Set Probleme 12

1. Folosind reziduurile evaluaţi integralele:

a) $\displaystyle\int_{C(0,3)} \frac{dz}{(z+4)(z^2+1)}$ b) $\displaystyle\int_{C(0,3)} \frac{e^z dz}{z^3+z}$

R: $a) -\frac{2\pi i}{17}$ b) $\pi i\left(2-e^{-i}-e^{i}\right)$

2. Să se reprezinte printr-o formulă integrală Fourier funcţia:

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & |x|<n\pi \\ 0, & |x|>n\pi\end{cases}$$

R: $f(x)=\dfrac{2(-1)^n}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin\omega n\pi}{\omega^2-1}\sin\omega x\, d\omega$

3. Determinaţi transformata Fourier a funcţiei puls triunghiular:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<-1 \\ x+1, & x\in(-1.0) \\ -x+1, & x\in(0,1) \\ 0, & x>1\end{cases}$$

R: $\sqrt{\dfrac{8}{\pi}}\dfrac{\sin^2\frac{\omega}{2}}{\omega^2}$

4. Determinaţi transformata Fourier a funcţiei descrestere exponentiala:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0 \\ e^{-ax}, & x>0\end{cases},\quad a>0$$

R: $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,(\omega i+a)}$

5. Calculati transformata Fourier a functiei ce descrie doua fante de grosime 2b centrate in punctele de coordonate –a si +a (a>b pozitive), adica:

$$f(x)=\begin{cases}1, & -a-b\le x\le -a+b \\ 1, & a-b\le x\le a+b \\ 0, & \text{in rest}\end{cases}$$

R: $F(\omega)=\frac{4\cos(\omega a)\sin(\omega b)}{\omega\sqrt{2\pi}}$

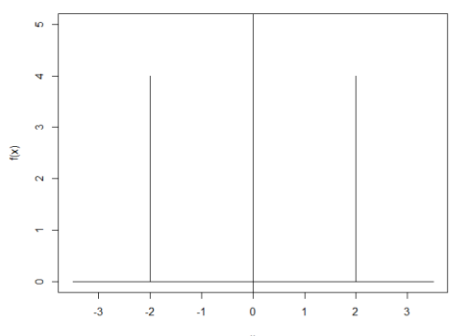
6. Functia δ este diferita de majoritatea functiilor din fizica. Poate fi vizualizata ca un varf (puls) foarte inalt si ingust. Proprietatile functiei δ a lui Dirac sunt:

   $\delta(x)=0$ pentru $x\neq 0$ si $\delta(x-a)=0$ pentru $x\neq a$

   $\int f(x)\delta(x-a)dx = f(a)$ cu conditia ca domeniul de integrare sa contina pe a. Daca nu integrala este nula.

   $\int_{-a}^{b}\delta(x)dx=1$, $\forall a,b>0$

   Calculati transformata Fourier a doua functii δ in $x=\pm a$ (in figura $a=2$)
   $f(x)=\delta(x+a)+\delta(x-a)$



R: $\frac{2\cos(\omega a)}{\sqrt{2\pi}}$

7. Calculati transformata Fourier a functiei rectangulare:

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<b\\ 0, & \text{in rest}\end{cases}$$

R: $\frac{2\sin(\omega b)}{\omega\sqrt{2\pi}}$

Obs: Rezultatele de la problemele 5,6 si 7 sunt in conformitate cu teorema de convolutie (Produsul de convolutie al functiilor de la exercitiile 6 si 7 este functia de la exercitiul 5 vezi cursul!)