6.6 Ecuaţii diferenţiale liniare omogene cu coeficienţi constanţi

Exemple:

1) Determinaţi soluţia generală pentru ecuaţia diferenţială: $y^{(6)} - y'' = 0$

$$\lambda^6 - \lambda^2 = 0 \qquad \lambda^2\left(\lambda^4 - 1\right) = 0 \qquad \lambda^2\left(\lambda - 1\right)\left(\lambda + 1\right)\left(\lambda^2 + 1\right) = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \qquad \lambda_3 = 1 \qquad \lambda_4 = -1 \qquad \lambda_5 = i \qquad \lambda_6 = -i$$

$$y\left(x\right) = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + C_4 e^{-x} + C_5 \cos x + C_6 \sin x$$

2) Determinaţi soluţia generală pentru ecuaţia diferenţială:

$$y^{(6)} - y^{(5)} - 4y^{(4)} + 2y^{(3)} + 5y'' - y' - 2y = 0$$

$$\lambda^6 - \lambda^5 - 4\lambda^4 + 2\lambda^3 + 5\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$\left(\lambda - 1\right)^2\left(\lambda + 1\right)^3\left(\lambda - 2\right) = 0$$

$\lambda_1 = 1$ multiplicitate 2

$\lambda_2 = -1$ multiplicitate 3

$\lambda_3 = 2$ simplă

$$y\left(x\right) = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x} + C_5 x^2 e^{-x} + C_6 e^{2x}$$

3) Determinaţi soluţia următoarei probleme Cauchy:

$$\begin{cases} y''' - 5y'' - 22y' + 56y = 0 \\ y\left(0\right) = 1,\ \ y'\left(0\right) = -2,\ \ y''\left(0\right) = -4 \end{cases}$$

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 - 22\lambda + 56 = 0$$

$$\left(\lambda - 2\right)\left(\lambda + 4\right)\left(\lambda - 7\right) = 0$$

$\lambda_1 = 2$ simplă

$\lambda_2 = -4$ simplă

$\lambda_3 = 7$ simplă

$$y\left(x\right) = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{7x}$$

Constantele se determină din condiţiile iniţiale:

$$y(0)=1 \quad \Rightarrow \quad C_1+C_2+C_3=1$$
$$y'(0)=-2 \quad \Rightarrow \quad -4C_1+2C_2+7C_3=-2$$
$$y''(0)=-4 \quad \Rightarrow \quad 16C_1+4C_2+49C_3=-4$$

$$C_1=\frac{14}{33} \qquad C_2=\frac{13}{15} \qquad C_3=-\frac{16}{55}$$

$$y(x)=\frac{14}{33}e^{-4x}+\frac{13}{15}e^{2x}-\frac{16}{55}e^{7x}$$

4) Determinaţi soluţia generală pentru ecuaţia diferenţială:

$$y^{(5)}-15y^{(4)}+84y^{(3)}-220y''+275y'-125y=0$$
$$\lambda^5-15\lambda^4+84\lambda^3-220\lambda^2+275\lambda-125=0$$
$$(\lambda-1)(\lambda-5)^2\left(\lambda^2-4\lambda+5\right)=0$$

$\lambda_1=1$ simplă
$\lambda_2=5$ multiplicitate 2
$\lambda_{3,4}=2\pm i$ simple

$$y(x)=C_1e^x+C_2e^{5x}+C_3xe^{5x}+C_4e^{2x}\cos x+C_5e^{2x}\sin x$$

Un pic de recapitulare: *Ecuaţii diferenţiale liniare omogene cu coeficienţi constanţi*

Cele de ordinul doi sunt importante in toata fizica!

$$y''+p_1y'+p_2y=0 \qquad y(x)=?$$

unde p_1 si p_2 sunt numere reale.

Tehnica de rezolvare: $\lambda^2+p_1\lambda+p_2=0$ ecuatia caracteristica

$$\lambda_{1,2}=\frac{-p_1\pm\sqrt{p_1^2-4p_2}}{2}=-\frac{p_1}{2}\pm\sqrt{\frac{p_1^2}{4}-p_2}$$

- Daca $p_1^2-4p_2>0$ atunci λ_1,λ_2 sunt reale si solutia generala este:

$$y(x)=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$$
$$y(x)=e^{-\frac{p_1}{2}x}\left(C_1e^{x\sqrt{p_1^2/4-p_2}}+C_2e^{-x\sqrt{p_1^2/4-p_2}}\right)$$

Ecuatia are solutii functii crescatoare sau/si functii descrescatoare dupa cum sunt semnele radacinilor λ_1, λ_2.

Conditiile initiale $y(0) = y_0$ si $y'(0) = v_0$ determina constantele C_1, C_2 care indica ce mixtura a functiilor avem ca rezultat.

- Daca $p_1^2 - 4p_2 < 0$ atunci λ_1, λ_2 sunt complexe:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-p_1 \pm \sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2} = -\frac{p_1}{2} \pm i\sqrt{p_2 - \frac{p_1^2}{4}} = \alpha \pm i\beta$$

Solutia generala este:

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x = e^{-\frac{p_1}{2}x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right)$$

Daca consideram $C_1 = A\cos\phi$ si $C_2 = A\sin\phi$ atunci:

$$y(x) = e^{-\frac{p_1}{2}x}\left(A\cos\phi\cos\beta x + A\sin\phi\sin\beta x\right) = e^{-\frac{p_1}{2}x}A\cos(\beta x - \phi)$$

Ecuatia are solutii oscilatorii cu amplitudine variabila. Constantele A si ϕ se determina din conditiile initiale $y(0) = y_0$, $y'(0) = v_0$.

- Daca $p_1^2 - 4p_2 = 0$, $\lambda_{1,2} = -\frac{p_1}{2}$, polinomul caracteristic are o solutie cu multiplicitate 2. Solutia generala este:

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x} = e^{-\frac{p_1}{2}x}\left(C_1 + C_2 x\right)$$

Exemplu: pendul matematic

Consideram un pendul de lungime *l*, cu o masa punctiforma *m* la capat, supus fortei gravitationale. Masa punctiforma executa o traiectorie pe un arc de cerc de raza *l*, parametrizata de unghiul θ. Viteza totdeauna tangenta la cerc este $l\dot{\theta}$ si acceleratia este $l\ddot{\theta}$. Legea lui Newton se scrie:

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = -\omega_0^2\sin\theta \ , \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

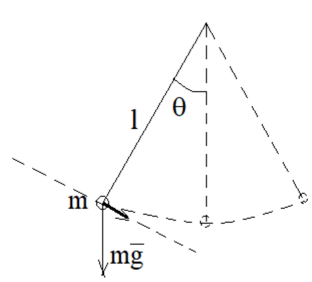

Figura 6.2 Pendul mathematic

Ecuatia $\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \sin\theta$, neliniara de ordinul doi, este ecuatia pendulului matematic. Descrie oscilatiile pendulului in jurul echilibrului $\theta = 0$. Daca presupunem ca oscilatiile sunt mici, $\theta \ll 1$, atunci putem aproxima $\sin\theta \approx \theta$ si transformam ecuatia diferentiala in una liniara:

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \theta$$

Aceasta este faimoasa ecuatie a unei oscilatii armonice simple care descrie miscarea unui pendul perturbat usor.

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$$

$$\theta(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$$

$$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

Constantele A si ϕ pot fi fixate din conditii initiale:

$$\theta(0) = \theta_0 \;\text{ si }\; \dot{\theta}(0) = \Omega_0$$

Sistem *disipativ*: Adaugam frecare pendul matematic ideal, adica adaugam o forta care se opune miscarii pendulului si este proportionala cu viteza acestuia (pentru oscilatii mici):

$$F_f = -bv = -bl\dot{\theta}$$

Forta totala in legea de miscare devine:

$$ml\ddot{\theta} = -mg\theta - bl\dot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \theta - \gamma\dot{\theta}$$

Unde, ω_0 este frecventa naturala a sistemului si γ este coeficient de frecare.

Renotam necunoscuta $\theta \to y$ si rescriem ecuatia diferentiala liniara, omogena cu coeficienti constanti:

$$\ddot{y} + \gamma\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

Ecuatia caracteristica asociata este:

$$\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$$

a) Frecare mica $\frac{\gamma}{2} < \omega_0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$

Notam $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm i\Omega$

$$y(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(C_1 \cos\Omega t + C_2 \sin\Omega t\right) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} A\cos(\Omega t + \phi)$$

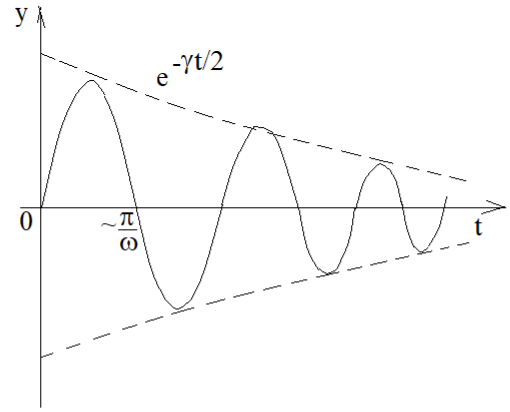

Figura 6.3

Oscilatiile sunt cu frecventa **Ω** si amplitudinea acestora scade exponential. De observat limita fizica $\gamma \ll \omega_0$, $\Omega \approx \omega_0$

b) Frecare mare $\frac{\gamma}{2} > \omega_0$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} = -\frac{\gamma}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\omega_0^2}{\gamma^2}}\right)$$

$$y(t) = C_1 e^{-\frac{\gamma}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\omega_0^2}{\gamma^2}}\right)t} + C_2 e^{-\frac{\gamma}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4\omega_0^2}{\gamma^2}}\right)t}$$

6.7 Ecuaţii diferenţiale liniare neomogene

O ecuaţie diferenţială liniară neomogenă de ordinul *n* are forma:

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y = f(x) \qquad (6.34)$$

Teorema 1: (de existenta si unicitate) Dacă coeficienţii $p_k(x)$ şi $f(x)$ din ecuaţia diferenţială (6.34) sunt funcţii continue pe un interval $[a,b]$, atunci ecuaţia diferenţială are soluţie unică care satisface condiţiile iniţiale:

$$y\big|_{x=x_0} = y_0, \quad y'\big|_{x=x_0} = y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}, \quad x_0 \in (a,b), \; y_0^{(k)} \in \mathbb{R} \qquad (6.35)$$

Ecuaţia diferenţială (6.34) poate fi scrisă în forma:

$$L[y] = f(x) \tag{6.36}$$

unde

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y \tag{6.37}$$

Teorema 2: (Structura soluţiei generale) Soluţia generală, în domeniul $x \in (a,b)$, $y^{(k)} \in \mathbb{R}$, $k = 0,1,\ldots,n-1$ a ecuaţiei diferenţiale liniare neomogene:

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x) \tag{6.38}$$

cu $p_k(x)$, $k = 1,\ldots,n$ şi $f(x)$ funcţii continue pe $[a,b]$, este *suma* dintre soluţia generală a ecuaţiei omogene corespunzătoare şi o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) + \tilde{y}(x) \tag{6.39}$$

$$y_{\text{generala neomogena}} = y_{\text{generala omogena}} + y_{\text{particulara neomogena}} \tag{6.40}$$

Exemplu: Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei $y'' + y = x$

Se observă că $\tilde{y}(x) = x$ este o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene date. Atunci, mai trebuie determinată doar soluţia generală a ecuaţiei omogene.

$$y'' + y = 0$$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \qquad \lambda_1 = i \qquad \lambda_2 = -i$$

$$y_{\text{gen. omogena}} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$$y_{\text{gen. neomogena}} = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x$$

6.8 Integrarea ecuaţiei liniare neomogene prin metoda variaţiei constantelor a lui Lagrange

- Începem cu o ecuaţie diferenţială de ordinul doi:

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x) \tag{6.41}$$

unde $p_1(x)$, $p_2(x)$ şi $f(x)$ sunt funcţii continue pe $[a,b]$.

Presupunem cunoscut un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia omogenă asociată:

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \qquad (6.42)$$

Fie acesta $y_1(x)$ şi $y_2(x)$. Atunci, soluţia generală a ecuaţiei omogene este:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \qquad (6.43)$$

Vom căuta soluţia ecuaţiei neomogene (6.41) în forma:

$$y(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) \qquad (6.44)$$

In care, am transformat constantele in functii: $C_1 \to C_1(x)$, $C_2 \to C_2(x)$.

Pentru a determina funcţiile necunoscute $C_1(x)$, $C_2(x)$ avem nevoie de un sistem de *două ecuaţii*. $C_1(x)$ şi $C_2(x)$ trebuie să satisfacă ecuaţia care rezultă din substituţia soluţiei in forma (6.44) în ecuaţia diferenţială (6.41) şi in plus avem nevoie de încă o ecuaţie *adiţională*. Această ecuaţie secundă o obţinem diferenţiind relaţia (6.44)

$$y' = C_1(x) y_1' + C_2(x) y_2' + C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2$$

şi impunând *condiţia adiţională*:

$$C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0 \qquad (6.45)$$

Cu această condiţie adiţională continuăm procesul de substituţie a soluţiei (6.44) în ecuaţia diferenţială (6.41):

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x) \qquad (6.41)$$

$$y' = C_1(x) y_1' + C_2(x) y_2'$$
$$y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_1' y_1' + C_2' y_2'$$

Substituim y, y', y'' în (6.41) şi obţinem:

$$C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_1' y_1' + C_2' y_2' + p_1\left(C_1 y_1' + C_2 y_2'\right) + p_2\left(C_1 y_1 + C_2 y_2\right) = f(x)$$

$$C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x) \qquad (6.46)$$

In concluzie, $y(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$ va fi soluţie pentru ecuaţia diferenţială neomogenă (6.41) dacă $C_1(x)$ şi $C_2(x)$ verifică simultan conditia aditionala (6.45) şi ecuatia (6.46), adică sistemul:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0 \\ C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x) \end{cases} \tag{6.47}$$

Determinantul acestui sistem este Wronskian-ul soluţiilor liniar independente $y_1(x)$ şi $y_2(x)$ ale ecuaţiei omogene, deci este nenul $\forall x\in(a,b)$. Atunci, sistemul (6.47) are soluţie unică pentru $C_1'(x)$ şi $C_2'(x)$. Fie soluţiile:

$$C_1'(x)=\varphi_1(x) \qquad C_2'(x)=\varphi_2(x) \tag{6.48}$$

Funcţiile $\varphi_1(x)$ şi $\varphi_2(x)$ sunt funcţii cunoscute şi prin integrare obţinem:

$$C_1(x)=\int\varphi_1(x)dx+C_1 \qquad C_2(x)=\int\varphi_2(x)dx+C_2 \tag{6.49}$$

cu C_1, C_2 constante de integrare.
Substituind funcţiile (6.49) în soluţia generală (6.44) a ecuaţiei (6.41) obţinem:

$$\begin{aligned} y(x)&=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)= \\ &=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+y_1(x)\int\varphi_1(x)dx+y_2(x)\int\varphi_2(x)dx \end{aligned} \tag{6.50}$$

Exemple: 1) Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei: $y''+y=\frac{1}{\sin x}$

Considerăm ecuaţia omogenă: $y''+y=0$

$$\lambda^2+1=0 \qquad \lambda_1=i \qquad \lambda_2=-i$$

$$y_{\text{gen. omogena}}=C_1\sin x+C_2\cos x$$

Căutăm soluţia ecuaţiei neomogene date de forma:

$$y(x)=C_1(x)\sin x+C_2(x)\cos x$$

Sistemul (6.47) devine:

$$\begin{cases} C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = 0 \\ C_1'(x)\cos x - C_2'(x)\sin x = \dfrac{1}{\sin x} \end{cases}$$

Rezolvăm sistemul:

$$C_1'(x)\cos x + C_1'(x)\frac{\sin x}{\cos x}\sin x = \frac{1}{\sin x}$$

$$C_1'(x)\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos x} = \frac{1}{\sin x}$$

$$C_1'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$C_2'(x) = -C_1'(x)\frac{\sin x}{\cos x} = -1$$

Integrăm cele două ecuaţii şi obţinem:

$$C_1(x) = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{d\varphi}{\varphi} = \ln|\sin x| + C_1$$

$$C_2(x) = \int (-1)dx = -x + C_2$$

Substituind aceste funcţii in forma cautata a solutiei, obţinem soluţia ecuaţiei neomogene date:

$$y(x) = C_1(x)\sin x + C_2(x)\cos x$$

$$y(x) = C_1\sin x + C_2\cos x + \sin x \cdot \ln|\sin x| - x\cos x$$

2) Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei: $y'' - 3y' + 2y = e^x$
   Ecuatia omogena este:

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \qquad \lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 2$$

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{2x}$$

$$y(x) = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{2x}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{2x} = 0 \\ C_1'(x)e^x + C_2'(x)2e^{2x} = e^x \end{cases}$$

$$C_1' = -1 \qquad C_2' = e^{-x}$$

$$C_1(x) = -x + C_1 \qquad C_2(x) = -e^{-x} + C_2$$

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - xe^x - e^x$$

3) Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei: $y'' - 2y' + y = e^x$

4) Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei: $y'' - \frac{x+1}{x}y' + \frac{1}{x}y = x$ daca se cunosc doua solutii particulare liniar independente ale ecuatiei omogene asociate:
$y_1(x) = e^x$ si $y_2(x) = x+1$

- Considerăm ecuaţia diferenţială liniară neomogenă de ordinul *n*

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x) \qquad (6.51)$$

Similar, presupunem cunoscut un *sistem fundamental de soluţii* pentru ecuaţia omogenă asociată:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0 \qquad (6.52)$$

Fie acesta $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots, y_n(x)$. Atunci, soluţia generală a ecuaţiei omogene este:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x) \qquad (6.53)$$

Vom căuta soluţia ecuaţiei neomogene (6.51) în forma:

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x) \qquad (6.54)$$

Pentru a determina cele *n* funcţii necunoscute $C_1(x)$, $C_2(x)$, $\ldots$, $C_n(x)$, avem nevoie de un sistem alcătuit din *n* ecuaţii pentru aceste necunoscute. La construcţia sistemului considerăm $n-1$ ecuaţii într-o manieră *arbitrară* iar a *n*-a ecuaţie o obţinem din cerinţa ca soluţia $y(x)$ in forma (6.54), să satisfacă ecuaţia diferenţială (6.51). Astfel, funcţiile necunoscute $C_1(x)$, $C_2(x)$, …, $C_n(x)$ se determină din sistemul:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 + \ldots + C_n' y_n = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' + \ldots + C_n' y_n' = 0 \\ \ldots \\ C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases} \tag{6.55}$$

Determinantul acestui sistem este Wronskian-ul soluţiilor liniar independente $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ ale ecuaţiei omogene, deci este nenul $\forall x \in (a,b)$. Atunci, sistemul (6.55) are soluţie unică pentru necunoscutele $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, …, $C_n'(x)$. Fie soluţiile sistemului functiile:

$$C_i'(x) = \varphi_i(x), \qquad i = 1,\ldots,n.$$

Funcţiile $\varphi_i(x)$ sunt cunoscute şi putem integra:

$$C_i(x) = \int \varphi_i(x)\,dx + C_i \qquad i = 1,\ldots,n$$

Substituind aceste funcţii în soluţia generală (6.54) a ecuaţiei neomogene obţinem:

$$y(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) + \ldots + C_n(x) y_n(x) \tag{6.54}$$

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) + \sum_{i=1}^{n} y_i(x) \int \varphi_i(x)\,dx \tag{6.56}$$

Adică, o sumă formată din soluţia generală a ecuaţiei omogene şi o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene.

Exemple:

1. Integraţi ecuaţia diferenţială: $xy''' - y'' - xy' + y = -x^2$ dacă ecuaţia omogenă asociată admite soluţiile liniar independente: $y_1 = x$, $y_2 = e^x$, $y_3 = e^{-x}$.

După împărţirea cu *x*, ecuaţia diferenţială are forma generala:

$$y''' - \frac{1}{x} y'' - y' + \frac{1}{x} y = -x$$

Soluţia generală a ecuaţiei omogene este:

$$y(x) = C_1 x + C_2 e^x + C_3 e^{-x}$$

Căutăm soluţia ecuaţiei neomogene în forma:

$$y(x)=C_1(x)x+C_2(x)e^x+C_3(x)e^{-x}$$

Noile funcţii necunoscute $C_1(x)$, $C_2(x)$ şi $C_3(x)$ se dermină din sistemul:

$$\begin{cases} C_1'(x)x+C_2'(x)e^x+C_3'(x)e^{-x}=0 \\ C_1'(x)\times 1+C_2'(x)e^x-C_3'(x)e^{-x}=0 \\ C_1'(x)\times 0+C_2'(x)e^x+\ C_3'(x)e^{-x}\ =-x \end{cases}$$

Substituind ultima ecuaţie în prima obţinem: $C_1'(x)x-x=0\ \Rightarrow C_1'(x)=1$

Adunând ecuaţia 2 cu ecuaţia 3 obţinem: $1+2C_2'(x)e^x=-x$

$$C_2'(x)=-\frac{1}{2}e^{-x}(x+1) \qquad C_2(x)=\frac{1}{2}\int(x+1)d\left(e^{-x}\right)=\frac{1}{2}\left((x+1)e^{-x}-\int e^{-x}dx\right)$$

Scazând ecuaţia 2 din ecuaţia 1 obţinem: $C_3'(x)=\frac{1}{2}e^x(1-x)$

$$C_3'(x)=\frac{1}{2}e^x(1-x) \qquad C_3(x)=\frac{1}{2}\int(1-x)d\left(e^x\right)=\frac{1}{2}\left((1-x)e^x+\int e^x dx\right)$$

$$C_1(x)=x+C_1 \qquad C_2(x)=\frac{1}{2}(x+2)e^{-x}+C_2 \qquad C_3(x)=\frac{1}{2}(2-x)e^x+C_3$$

$$y(x)=C_1(x)x+C_2(x)e^x+C_3(x)e^{-x}=C_1x+C_2e^x+C_3e^{-x}+x^2+2$$

2. Integraţi ecuaţia diferenţială:

$$y'''+y''=x^2+1+3xe^x$$

$y'''+y''=0$

$\lambda^3+\lambda^2=0 \ \Leftrightarrow\ \lambda^2(\lambda+1)=0 \qquad \lambda_1=0$ multiplicitate 2

$\lambda_2=-1$ simpla

$$y(x)=C_1+C_2x+C_3e^{-x}$$

Căutăm soluţia ecuaţiei neomogene în forma:

$$y(x)=C_1(x)+C_2(x)x+C_3(x)e^{-x}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)+C_2'(x)x+C_3'(x)e^{-x}=0 \\ C_2'(x)-C_3'(x)e^{-x}=0 \\ C_3'(x)e^{-x}=x^2+1+3xe^x \end{cases}$$

$$C_1'(x)=-x^3-x^2-x-1-3x^2e^x-3xe^x$$
$$C_2'(x)=x^2+1+3xe^x$$
$$C_3'(x)=x^2e^x+e^x+3xe^{2x}$$

$$C_1(x)=-\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-x-3x^2e^x+3xe^x-3e^x+C_1$$
$$C_2(x)=\frac{x^3}{3}+x+3xe^x-3e^x+C_2$$
$$C_3(x)=x^2e^x-2xe^x+3e^x+\frac{3}{2}xe^{2x}-\frac{3}{4}e^{2x}+C_3$$

$$y(x)=C_1+C_2x+C_3e^{-x}+\frac{3}{2}xe^x-\frac{15}{4}e^x+\frac{x^4}{12}-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2-3x+3$$

6.9 Ecuaţii diferenţiale liniare neomogene cu coeficienţi constanţi

Definiţie: Dacă în ecuaţia diferenţială liniară neomogenă:

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f(x) \qquad (6.51)$$

coeficienţii sunt constante, adică $p_i \in \mathbb{R}$, atunci ecuatia:

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\ldots p_{n-1}y'+p_ny=f(x) \qquad (6.57)$$

este ecuaţie diferenţială liniară neomogena cu coeficienţi constanţi.

Polinomul caracteristic ataşat acestei ecuaţiei este:

$$\varphi(\lambda)=\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+\ldots+p_{n-1}\lambda+p_n \qquad (6.58)$$

Ecuatia $\varphi(\lambda)=0$ este *ecuaţia caracteristică* ataşată ecuaţiei.

Teorema 1: Fie y_0 soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare omogene cu coeficienţi constanţi $L[y]=0$ şi fie $\tilde{y}$ o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene $L[y]=f$. Atunci, soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare neomogene (6.57) este:

$$y = y_0 + \tilde{y} \tag{6.59}$$

$\tilde{y}$ putându-se determina întotdeauna prin metoda variaţiei constantelor.

În anumite cazuri se poate determina forma soluţiei particulare $\tilde{y}$ funcţie de forma membrului drept al ecuaţiei $L[y]=f$ şi atunci $\tilde{y}$ poate fi determinat prin metoda coeficienţilor nedeterminaţi.

Teorema 2: Dacă membrul drept al ecuaţiei cu coeficienţi constanţi $L[y]=f$ are forma:

- $f(x)=e^{\alpha x}P_m(x)$, P_m fiind un polinom de gradul *m* în *x*, atunci soluţia particulară are forma:

  $$\tilde{y}(x)=e^{\alpha x}Q_m(x), \text{ dacă } \varphi(\alpha)\neq 0$$

  sau

  $$\tilde{y}(x)=x^r e^{\alpha x}Q_m(x), \text{ dacă } \varphi(\alpha)=\varphi'(\alpha)=\ldots=\varphi^{(r-1)}(\alpha)=0 \text{ şi } \varphi^{(r)}(\alpha)\neq 0$$

  adică α este rădăcină multiplă de ordinul *r* a ecuaţiei caracteristice.

$Q_m(x)$ este un polinom de gradul *m* în *x*, cu coeficienţi nedeterminaţi, coeficienţii determinându-se prin identificare după substituţia în ecuaţia $L[y]=f$.

- $f(x)=e^{\alpha x}\left[P_m(x)\cos\beta x+Q_s(x)\sin\beta x\right]$, $P_m(x)$ şi $Q_s(x)$ fiind polinoame de gradul *m* şi *s* în *x*, atunci soluţia particulară are forma:

  $$\tilde{y}(x)=e^{\alpha x}\left[U(x)\cos\beta x+V(x)\sin\beta x\right], \text{ dacă } \varphi(\alpha\pm i\beta)\neq 0$$

  sau

  $$\tilde{y}(x)=x^r e^{\alpha x}\left[U(x)\cos\beta x+V(x)\sin\beta x\right],$$

  dacă $\varphi(\alpha\pm i\beta)=\varphi'(\alpha\pm i\beta)=\ldots=\varphi^{(r-1)}(\alpha\pm i\beta)=0$ şi $\varphi^{(r)}(\alpha\pm i\beta)\neq 0$, adică $\alpha\pm i\beta$ este rădăcină multiplă de ordinul *r* a ecuaţiei caracteristice.

$U(x)$ şi $V(x)$ sunt polinoame de grad egal cu maximul dintre (m,s), cu coeficienţi nedeterminaţi, coeficienţii determinându-se prin identificare după substituţia în ecuaţia $L[y]=f$.

Exemple: Determinaţi o soluţie particulară si solutia generala pentru ecuaţiile:

1. $y''+y'=2x+3$

$\alpha=0$ este rădăcină simplă $(r=1)$ a polinomului caracteristic $\lambda^2+\lambda=0$, atunci conform teoremei 2, căutăm o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene date în forma $\tilde{y}(x)=x(Ax+B)$. Substituim această expresie în ecuaţia dată şi determinăm prin identificare coeficienţii necunoscuţi *A* şi *B*.

$$\tilde{y}'(x)=Ax+B+xA=2Ax+B$$
$$\tilde{y}''(x)=2A$$

Substituim în ecuaţia dată:

$$2A+2Ax+B=2x+3$$
$$2Ax+2A+B=2x+3$$

Identificând coeficientii polinoamelor in *x*: $A=1$, $B=1$ $\Rightarrow \tilde{y}(x)=x^2+x$
Solutia generala a ecuatiei omogene: $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-1$ $\Rightarrow y_o(x)=C_1+C_2e^{-x}$

Soluţia generală a ecuatiei date este $y(x)=C_1+C_2e^{-x}+x^2+x$

2. $y''+y'=2e^x$

$\alpha=1$ nu este rădăcină a polinomului caracteristic $\lambda^2+\lambda=0$, atunci cu teorema 2, căutăm o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene date în forma $\tilde{y}(x)=e^xA$. Substituim această expresie în ecuaţia dată şi determinăm prin identificare coeficientul necunoscut *A*.

$$\tilde{y}'(x)=e^xA \qquad \tilde{y}''(x)=e^xA$$
$$Ae^x+Ae^x=2e^x$$
$$A=1 \Rightarrow \tilde{y}(x)=e^x$$

Solutia generala a ecuatiei omogene: $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-1$ $\Rightarrow y_o(x)=C_1+C_2e^{-x}$
Soluţia generală a ecuatiei date este $y(x)=C_1+C_2e^{-x}+e^x$

3. $y'' - 2y' + y = xe^x$

$\alpha = 1$ este rădăcină multiplă de ordinul doi a polinomului caracteristic $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, atunci cu teorema 2, căutăm o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene date în forma $\tilde{y}(x) = x^2 e^x (Ax + B)$. Substituim această expresie în ecuaţia dată şi determinăm prin identificare coeficienţii necunoscuţi *A* şi *B*.

$$\tilde{y}'(x) = 2xe^x (Ax + B) + x^2 e^x (Ax + B) + x^2 e^x A$$

$$\tilde{y}''(x) = 2e^x (Ax + B) + 2xe^x (Ax + B) + 2xe^x A + 2xe^x (Ax + B) + x^2 e^x (Ax + B) + x^2 e^x A + \\ + 2xe^x A + x^2 e^x A$$

Inlocuim în ecuaţia diferenţiala şi simplificăm exponenţiala:

$$2(Ax + B) + 2x(Ax + B) + 2xA + 2x(Ax + B) + x^2 (Ax + B) + x^2 A + 2xA + x^2 A - \\ - 2\left(2x(Ax + B) + x^2 (Ax + B) + x^2 A\right) + x^2 (Ax + B) = x$$

$$6Ax + 2B = x$$
$$A = \frac{1}{6}, \quad B = 0$$
$$\tilde{y}(x) = \frac{1}{6} x^3 e^x$$

Solutia generala a ecuatiei omogene este: ($\lambda_1 = 1$ multiplicitate 2) $y_o(x) = C_1 e^x + C_2 xe^x$

Soluţia generală a ecuatiei date este $y(x) = C_1 e^x + C_2 xe^x + \frac{1}{6} x^3 e^x$

4. $y'' + 2y' + y = \cos x$

$\alpha = 0$ şi $\beta = 1$ şi $\pm i$ nu este rădăcină a polinomului caracteristic $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, atunci cu teorema 2, căutăm o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene date în forma $\tilde{y}(x) = A\cos x + B\sin x$. Substituim această expresie în ecuaţia dată şi determinăm prin identificare coeficienţii necunoscuţi *A* şi *B*.

$$\tilde{y}'(x) = -A\sin x + B\cos x$$
$$\tilde{y}''(x) = -A\cos x - B\sin x$$

$$-A\cos x - B\sin x + 2(-A\sin x + B\cos x) + A\cos x + B\sin x = \cos x$$

$$-2A\sin x + 2B\cos x = \cos x$$

$$A = 0,\ B = \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ \tilde{y}(x) = \frac{1}{2}\sin x$$

Solutia generala a ecuatiei omogene ($\lambda_1 = -1$ multiplicitate 2): $y_o(x) = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$

Soluţia generală a ecuatiei date este: $y(x) = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + \frac{1}{2}\sin x$

Exemplu: *Rezonanţa*

Considerăm ecuaţia oscilaţiilor elastice fără frecare sub acţiunea unei forţe periodice externe:

$$y'' + \omega^2 y = a\sin \beta t$$

In această ecuaţie variabila independentă este timpul *t*. ω este frecventa oscilatiilor naturale ale sistemului, iar β este frecventa fortei externe.

Ecuaţia caracteristică:

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

are soluţiile:

$$\lambda_1 = i\omega, \qquad \lambda_2 = -i\omega$$

Soluţia generală a ecuaţiei omogene este:

$$y_{\text{gen. omogena}} = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t = A\sin\delta\cos\omega t + A\cos\delta\sin\omega t = A\sin(\omega t + \delta)$$

- Daca $\beta \neq \omega$, adică dacă frecvenţa forţei externe este diferită de frecvenţa oscilaţiilor naturale ale sistemului şi $\pm i\beta$ nu este soluţie a ecuaţiei caracteristice, atunci soluţia particulară a ecuaţiei neomogene va fi:

$$\tilde{y}(t) = M\cos\beta t + N\sin\beta t, \qquad M, N = \text{ ct}$$

Substituind această expresie în ecuaţia diferenţială se determină constantele necunoscute *M* si *N*.

$$\tilde{y}'(t) = -M\beta\sin\beta t + N\beta\cos\beta t$$

$$\tilde{y}''(t) = -M\beta^2\cos\beta t - N\beta^2\sin\beta t$$

$$y'' + \omega^2 y = a\sin\beta t$$

$$-M\beta^2\cos\beta t - N\beta^2\sin\beta t + \omega^2(M\cos\beta t + N\sin\beta t) = a\sin\beta t$$

$$\omega^2 M - \beta^2 M = 0$$
$$\omega^2 N - \beta^2 N = a$$
$$M = 0\,,\quad N = \frac{a}{\omega^2 - \beta^2}$$
$$y_{\text{gen. neomogena}} = A\sin\left(\omega t + \delta\right) + \frac{a}{\omega^2 - \beta^2}\sin\beta t$$

Mişcarea rezultată este o combinaţie de oscilaţii naturale cu frecvenţa ω şi oscilaţii forţate cu frecvenţa β.

- Dacă $\beta = \omega$ adică frecvenţa forţei externe coincide cu frecvenţa oscilaţiilor naturale ale sistemului şi $\pm i\beta$ este soluţie a ecuaţiei caracteristice, atunci trebuie să căutăm soluţia particulară a ecuaţiei neomogene în forma:

$$\tilde{y}\left(t\right) = t\left(M\cos\beta t + N\sin\beta t\right)$$
$$\tilde{y}'\left(t\right) = M\cos\beta t + N\sin\beta t + t\left(-M\beta\sin\beta t + N\beta\cos\beta t\right)$$
$$\tilde{y}''\left(t\right) = -M\beta\sin\beta t + N\beta\cos\beta t - M\beta\sin\beta t + N\beta\cos\beta t + t\left(-M\beta^2\cos\beta t - N\beta^2\sin\beta t\right)$$

Înlocuim derivatele în ecuaţia diferenţială:

$$y'' + \omega^2 y = a\sin\beta t$$
$$-M\omega\sin\omega t + N\omega\cos\omega t - M\omega\sin\omega t + N\omega\cos\omega t + t\left(-M\omega^2\cos\omega t - N\omega^2\sin\omega t\right) +$$
$$+\omega^2\left(t\left(M\cos\omega t + N\sin\omega t\right)\right) = a\sin\omega t$$
$$2N\omega\cos\omega t - 2M\omega\sin\omega t = a\sin\omega t$$

$$M = -\frac{a}{2\omega} \qquad N = 0$$

$$\tilde{y}\left(t\right) = t\left(M\cos\beta t + N\sin\beta t\right)$$
$$\tilde{y}\left(t\right) = -\frac{a}{2\omega}t\cos\omega t$$
$$y_{\text{gen. neomogena}} = A\sin\left(\omega t + \delta\right) - \frac{a}{2\omega}t\cos\omega t$$

Al doilea termen sugerează o creştere continuă a amplitudinii oscilaţiilor. Acest fenomen apare atunci când frecvenţa forţei externe coincide cu frecvenţa oscilaţiilor naturale din sistem si se numeste *rezonanta*.