w\right)$

VI. Calculaţi modulul şi conjugatul numerelor complexe:

a) $-2 + i$ b) $(2 + i)(4 + 3i)$ c) $\dfrac{3 - i}{\sqrt{2} + 3i}$

VII. Calculaţi modulul şi argumentul principal al numerelor complexe:

$z = 4 + 3i$ $z = -2 + 2\sqrt{3}i$ $z = -7 - i$ $z = 4 - 3i$