Capitol 7 Funcţii de variabilă complexa

Bibliografie: Krasnov et al. (1989), Riley et al. (2006), Murray R. Spiegel (1999)

7.1 Numere complexe. Forma algebrică

Cea mai familiară formă a numerelor complexe este forma algebrică:

$$z = x + iy \tag{7.1}$$

unde x şi y sunt numere reale arbitrare iar i este unitatea imaginară astfel încât $i^2 = -1$. Numerele x şi y se numesc parte reală şi respectiv parte imaginară a numărului complex $z = x + iy$.

Notaţii: $x = \operatorname{Re} z \quad y = \operatorname{Im} z$

Două numere complexe $z_1 = x_1 + iy_1$ şi $z_2 = x_2 + iy_2$ sunt egale $z_1 = z_2$ dacă şi numai dacă $x_1 = x_2$ şi $y_1 = y_2$.

Operaţii cu numere complexe

a) *suma* numerelor complexe $z_1 = x_1 + iy_1$ şi $z_2 = x_2 + iy_2$ este numărul complex

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \tag{7.2}$$

Proprietăţi:

-comutativitate $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
-asociativitate $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$, $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

b) *produsul* numerelor complexe $z_1 = x_1 + iy_1$ şi $z_2 = x_2 + iy_2$ este numărul complex

$$z = z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \tag{7.3}$$

Proprietăţi:

-comutativitate $z_1 z_2 = z_2 z_1$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
-asociativitate $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$, $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$
-distributivitate $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$, $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

3) *raportul* numerelor complexe $z_1 = x_1 + iy_1$ şi $z_2 = x_2 + iy_2$, $z_2 \neq 0$, este numărul complex:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \tag{7.4}$$

Fie numărul $z = x + iy$. Atunci, $\bar{z} = x - iy$ este *conjugatul complex* al acestuia.

Proprietăţi:

1. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
2. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$
3. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$
4. $z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$

Obs: In mecanica cuantica o probabilitate *p* se calculeaza ca modulul patrat al unui anumit numar complex *A*: $p = |A|^2$. Numarul complex *A* se numeste amplitudine de probabilitate pentru *p*.

7.2 Forma trigonometrică şi exponenţială a numerelor complexe

Numărul complex $z = x + iy$ poate fi reprezentat în planul Cartezian *xOy* printr-un punct *M* cu coordonatele (x, y) sau prin vectorul de poziţie cu originea în $O(0,0)$ şi vârful în $M(x, y)$. Planul *xy* se numeşte *plan complex*. Axa *Ox* se numeşte *axă reală*, iar axa *Oy axă imaginară.* Reprezentarea în planul complex ne dă o interpretare geometrică pentru modulul numărului complex

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ca fiind lungimea vectorului ce reprezintă numărul complex $z = x + iy$.

$|z_1| < |z_2|$ înseamnă că z_1 este mai aproape de originea planului complex decât z_2.

Pentru a localiza punctul *M* în planul complex, este convenabil să utilizăm coordonatele polare (r, θ) cu *r* lungimea vectorului $\overrightarrow{OM}$ şi θ unghiul de la axa *Ox* la vectorul $\overrightarrow{OM}$, exprimat în radiani. *r* este pozitiv iar pentru θ există o infinitate de posibilităţi.

Formulele care convertesc coordonatele polare (r,θ) în coordonatele carteziene (x,y) ale punctului sunt:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \tag{7.5}$$

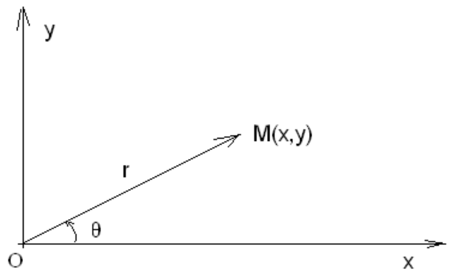

Figura 7.1 Coordonate polare.

Forma trigonometrică a numărului complex se obtine prin inlocuirea relatiilor precedente (7.5) in forma algebrica (7.1):

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad z \neq 0 \tag{7.6}$$

In acelasi timp, relatia (7.6) este si o reprezentare parametrică a cercului cu centrul in origine si raza *r*. Parametrul este $\theta \in [0, 2\pi)$.

Modulul şi *argumentul* numărului complex *z* sunt:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}} \geq 0 \tag{7.7}$$

$$\theta = Argz = \arg z + 2k\pi \qquad (k = 0, \pm1, \pm2, \ldots) \tag{7.8}$$

unde *arg z* este *argumentul principal*, valoarea unică a argumentului θ din intervalul $-\pi < \arg z \leq \pi$ cu:

$$\arg z = \begin{cases} arctg\,\dfrac{y}{x}, & x > 0 \\ \pi + arctg\,\dfrac{y}{x}, & x < 0, y \geq 0 \\ -\pi + arctg\,\dfrac{y}{x}, & x < 0, y < 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0 \end{cases} \tag{7.9}$$

Observaţie: Argumentul numărului complex $z=0$ este nedefinit, iar modulul acestuia este zero.

Numerele complexe z_1 şi z_2 sunt egale $\Leftrightarrow$ modulele celor două numere sunt egale iar argumentele acestora sunt fie egale fie diferă printr-un multiplu întreg de 2π, adică daca:

$$|z_1| = |z_2| \quad \text{şi} \quad Argz_1 = Argz_2 + 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z} \tag{7.10}$$

Exemple:

Calculaţi modulul şi argumentul numărului complex:

1) $z = -1 + i$

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$x = -1 < 0 \qquad y = 1 > 0$$

$$\arg z = \pi + arctg\,\frac{y}{x} = \pi + arctg\,(-1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$Argz = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\,,\quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Forma trigonometrică $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

2) $z = -1 + i\sqrt{3}$

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

$$x = -1 < 0 \qquad y = \sqrt{3} > 0$$

$$\arg z = \pi + arctg\,\frac{y}{x} = \pi + arctg\left(-\sqrt{3}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$Argz = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\,,\quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Forma trigonometrică $z = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

3) $z = -\sin\frac{\pi}{8} - i\cos\frac{\pi}{8}$

$$|z| = \sqrt{\sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8}} = 1$$

$$x = -\sin\frac{\pi}{8} < 0 \qquad y = -\cos\frac{\pi}{8} < 0$$

$$\arg z = -\pi + arctg\,\frac{y}{x} = -\pi + arctg\left(ctg\,\frac{\pi}{8}\right) = -\pi + arctg\left(tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\right) =$$

$$= -\pi + arctg\left(tg\,\frac{3\pi}{8}\right) = -\pi + \frac{3\pi}{8} = -\frac{5\pi}{8}$$

$$\Rightarrow \quad \arg z = -\frac{5\pi}{8} \qquad Argz = -\frac{5\pi}{8} + 2k\pi \,, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Forma trigonometrică: $z = \cos\left(-\frac{5\pi}{8}\right) + \sin\left(-\frac{5\pi}{8}\right)$

□ *Forma exponentiala* a numerelor complexe

In seria infinita:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

consideram $x = i\theta$

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \ldots$$

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \ldots\right)$$

Formula lui Euler

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta} \tag{7.11}$$

ne permite să scriem un număr complex $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ în *formă exponenţială*

$$z = re^{i\theta} \tag{7.12}$$

Ambele forme, trigonometrica si exponentiala, in alta interpretare, sunt o reprezentare parametrică a cercului cu centrul in origine si raza *r*. Parametrul θ ia valori de la zero la 2π.

Este de preferat să scriem numerele complexe în formă trigonometrică şi exponenţială atunci când dorim să înmulţim şi să împărţim numere complexe.

Dacă $z = re^{i\theta}$ Atunci: $z^{-1} = \left(re^{i\theta}\right)^{-1} = r^{-1}e^{i(-\theta)} = \frac{1}{r}\left(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right)$

Dacă $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ şi $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$ Atunci:

$$z_1z_2 = r_1e^{i\theta_1}r_2e^{i\theta_2} = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)} \tag{7.13}$$

Înmulţirea numerelor complexe presupune înmulţirea modulelor şi adunarea argumentelor.

$$|z_1z_2| = |z_1||z_2| \tag{7.14}$$

$$\arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \tag{7.15}$$

Dacă folosim doar argumente principale ultima relatie poate sa nu fie adevărată. De exemplu, dacă $z_1 = i$ şi $z_2 = -1$, produsul este $z_1 z_2 = -i$. $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$, $\arg(-1) = \pi$, $\arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$ dar $\arg(i) + \arg(-1) = \frac{3\pi}{2} \neq -\frac{\pi}{2}$. Valoarea obţinută prin sumarea argumentelor este un argument posibil pentru $-i$ dar nu este argumentul principal.

Impartirea numerelor complexe:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}, \quad r_2 \neq 0 \tag{7.16}$$

Împărţirea numerelor complexe presupune împărţirea modulelor şi scăderea argumentelor.

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \tag{7.17}$$

$$\arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 \tag{7.18}$$

Ridicarea la putere: Fie *z* un număr complex si

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{de\ n\ ori} \tag{7.19}$$

Dacă scriem *z* în formă trigonometrică şi exponenţială, atunci avem

$$z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$z^n = \left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \tag{7.20}$$

Dacă $r = 1$, vom obţine *Formula lui Moivre*

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \tag{7.21}$$

Radicalul unui număr complex

Definiţie: Numărul complex *w* se numeşte *rădăcina de ordinul n* a numărului complex *z*, dacă $w^n = z$ şi scriem $w = \sqrt[n]{z}$.

Pentru orice număr complex $z \neq 0$, rădăcina $w = \sqrt[n]{z}$ presupune *n* valori distincte. Intr-adevăr, fie numărul complex *z* şi rădăcina sa *w*:

$$z = re^{i\theta} \quad \text{şi} \quad w = \rho e^{i\varphi}$$

$$\text{Cum } w^n = z \;\Rightarrow\; \rho^n e^{in\varphi} = re^{i\theta}$$

Deoarece, cele două numere complexe sunt egale, au loc egalităţile:

$$\rho^n = r \qquad \text{şi} \qquad n\varphi = \theta + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\rho = \sqrt[n]{r} \qquad \text{şi} \qquad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

Aceste două expresii reprezintă modulul şi argumentul rădăcinii numărului complex z. Toate rădăcinile au acelaşi modul, iar argumentele acestora diferă prin multipli întregi de $2\pi/n$. Rezultă că *n* rădăcini sunt distincte şi pot fi dispuse în planul complex, în vârfurile unui poligon regulat cu *n* laturi, înscris în cercul cu raza $\sqrt[n]{|z|}$ şi centrul în punctul $z = 0$, originea planului complex.

Dacă considerăm valorile $0,1,2,\ldots,n-1$ pentru *k*, obţinem *n* numere complexe distincte:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0,1,2,\ldots,n-1 \qquad (7.22)$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}, \quad k = 0,1,2,\ldots,n-1 \qquad (7.23)$$

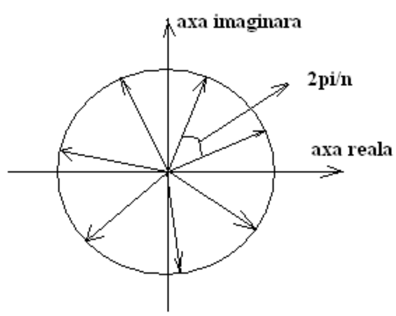

Figura 7.2 Dispunerea celor *n* radacini distincte.

Exemplu: Să se calculeze $\sqrt[3]{i}$

$z = i$ în formă trigonometrică si exponentiala este:

$$z = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} \;, \quad z = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \quad \Rightarrow \quad w_k = \sqrt[3]{i} = e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}}, \quad k = 0,1,2$$

$$w_k = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)}, \quad k = 0,1,2$$

$$w_0 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

$$w_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{5\pi}{6}} = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= -\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

$$w_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$$

Radacinile de ordinul n ale unitatii

Solutiile ecuatiei $z^n = 1$ unde *n* este un intreg pozitiv se numesc radacinile de ordinul n ale unitatii si sunt date de:

$$z = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \quad k = 0,1,2,\ldots,n-1 \qquad (7.24)$$

Fie $\omega = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, atunci cele *n* radacini sunt $1,\omega,\omega^2,\ldots,\omega^{n-1}$. Geometric, acestea sunt varfurile unui poligon regulat cu *n* laturi inscris in cercul de raza unu cu centrul in origine. Acest cerc are ecuatia $|z| = 1$ si se numeste *cerc unitate*.

Reprezentare sferica a numerelor complexe

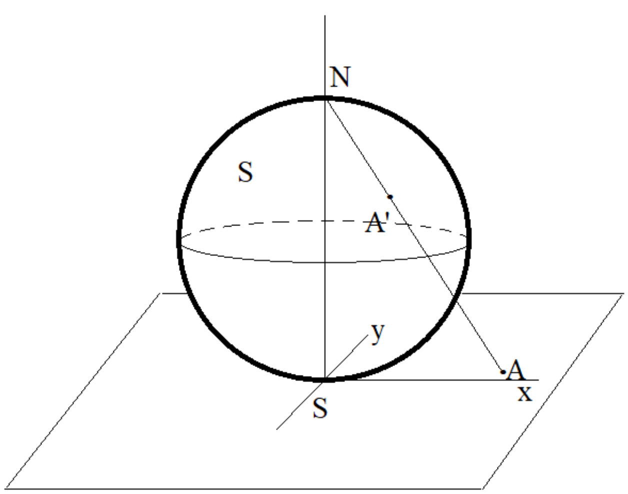

Figura 7.3

Consideram planul complex si o sfera S tangenta la plan in $z=0$. Diametrul NS este perpendicular pe plan si numim punctele N si S polii nord si sud ai sferei. Corespunzator fiecarui punct A din plan construim dreapta NA care intersecteaza sfera in A’. Astfel la fiecare punct din planul complex corespunde un punct unic pe sfera si putem reprezenta orice numar complex printr-un punct pe sfera. Polul nord N corespunde „punctului de la infinit ” din plan. Multimea tuturor punctelor din plan inclusiv punctul de la infinit formeaza *planul complex extins*.

Aceasta metoda de mapare a planului complex pe sfera se numeste *proiectie stereografica*, iar sfera se numeste *Sfera Riemann*.

Exerciţii:

□ Calculaţi modulul şi argumentul principal pentru numărul complex:

$$z=-\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}$$

$$x=-\cos\frac{\pi}{5}<0 \qquad\qquad y=\sin\frac{\pi}{5}>0$$

$$r=|z|=\sqrt{\left(-\cos\frac{\pi}{5}\right)^2+\left(\sin\frac{\pi}{5}\right)^2}=1$$

$$\arg z=\pi+arctg\,\frac{y}{x}=\pi+arctg\,\frac{\sin\frac{\pi}{5}}{-\cos\frac{\pi}{5}}=\pi+arctg\left(-tg\,\frac{\pi}{5}\right)$$

$$=\pi-arctg\left(tg\,\frac{\pi}{5}\right)=\pi-\frac{\pi}{5}=\frac{4\pi}{5}$$

□ Scrieţi numărul complex $z=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ în formă trigonometrică.

$$r=|z|=\sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=2$$

$$\arg z=\pi+arctg\,\frac{y}{x}=\pi+arctg\,\frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}=\pi+arctg\,(-1)=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$$

$$z=2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

□ Calculaţi $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8$

$$z_1=1-i \qquad |z_1|=\sqrt{2} \qquad \arg z_1=arctg\,\frac{y}{x}=arctg\,(-1)=-\frac{\pi}{4}$$

$$z_2 = 1 + i \quad |z_1| = \sqrt{2} \quad \arg z_2 = arctg\,\frac{y}{x} = arctg\,(+1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8 = \left(\frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}\right)^8 = \left(e^{-i2\frac{\pi}{4}}\right)^8 = \left(e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)^8 = e^{-i4\pi} = \cos(-4\pi) + i\sin(-4\pi) = 1$$

Varianta algebrica: $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8 = \left(\frac{(1-i)^2}{1^2 - i^2}\right)^8 = \left(\frac{1-2i+i^2}{1+1}\right)^8 = \left(\frac{-2i}{2}\right)^8 = (-i)^8 = 1$

□ Calculaţi rădăcinile de ordinul 3 pentru $z = -1 + i$

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$w_k = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{3}\right), \qquad k = 0,1,2$$

$$w_k = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{3}\right), \qquad k = 0,1,2$$

$$w_k = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right), \qquad k = 0,1,2$$

$$w_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt[6]{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$w_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$$

$$w_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\cdot 2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\cdot 2\pi}{3}\right)\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$$