

## Set Probleme 6

I. Să se determine soluțiile ecuațiilor diferențiale liniare:

$$1. y' + \frac{2}{x}y = x^3$$

$$R: y(x) = C \frac{1}{x^2} + \frac{x^4}{6}$$

$$2. y' - y \operatorname{tg} x = \cos x$$

$$R: y(x) = \frac{C}{\cos x} + \frac{x}{2 \cos x} + \frac{\sin x}{2}$$

$$3. y' - 2xy = x - x^3$$

$$R: y(x) = Ce^{x^2} + \frac{x^2}{2}$$

$$4. y' - \frac{2x-1}{x^2}y = 1$$

$$R: y(x) = Cx^2e^{\frac{1}{x}} + x^2$$

$$5. (1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$$

$$R: y(x) = C(1+x^2) + x(1+x^2)$$

II. Integrați ecuațiile diferențiale Bernoulli:

$$1. y' + \frac{1}{x}y = -xy^2$$

$$R: y(x^2 + Cx) = 1, C \in \mathbb{R}$$

$$2. 2xyy' - y^2 + x = 0$$

$$R: y^2 = x \ln \left| \frac{C}{x} \right|, C \in \mathbb{R}$$

$$3. 3xy' - y(1 + x \sin x - 3y^3 \sin x) = 0$$

$$R: y^3(3 + Ce^{\cos x}) = x, C \in \mathbb{R}$$

$$4. y' + 2y = y^2e^x$$

$$R: y(e^x + Ce^{2x}) = 1, C \in \mathbb{R}$$

III. Să se verifice dacă următoarele ecuații sunt cu diferențiale totale exacte și în caz afirmativ să se rezolve:

$$1. (x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy = 0$$

$$R: x^2 + \frac{x^3}{3} + y^2x = C, C \in \mathbb{R}$$

$$2. (x^3 + xy^2)dx + (x^2y + y^3)dy = 0$$

$$R: x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = C, C \in \mathbb{R}$$

$$3. \frac{x}{y^2}dx + \frac{y^2 - x^2}{y^3}dy = 0$$

$$R: \frac{1}{2} \frac{x^2}{y^2} + \ln|y| = C, C \in \mathbb{R}$$

$$4. (3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$$

$$R: x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$$

$$5. (x^3 - 3xy^2 + 2)dx - (3x^2y - y^2)dy = 0$$

$$R: \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2 + 2x + \frac{y^3}{3} = C$$

$$6. 3x^2(1 + \ln y)dx + \left( \frac{x^3}{y} - 2y \right)dy = 0$$

$$R: x^3(1 + \ln y) - y^2 = C$$

IV Să se rezolve următoarele ecuații diferențiale Riccati, știind că admit soluțiile particulare indicate:

$$\begin{aligned} 1. \quad y' - y^2 - \frac{y}{x} + 9x^2 &= 0 & y_1 &= 3x & R: y(x) &= 3x + \frac{6x}{6Ce^{-3x^2} - 1} \\ 2. \quad y' - y^2 - y \operatorname{ctg} x + \sin^2 x &= 0 & y_1 &= \sin x & R: y(x) &= \sin x + \frac{2 \sin x}{2Ce^{2 \cos x} - 1} \\ 3. \quad x^2 y' + x^2 y^2 + xy - 4 &= 0 & y_1 &= \frac{2}{x} & R: y(x) &= \frac{2}{x} + \frac{4}{4Cx^5 + x} \\ 4. \quad y' + y^2 \sin x &= \frac{2 \sin x}{\cos^2 x} & y_1 &= \frac{1}{\cos x} & R: y(x) &= \frac{1}{\cos x} + \frac{3 \cos^2 x}{3C + \cos^3 x} \end{aligned}$$