Set Probleme 14

1. Rezolvaţi problema Cauchy:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad t > 0, \quad -\infty < x < \infty$$

$$u\big|_{t=0} = \sin x, \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \qquad -\infty < x < \infty$$

2. Rezolvaţi problema Cauchy:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad t > 0, \quad -\infty < x < \infty$$

$$u\big|_{t=0} = 0, \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \sin x, \qquad -\infty < x < \infty$$

3. Cu metoda Fourier de separare a variabilelor, rezolvati problema mixta:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad t > 0, \ \ 0 < x < l$$

$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = 0 \ , \ \ t \geq 0$$

$$u\big|_{t=0} = \sin \frac{3\pi}{l} x \qquad 0 \leq x \leq l$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \qquad 0 \leq x \leq l$$

R: $u(x,t) = \sin \frac{3\pi}{l} x \cos \frac{3\pi a}{l} t$

4. Capetele unei bare de lungime $l = \pi$ sunt menţinute la temperatură zero. Temperatura iniţială este dată de funcţia:

$$u(x,0)=2\sin 3x$$

Determinaţi temperatura barei la orice moment de timp $t>0$.

R: $u(x,t)=2e^{-9a^2t}\sin 3x$

5. Capetele unei bare de lungime l sunt menţinute la temperatură zero. Temperatura iniţială în bară este:

$$u(x,0)=3\sin\frac{\pi x}{l}-5\sin\frac{2\pi x}{l}$$

Determinaţi temperatura barei la orice moment de timp $t>0$.

R: $u(x,t)=3e^{-\frac{a^2\pi^2}{l^2}t}\sin\frac{\pi x}{l}-5e^{-\frac{4a^2\pi^2}{l^2}t}\sin\frac{2\pi x}{l}$

6. Analiza racirii unei bare omogene de lungime l, de la o temperatura initiala constanta. Presupunem ca initial distributia de temperatura in bara este constanta $\varphi(x)=u_0$. Capetele barei sunt mentinute la temperatura nula.
   a. Determinati distributia temperaturii in bara $u(x,t)$
   b. Scrieti explicit seria obtinuta păstrând doar primii doi termeni din dezvoltare.
   c. Arătaţi ca primul termen domină suma calculând raportul $\frac{|al\ doilea\ termen|}{|primul\ termen|}$. Recomandare : utilizaţi: $|\sin nx|\le|\sin x|$
   d. Aproximaţi soluţia cu primul termen din seria soluţie exactă şi calculaţi temperatura aproximativă în centrul barei $x=\frac{l}{2}$ la momentul $t=\left(\frac{l}{\pi a}\right)^2$
   e. Reprezentaţi grafic soluţia (folosind forma aproximativa) $u(x,t_0)$ pentru trei momente t_0 succesive şi $u(x_0,t)$ pentru trei poziţii x_0 diferite din bara.
   f. Determinaţi soluţia staţionară (independenta de timp) a problemei.

R: a) $u(x,t)=\frac{4u_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n-1)\pi x}{l}}{2n-1}e^{-\left(\frac{(2n-1)\pi a}{l}\right)^2t}$ c) raport cerut $\le e^{-8}$ pentru $t\ge\left(\frac{l}{\pi a}\right)^2$ d) $\approx 0.47u_0$

7. O placa metalica rectangulara ocupa domeniul $0 \le x < \infty$ si $0 \le y \le b$ in planul *xy*. Temperatura la capatul de la infinit al placii si pe marginile lungi este fixata la $0^{\circ}C$. Daca temperatura placii la $x = 0$ este si aceasta fixata si este data de o functie $f(y)$, aflati distributia stationara de temperatura $u(x, y)$ in placa. Gasiti distributia de temperatura daca $f(y) = u_0$, unde u_0 este o constanta. Obs: regim stationar inseamna $\partial u / \partial t = 0$.

$$\text{R:} \qquad u(x,y) = \sum_{n\ \text{impar}} \frac{4u_0}{n\pi} e^{-\frac{n\pi x}{b}} \sin\frac{n\pi y}{b}$$