5.3.8 Ecuaţia diferenţială Riccati

Ecuaţia diferenţială de ordinul întâi de forma:

$$\frac{dy}{dx} = q(x) + p(x)y + r(x)y^2 \tag{5.64}$$

unde $q(x)$, $p(x)$ şi $r(x)$ sunt funcţii continue pe un interval, cunoscute, iar funcţia $y(x)$ este necunoscuta se numeşte *ecuaţia diferenţială Riccati*.

- Dacă q, p şi r sunt constante, atunci ecuaţia se integrează prin separarea variabilelor:

$$\int \frac{dy}{q + py + ry^2} = x + C$$

- Dacă $r(x) = 0$, ecuaţia (5.64) este liniară
- Dacă $q(x) = 0$, ecuaţia (5.64) este de tip Bernoulli

În general, această ecuaţie nu se poate rezolva prin metode elementare.

Teorema 5: Dacă se cunoaşte o soluţie particulară a ecuaţiei Riccati, atunci soluţia generală a ecuaţiei poate fi găsită prin metode elementare.

Demonstraţie: Presupunem cunoscută o soluţie particulară $y = y_1(x)$ a ecuaţiei (5.64) şi are loc:

$$y_1'(x) = q(x) + p(x)y_1(x) + r(x)y_1^2(x)$$

Atunci, cu substituţia:

$$z = y - y_1 \qquad\qquad y = y_1(x) + z(x)$$

unde $z(x)$ este noua funcţie necunoscută, ecuaţia Riccati se reduce la o ecuaţie diferenţială Bernoulli.

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{dz}{dx} = q(x) + p(x)y_1(x) + p(x)z(x) + r(x)y_1^2(x) + r(x)2y_1(x)z(x) + r(x)z^2(x)$$

$$\frac{dz}{dx} - \big(p(x) + 2r(x)y_1(x)\big)z(x) = r(x)z^2(x)$$

Aceasta este o ecuaţie Bernoulli.

Exemple: Integraţi ecuaţia Riccati:

1. $y' - y^2 + 2e^x y = e^{2x} + e^x$ dacă cunoaştem soluţia particulară $y_1 = e^x$.

Fie: $z(x) = y(x) - e^x \quad \Rightarrow \quad y = e^x + z(x)$

$$e^x + \frac{dz}{dx} - e^{2x} - 2e^x z - z^2 + 2e^x e^x + 2e^x z = e^{2x} + e^x$$

$$\frac{dz}{dx} - z^2 = 0 \quad \text{ecuatie cu variabile separabile}$$

$$\frac{dz}{z^2} = dx \qquad -\frac{1}{z} = x + C$$

$$z(x) = \frac{1}{C - x} \qquad y(x) = e^x + \frac{1}{C - x}$$

2. $$\begin{cases} y' = y^2 - \dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{x^2}, \quad x > 0 \\ y_1(x) = \dfrac{1}{x}, \quad y(1) = 2 \end{cases}$$

$$z = y - \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad y = z + \frac{1}{x}$$

$$\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x^2} = z^2 + 2z\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\left(z + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = z^2 \quad \text{ecuatie Bernoulli}$$

$$w = z^{1-2} \qquad w = z^{-1} \qquad \Rightarrow \quad z = w^{-1}$$

$$-\frac{1}{w^2}\frac{dw}{dx} - \frac{1}{xw} = \frac{1}{w^2}$$

$$\frac{dw}{dx} + \frac{w}{x} = -1 \qquad \text{ecuatie liniara}$$

$$\frac{dw}{dx} + \frac{w}{x} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dw}{w} = -\frac{dx}{x} \;\Rightarrow\; \ln|w| = -\ln|x| + \ln|C|$$

$$|w| = \left|\frac{C}{x}\right| \;\Rightarrow\; w = \pm\frac{C}{x} \;\Rightarrow\; w = \frac{C}{x} \;\Rightarrow\; w = \frac{C(x)}{x}$$

$$\frac{1}{x}\frac{dC(x)}{dx} + C(x)\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x}\frac{C(x)}{x} = -1$$

$$dC(x) = -xdx \;\Rightarrow\; C(x) = -\frac{x^2}{2} + C \qquad w(x) = C\frac{1}{x} - \frac{x}{2}$$

$$z(x) = \frac{1}{C\frac{1}{x} - \frac{x}{2}} \;\Rightarrow\; y(x) = \frac{1}{C\frac{1}{x} - \frac{x}{2}} + \frac{1}{x}$$

Solutia generala a ecuatiei date: $y(x) = \dfrac{2x}{C - x^2} + \dfrac{1}{x}$

$$y(1) = 2 \;\Rightarrow\; 2 = \frac{2}{C - 1} + 1 \;\Rightarrow\; C = 3$$

$\Rightarrow\; y(x) = \dfrac{2x}{3 - x^2} + \dfrac{1}{x}$ solutia problemei Cauchy

Cap.VI Ecuaţii diferenţiale de ordin superior

Bibliografie: Krasnov et al. (1989), Riley et al. (2006), Micula & Paval (1989)

6.1 Problema Cauchy

O ecuaţie diferenţială de ordinul *n*, rezolvată în derivata cea mai mare, are forma

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right) \qquad (6.1)$$

Pentru a obţine o soluţie particulară a acesteia, trebuie să precizăm *n* condiţii initiale sau conditii la limita:

$$y\big|_{x=x_0} = y_0, \qquad y'\big|_{x=x_0} = y_0', \quad \dots, \quad y^{(n-1)}\Big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \qquad (6.2)$$

unde y_0, y_0', …, $y_0^{(n-1)}$ sunt numere reale.

Problema Cauchy constă în determinarea soluţiei ecuaţiei diferenţiale (6.1) care satisface condiţiile iniţiale (6.2).

Teorema 1: (*de existenţă şi unicitate* a soluţiei problemei Cauchy) Fie:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right) \qquad (6.3)$$

o ecuaţie diferenţială de ordinul *n*, rezolvată în derivata cea mai mare. Dacă funcţia *f* este continuă în cele $n+1$ argumente pe o vecinătate Ω a punctului $M_0\left(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}\right)$ (exemplu $n=2$ în figura 6.1), atunci există un interval $x_0 - h_0 < x < x_0 + h_0$ pe axa *x* pe care există cel puţin o soluţie $y = \varphi(x)$ pentru ecuaţie care satisface condiţiile iniţiale:

$$y\big|_{x=x_0} = y_0, \qquad y'\big|_{x=x_0} = y_0', \quad \dots, \quad y^{(n-1)}\Big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \qquad (6.4)$$

Mai mult, dacă funcţia $f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$ are derivatele parţiale $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y'}$, …, $\dfrac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ mărginite pe Ω, atunci soluţia este *unică*.

Caz particular: $n=2 \quad y^{(2)} = f\left(x, y, y'\right)$ iar Ω este vecinătatea lui $M_0\left(x_0, y_0, y_0'\right)$.

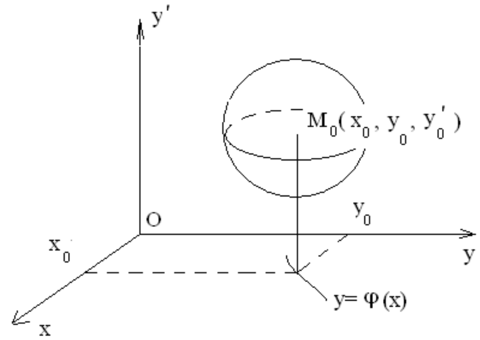

Figura 6.1

Exemplu:

$$y'' = e^{-x^2} y + \sin y'$$
$$f(x, y, y') = e^{-x^2} y + \sin y'$$

Aceasta este funcţie de trei variabile continuă peste tot. Exista cel putin o solutie $y = \varphi(x)$ care verifica: $y(x_0) = y_0$ si $y'(x_0) = y'_0$. Mai mult, derivatele parţiale sunt mărginite peste tot.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{-x^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y'} = \cos y'$$

Atunci, pentru orice numere x_0, y_0, y'_0, există o soluţie unică, $y = \varphi(x)$, a ecuaţiei care verifică condiţiile iniţiale:

$$y\big|_{x=x_0} = y_0 \quad \text{şi} \quad y'\big|_{x=x_0} = y'_0$$

Definiţie: *Soluţia generală* a ecuaţiei:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \tag{6.5}$$

pe un domeniu Ω în care problema Cauchy are soluţie unică, este o familie *n*-parametrică de funcţii $S\colon y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ care depind de *x* şi de *n* constante arbitrare $C_1, C_2, \ldots, C_n$ astfel încât:

- Pentru orice constante $C_1, C_2, \ldots, C_n$ funcţia $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \in S$ este soluţie a ecuaţiei (6.5), adică:
$$\varphi_x^{(n)}(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) = f\left(x, \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \ldots, \varphi_x^{(n-1)}(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)\right)$$
$$\forall x \in (x_0 - h, x_0 + h)$$
- Pentru orice condiţii iniţiale:
$$y\big|_{x=x_0} = y_0, \qquad y'\big|_{x=x_0} = y'_0, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}$$

astfel încât punctul $\left(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}\right)$ să aparţină domeniului Ω, de existenţă şi unicitate a soluţiei problemei Cauchy asociată ecuaţiei (6.5), putem găsi constantele $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$ astfel încât soluţia $y = \varphi\left(x, C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0\right) \in S$ să satisfacă condiţiile iniţiale considerate.

O *soluţie particulară* a ecuaţiei diferenţiale se obţine din soluţia generală prin fixarea constantelor $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Graficul său este o curbă în planul *xy* şi se numeşte *curbă integrală* a ecuaţiei.

Relaţia la care se ajunge în urma integrării unei ecuatii diferentiale de ordinul *n*, $\phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$ şi care defineşte implicit soluţia generală se numeşte *integrala generală* a ecuaţiei diferenţiale.

6.2 Reducerea ordinului unor ecuaţii diferenţiale de ordin superior

1. O ecuaţie de forma:

$$y^{(n)} = f(x) \tag{6.6}$$

unde $f(x)$ este funcţie continuă cunoscută, este integrabilă cu metode elementare.

Într-adevăr, deoarece $y^{(n)} = d\left(y^{(n-1)}\right)/dx$, separam variabilele si integrând ambele părţi ale ecuaţiei obţinem:

$$y^{(n-1)} = \int f(x)\,dx + C_1$$

Această ecuaţie are aceeaşi formă cu (6.6). Atunci, mai integrăm o dată:

$$y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)\,dx\right)dx + C_1 x + C_2$$

$$y^{(n-3)} = \int\left(\int\left(\int f(x)\,dx\right)dx\right)dx + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

După *n*-integrări obţinem soluţia generală a ecuaţiei (6.6):

$$y(x) = \int\left[\int\left(\ldots\int f(x)dx\right)dx\right]dx + C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_n$$

Exemplu: $y'' = 2x \quad \Rightarrow \quad y' = x^2 + C_1 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2$

2. Dacă o ecuaţie diferenţială nu conţine funcţia necunoscută şi derivatele sale până la ordinul $k-1$, adică are forma:

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{6.7}$$

atunci ordinul ecuaţiei poate fi redus până la $n-k$ prin schimbarea de variabilă:

$$y^{(k)} = p(x)$$

Ecuaţia diferenţială (6.7) în noua necunoscută $p(x)$ devine:

$$F(x, p, p', \ldots, p^{(n-k)}) = 0$$

Presupunem că putem integra această ecuaţie şi obţinem:

$$p(x) = \psi\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}\right)$$

Cum $y^{(k)} = p(x)$, prin k integrări obţinem funcţia căutată $y(x)$.

Exemplu: $y''' - \dfrac{y''}{x} = 0 \qquad y'' = p(x) \qquad y''' = p'(x)$

Ecuaţia în noua necunoscută este:

$$p' - \frac{p}{x} = 0 \qquad \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}$$

$$\ln|p| = \ln|x| + \ln|C_1|$$

$$p(x) = C_1 x \qquad y'' = C_1 x \qquad y' = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2$$

$$y = C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 x + C_3$$

3. Dacă o ecuaţie diferenţială nu conţine explicit variabila independentă *x*, adică are forma:

$$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{6.8}$$

Ordinul ecuaţiei poate fi redus cu unu, cu schimbarea de variabila:

$$y' = p(y)$$

Aici, $p = p(y)$ este noua funcţie necunoscută şi *y* este variabila independentă.

Exemplu: $y \cdot y'' + (y')^2 = 0$

$$y' = p(y)$$

$$y'' = \frac{d}{dx} p(y) = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$$

Ecuaţia diferenţială dată devine:

$$y \cdot p \frac{dp}{dy} + p^2 = 0 \quad \text{impartim cu } p \neq 0 \quad y \frac{dp}{dy} + p = 0$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{y} \qquad \Rightarrow \qquad \ln|p| = -\ln|y| + \ln|\tilde{C}_1|$$

$$\ln|p| = \ln\frac{|\tilde{C}_1|}{|y|} \qquad \Rightarrow \qquad p(y) = \frac{\tilde{C}_1}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\tilde{C}_1}{y} \qquad y\,dy = \tilde{C}_1 dx \qquad \frac{y^2}{2} = \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2$$

$$y = \sqrt{C_1 x + C_2}$$

6.3 Ecuaţii diferenţiale liniare şi omogene

O ecuaţie diferenţială liniară şi omogenă are forma

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \tag{6.9}$$

unde $p_1(x)$, $p_2(x)$, $\ldots$, $p_n(x)$ sunt funcţii continue pe un interval $[a,b]$ şi sunt cunoscute. Ecuaţia este liniară în funcţia necunoscută şi în toate derivatele acesteia.

Ecuaţia (6.9) o putem rescrie rezolvată în derivata de ordin maxim:

$$y^{(n)} = -p_1(x)y^{(n-1)} - \ldots - p_{n-1}(x)y' - p_n(x)y \tag{6.10}$$

Funcţia din partea dreaptă a acestei ecuaţii este o funcţie continuă în *x* pe $[a,b]$ şi în y, y', $\ldots$, $y^{(n-1)}$ peste tot. Mai mult, această funcţie are derivate parţiale în raport cu $y^{(k)}$ egale cu $-p_{n-k}(x)$, derivate care sunt mărginite pe $[a,b]$. Atunci, cu teorema 1 de existenta si unicitate, rezultă că dacă coeficienţii $p_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ sunt funcţii continue pe $[a,b]$ atunci pentru orice condiţii iniţiale:

$$y\big|_{x=x_0} = y_0,\quad y'\big|_{x=x_0} = y_0',\quad \ldots,\quad y^{(n-1)}\Big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)},\qquad \forall x_0 \in (a,b),\ y_0^{(k)} \in \mathbb{R} \tag{6.11}$$

există o soluţie unică a ecuaţiei (6.10) care satisface condiţiile iniţiale (6.11).

Preliminarii

Fie *E* şi *F* două mulţimi. Spunem că *A* este un operator $A: E \to F$ dacă la fiecare element $y \in E$ îi corespunde printr-o lege dată, un element $f = Ay \in F$. *E* este domeniul operatorului *A*.

Dacă *E* este un spaţiu liniar, atunci operatorul *A* se numeşte *operator liniar*, dacă:

- $A(y_1 + y_2) = Ay_1 + Ay_2$, $\forall y_1, y_2 \in E$
- $A(\alpha y) = \alpha Ay$, $\forall y \in E$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Rescriem ecuaţia diferentiala liniara si omogena (6.9) în forma:

$$L[y]=0 \tag{6.12}$$

unde

$$L[y]=y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y \tag{6.13}$$

$L[y]$ este un operator diferenţial liniar, definit pe spaţiul funcţiilor $y(x)$, continue pe $[a,b]$, împreună cu derivatele până la ordinul *n*, adică $L[y]:C^n[a,b]\to C[a,b]$.
Natura diferenţială a operatorului este evidentă.
Liniaritatea operatorului, presupune:

- $L[y_1+y_2]=L[y_1]+L[y_2]$
- $L[Cy]=CL[y]$,

unde y_1 şi y_2 sunt funcţii arbitrare, având derivate până la ordinul *n* continue.

Teorema 1: Dacă funcţia $y_0(x)$ este o soluţie a ecuaţiei diferenţiale liniare omogene $L[y]=0$, atunci şi funcţia $Cy_0(x)$ este de asemenea o soluţie a acestei ecuaţii (*C* este constantă arbitrară).

Teorema 2: Dacă funcţiile $y_1(x)$ şi $y_2(x)$ sunt soluţii ale ecuaţiei diferenţiale liniare omogene $L[y]=0$, atunci şi suma $y_1(x)+y_2(x)$ este de asemenea o soluţie a acestei ecuaţii.

Corolar: Dacă funcţiile $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_m(x)$ sunt soluţii ale ecuaţiei diferenţiale liniare omogene $L[y]=0$, atunci şi combinaţia liniară $\sum_{i=1}^{m}C_iy_i(x)$ este o soluţie a acestei ecuaţii.

Ecuaţia $L[y]=0$ are întotdeauna soluţia trivială $y(x)=0$.

Observaţie: Din teoremele 1 şi 2 rezultă că mulţimea soluţiilor ecuaţiei $L[y]=0$ formează un *spaţiu liniar*, a cărui 0 este funcţia $y(x)=0$.

Teorema 3: Dacă o ecuaţie diferenţială liniară omogenă $L[y]=0$ cu coeficienţi reali $p_k(x)$, $k=1,2,\ldots,n$ are o soluţie complexă $y(x)=u(x)+iv(x)$, atunci şi partea reală $u(x)$ şi partea imaginară $v(x)$ sunt de asemenea soluţii ale acestei ecuaţii.

6.4 Sisteme de funcţii liniar dependente şi liniar independente

Considerăm un sistem de funcţii $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\dots$, $y_n(x)$ continue pe un interval $[a,b]$.

Definiţie: Spunem că funcţiile $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\dots$, $y_n(x)$ sunt *liniar dependente* pe intervalul $[a,b]$, dacă există constantele $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ astfel încât:

$$\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)+\dots+\alpha_n y_n(x)=0, \qquad \forall x\in[a,b] \tag{6.14}$$

şi cel puţin un α_i este diferit de zero.

Dacă egalitatea are loc numai pentru $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=0$, atunci funcţiile $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\dots$, $y_n(x)$ sunt *liniar independente* pe intervalul $[a,b]$.

Exemple:

1. Funcţiile $y_1(x)=x$ şi $y_2(x)=2x$ sunt liniare dependente pe un interval $[a,b]$. Într-adevăr, avem de exemplu, identitatea:
$$2y_1-y_2=0, \quad \text{cu} \quad \alpha_1=2,\ \alpha_2=-1$$

2. Funcţiile $1,x,x^2,\dots,x^n$ sunt liniar independente pe orice interval $[a,b]$. Într-adevăr,
$$\alpha_0\cdot 1+\alpha_1\cdot x+\alpha_2 x^2+\dots+\alpha_n x^n=0, \qquad \forall x\in[a,b]$$
are loc numai dacă $\alpha_i=0$, $i=0,1,\dots,n$.

3. Funcţiile e^{k_1x}, e^{k_2x}, $\dots$, e^{k_nx} cu $k_i\neq k_j$ pentru $i\neq j$ sunt liniar independente pe orice interval $[a,b]$. Pentru demonstratie, consideram cazul $n=3$. *Presupunem* funcţiile e^{k_1x}, e^{k_2x}, e^{k_3x} liniar dependente. Atunci,
$$\alpha_1e^{k_1x}+\alpha_2e^{k_2x}+\alpha_3e^{k_3x}=0 \qquad \text{nu toti } \alpha_i \text{ nuli}$$

Presupunem $\alpha_3\neq 0$. Împărţim relaţia cu e^{k_1x} şi diferenţiem relaţia obţinută.

$$\alpha_1+\alpha_2e^{(k_2-k_1)x}+\alpha_3e^{(k_3-k_1)x}=0$$
$$\alpha_2(k_2-k_1)e^{(k_2-k_1)x}+\alpha_3(k_3-k_1)e^{(k_3-k_1)x}=0$$

Împărţim relaţia cu $e^{(k_2-k_1)x}$ şi diferenţiem relaţia obţinută.

$$\alpha_2(k_2-k_1)+\alpha_3(k_3-k_1)e^{(k_3-k_2)x}=0$$
$$\alpha_3(k_3-k_1)(k_3-k_2)e^{(k_3-k_2)x}=0$$

Relaţia este imposibilă deoarece $\alpha_3\neq 0$ şi $k_i\neq k_j$ pentru $i\neq j$. *Presupunerea* noastră a fost falsă şi funcţiile considerate sunt liniar liniar independente.

Remarcă: Dacă funcţiile $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ sunt liniar dependente, atunci cel puţin una dintre ele este combinaţie liniară de celelalte.

Teorema 1: Dacă funcţiile $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ cu derivate până la ordinul $n-1$, sunt *liniar dependente* pe intervalul $[a,b]$, atunci determinantul numit *Wronskian-ul* sistemului de funcţii $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ este *nul* pe intervalul $[a,b]$.

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & & & \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}=0 \qquad (6.15)$$

Demonstraţie: Pentru simplitate, considerăm $n=3$. Fie funcţiile $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ cu derivate până la ordinul doi şi <u>liniar dependente</u> pe intervalul $[a,b]$. Atunci,

$$\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)+\alpha_3 y_3(x)=0$$

şi cel puţin un α_i este diferit de zero. Fie $\alpha_1\neq 0$. Rezolvăm ecuaţia în y_1 şi diferenţiem:

$$y_1(x)=-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}y_2(x)-\frac{\alpha_3}{\alpha_1}y_3(x)$$

$$y_1'(x)=-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}y_2'(x)-\frac{\alpha_3}{\alpha_1}y_3'(x)$$

$$y_1''(x)=-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}y_2''(x)-\frac{\alpha_3}{\alpha_1}y_3''(x)$$

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{vmatrix}$$

$$W(x)=\begin{vmatrix} -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}y_2(x)-\frac{\alpha_3}{\alpha_1}y_3(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}y_2'(x)-\frac{\alpha_3}{\alpha_1}y_3'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}y_2''(x)-\frac{\alpha_3}{\alpha_1}y_3''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{vmatrix}$$

Prima coloană a determinantului este combinaţie liniară de celelalte două coloane $\forall x \in (a,b)$. Un astfel de determinant este nul. $W(x)=0\ \forall x \in (a,b)$.

Teorema 2: Dacă Wronskian-ul $W(x)$ al unui sistem de *n* funcţii este nenul pe un interval (a,b), atunci aceste funcţii sunt *liniar independente* pe intervalul (a,b).

Teorema 3: Dacă funcţiile $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_n(x)$ sunt liniar independente pe intervalul $[a,b]$ şi sunt soluţii pentru ecuaţia diferenţială liniară omogenă:

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0$$

cu coeficienţii $p_k(x)$ funcţii continue pe $[a,b]$, atunci Wronskian-ul sistemului de funcţii

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & & & \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0 \text{ pe } [a,b].$$

Teorema 4: Fie $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_n(x)$ soluţii particulare ale ecuaţiei diferenţiale liniare şi omogene:

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0$$

cu coeficienţii $p_k(x)$ funcţii continue pe $[a,b]$. Aceste soluţii particulare sunt liniar independente pe $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ Wronskian-ul $W(x)$ al sistemului de soluţii este nenul.

6.5 Structura soluţiei generale a unei ecuaţii diferenţiale liniară omogenă

Teorema 1: (asupra structurii soluţiei unei ecuaţii diferenţiale liniare omogene) O ecuaţie diferenţială liniară omogenă:

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0 \qquad (6.16)$$

cu coeficienţii $p_k(x)$ $k=1,\ldots,n$ funcţii continue pe intervalul $[a,b]$ are soluţia generală:

$$y(x)=\sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) \qquad (6.17)$$

adică o combinaţie liniară de *n* soluţii particulare $y_i(x)$, $i=1,\ldots,n$, care sunt liniar independente pe intervalul $[a,b]$. C_1, C_2, $\ldots$, C_n sunt constante arbitrare.

Din această teoremă rezultă că dacă se cunosc *n* soluţii particulare liniar independente ale ecuaţiei diferenţiale liniare omogene de ordinul *n*, atunci orice altă soluţie a ecuaţiei poate fi reprezentată ca o combinaţie liniară de aceste soluţii particulare şi aceasta ar fi liniar dependentă în raport cu primele. Astfel, *numărul maxim de soluţii liniar independente al unei ecuaţii diferenţiale liniare omogene este egal cu ordinul său*.

Observaţie: Mulţimea de soluţii a unei ecuaţii diferenţiale liniare omogene formează un spaţiu vectorial cu dimensiunea egală cu ordinul ecuaţiei diferenţiale.

Definiţie: O mulţime formată din oricare *n* soluţii particulare liniar independente ale unei ecuaţii diferenţiale liniare omogene de ordinul *n* se numeşte *sistem fundamental de soluţii*.

Teorema 2: Pentru fiecare ecuaţie diferenţială liniară omogenă

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0 \qquad (6.18)$$

cu coeficienţii $p_k(x)$ $k=1,\ldots,n$ funcţii continue pe intervalul $[a,b]$, există un *sistem fundamental de soluţii* (chiar un număr infinit de astfel de sisteme fundamentale de soluţii).

Un sistem fundamental de soluţii defineşte complet ecuaţia diferenţială liniară şi omogenă. Dacă se cunoaşte sistemul fundamental y_1, y_2, $\ldots$, y_n, ecuaţia diferenţială respectivă se poate construi dezvoltând după elementele ultimei coloane determinantul următor:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots y_n & y \\ y_1' & y_2' & \ldots y_n' & y' \\ \ldots & & & \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix}=0 \qquad (6.19)$$

$$W(x)y^{(n)}(x)-W_1(x)y^{(n-1)}+\ldots\pm W_n(x)y=0$$

În această relaţie $W(x)$ este Wronskian-ul sistemului fundamental de soluţii y_1, y_2, $\ldots$, y_n şi

$$W_1(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & & & \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}$$

Cum, $W(x)\neq 0$ pe intervalul $[a,b]$, putem împărţi ultima relaţie cu $W(x)\neq 0$ şi ecuaţia devine:

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\dots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0$$

unde, în particular $p_1(x)=-W_1(x)/W(x)$.

Exemplu: Determinaţi ecuaţia diferenţială care are următorul sistem fundamental de soluţii: $y_1=\cos x$, $y_2=\sin x$.

Ecuaţia diferenţială se obţine dezvoltând după ultima coloană determinantul:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y \\ y_1' & y_2' & y' \\ y_1'' & y_2'' & y'' \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} \cos x & \sin x & y \\ -\sin x & \cos x & y' \\ -\cos x & -\sin x & y'' \end{vmatrix}=0$$

$$y\begin{vmatrix} -\sin x & \cos x \\ -\cos x & -\sin x \end{vmatrix}-y'\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\cos x & -\sin x \end{vmatrix}+y''\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}=0$$

$$y\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)-y'\left(-\cos x\sin x+\cos x\sin x\right)+y''\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)=0$$

$$y+y''=0$$

6.6 Ecuaţii diferenţiale liniare omogene cu coeficienţi constanţi

O ecuaţie diferenţială liniară omogenă cu coeficienţi constanţi de ordinul doi are forma:

$$y''+p_1y'+p_2y=0 \qquad (6.20)$$

unde p_1 şi p_2 sunt numere reale. Pentru a determina soluţia generală a ecuaţiei, trebuie să găsim *două soluţii particulare liniar independente* ale acesteia. Căutăm aceste soluţii de forma:

$$y(x)=e^{\lambda x}, \quad \lambda=\text{constantă}$$

Derivăm această funcţie şi o substituim în ecuaţia diferenţială (6.20):

$$e^{\lambda x}\left(\lambda^2 + p_1\lambda + p_2\right) = 0$$

Deoarece exponenţiala este nenulă, polinomul în λ din paranteză trebuie să fie nul. În consecinţă, funcţia $y(x) = e^{\lambda x}$, este soluţie a ecuaţiei diferenţiale numai dacă λ este rădăcină a polinomului din paranteză, numit *polinom caracteristic*,

$$\lambda^2 + p_1\lambda + p_2 = 0 \tag{6.21}$$

Această ecuaţie se numeşte *ecuaţie caracteristică* în raport cu ecuaţia diferenţială (6.20). Vom nota cu λ_1 şi λ_2 *rădăcinile polinomului caracteristic*. Acestea pot fi: (1) reale şi distincte (2) complexe (3) reale şi egale. Considerăm separat fiecare caz:

(1) Dacă rădăcinile λ_1 şi λ_2 sunt reale şi distincte, atunci soluţiile particulare pentru ecuaţia (6.20) vor fi:

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \quad \text{şi} \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x} \tag{6.22}$$

Aceste soluţii sunt liniar independente şi formează un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţie. Soluţia generală va fi de forma (6.17) din teorema de structura:

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \tag{6.23}$$

cu C_1 şi C_2 constante arbitrare.

Exemple: 1) Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei: $y'' - 3y' + 2y = 0$

Rezolvăm mai întâi ecuaţia caracteristică:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 2$$

Soluţia generală va fi o combinaţie liniară de exponenţiale:

$$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$$

2) Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei: $y'' - 7y' + 12y = 0$

Rezolvăm mai întâi ecuaţia caracteristică:

$$\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$$

$$\lambda_1 = 3 \qquad \lambda_2 = 4$$

Soluţia generală va fi o combinaţie liniară de exponenţiale:

$$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}$$

(2) Dacă rădăcinile λ_1 şi λ_2 sunt complexe, deoarece coeficienţii p_1 şi p_2 sunt reali, rădăcinile λ_1 şi λ_2 sunt complex conjugate, adică: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ şi $\lambda_2 = \alpha - i\beta$.

Soluţiile particulare ale ecuaţiei diferenţiale pot fi scrise în forma:

$$\tilde{y}_1(x) = e^{(\alpha + i\beta)x} \quad \text{şi} \quad \tilde{y}_2(x) = e^{(\alpha - i\beta)x} \tag{6.24}$$

Acestea sunt funcţii cu valori complexe. Ne-am dori soluţii reale. Pentru aceasta ne vom folosi de relaţiile Euler:

$$e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x$$
$$e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i\sin\beta x$$

Cu acestea, putem reprezenta soluţiile particulare în forma:

$$\tilde{y}_1(x) = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$$
$$\tilde{y}_2(x) = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$$

Cu teorema 3 din paragraful 6.3 şi partea reală şi partea imaginară sunt soluţii particulare pentru ecuaţia diferenţială (6.20):

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x \quad \text{şi} \quad y_2(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x \tag{6.25}$$

Aceste soluţii sunt liniar independente deoarece

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = tg(\beta x) \neq \text{ ct}$$

Aceste soluţii sunt liniar independente şi formează un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţie. Soluţia generală va fi de forma:

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x \tag{6.26}$$

Exemplu: Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei:

1. $y'' + 2y' + 5y = 0$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$
$$\lambda_1 = -1 + 2i \qquad \lambda_2 = -1 - 2i$$
$$\alpha = -1 \qquad \beta = 2$$
$$y(x) = C_1 e^{-x}\cos 2x + C_2 e^{-x}\sin 2x$$

2. $y'' - 4y' + 13y = 0$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$$
$$\lambda_1 = 2 + 3i \qquad \lambda_2 = 2 - 3i$$
$$\alpha = 2 \qquad \beta = 3$$
$$y(x) = C_1 e^{2x}\cos 3x + C_2 e^{2x}\sin 3x$$

(3) Presupunem radăcinile polinomului caracteristic reale si egale $\lambda_1 = \lambda_2$.
O soluţie particulară a ecuatiei (6.20) este $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$. Cea de-a doua soluţie trebuie să fie liniar independentă cu prima şi o căutăm în forma:

$$y_2(x) = e^{\lambda_1 x} \cdot u(x) \tag{6.27}$$

cu $u(x)$ noua necunoscută. Aceasta formă a soluţiei secunde împreună cu derivatele sale le înlocuim în ecuaţia (6.20) $y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$:

$$y_2'(x) = \lambda_1 e^{\lambda_1 x} \cdot u(x) + e^{\lambda_1 x} \cdot u'(x)$$

$$y_2''(x) = \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} \cdot u(x) + \lambda_1 e^{\lambda_1 x} \cdot u'(x) + \lambda_1 e^{\lambda_1 x} \cdot u'(x) + e^{\lambda_1 x} \cdot u''(x)$$

$$e^{\lambda_1 x}\left(\lambda_1^2 u + 2\lambda_1 u' + u'' + p_1\lambda_1 u + p_1 u' + p_2 u\right) = 0$$

$$e^{\lambda_1 x}\left[u'' + (2\lambda_1 + p_1)u' + \left(\lambda_1^2 + p_1\lambda_1 + p_2\right)u\right] = 0$$

Cum λ_1 este radăcina dublă a polinomului caracteristic, avem:

$$\lambda_1^2 + p_1\lambda_1 + p_2 = 0 \quad \text{si} \quad 2\lambda_1 + p_1 = 0$$

Atunci, ecuaţia a cărui soluţie trebuie să fie funcţia necunoscută $u(x)$ este: $u'' = 0$.
Cu două integrari succesive obţinem:

$$u' = A \qquad u = Ax + B$$

Consideram $A = 1$, $B = 0$. Atunci, $u(x) = x$ şi a doua soluţie particulară este:

$$y_2(x) = e^{\lambda_1 x} \cdot x \tag{6.28}$$

Cu două soluţii liniar independente determinate, care formează un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţie, soluţia generală va fi de forma:

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x} \tag{6.29}$$

Exemple: Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei:

1. $y'' + 2y' + y = 0$.

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

Rădăcina dublă a acestui polinom este $\lambda_1 = -1$.

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$$

2. $y'' - 4y' + 4y = 0$.

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

Rădăcina dublă a acestui polinom este $\lambda_1 = 2$.

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$$

Considerăm ecuaţii diferenţiale liniare omogene, de ordin *n* arbitrar, cu coeficienţi constanţi:

$$L[y] = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0 \tag{6.30}$$

în care $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sunt numere reale. Soluţia generală se caută în aceeaşi manieră ca şi la ecuaţia diferenţială de ordinul doi.

1. Căutăm soluţii în forma $y = e^{\lambda x}$. Substituim $e^{\lambda x}$ în ecuaţia (6.30) şi obţinem:
$$L\left[e^{\lambda x}\right] = e^{\lambda x}\varphi(\lambda) = 0 \qquad (6.31)$$
Adică, vom obţine *ecuaţia caracteristică*:
$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0 \qquad (6.32)$$

2. Calculăm rădăcinile ecuaţiei caracteristice $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

3. În acord cu natura rădăcinilor scriem soluţiile particulare, liniar independente ale ecuaţiei (6.30), astfel:

a) La fiecare rădăcină reală simplă λ a ecuaţiei caracteristice, alegem câte o soluţie particulară $e^{\lambda x}$.

b) La fiecare pereche de rădăcini complexe conjugate simple $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ şi $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ alegem două soluţii particulare liniar independente :
$$e^{\alpha x}\cos\beta x \quad \text{şi} \quad e^{\alpha x}\sin\beta x$$

c) La fiecare rădăcină reală λ cu multiplicitate *r*, alegem *r* soluţii particulare liniar independente:
$$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ \ldots,\ x^{r-1}e^{\lambda x}$$

d) La fiecare pereche de rădăcini complexe conjugate $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ şi $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ cu multiplicitate μ, alegem 2μ soluţii particulare:
$$e^{\alpha x}\cos\beta x\ ,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ldots,\ x^{\mu-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x\ ,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ldots,\ x^{\mu-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

4. Numărul soluţiilor particulare construite în această manieră este egal cu ordinul *n* al ecuaţiei diferenţiale. Se poate arăta că aceste soluţii sunt liniar independente. Cu aceste *n* soluţii particulare liniar independente $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$, care formează un sistem fundamental de soluţii, scriem soluţia generală:
$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x) \qquad (6.33)$$

Exemple:

1) Determinaţi soluţia generală pentru ecuaţia diferenţială: $y^{(6)} - y'' = 0$

$$\lambda^6 - \lambda^2 = 0 \qquad \lambda^2\left(\lambda^4 - 1\right) = 0 \qquad \lambda^2(\lambda - 1)(\lambda + 1)\left(\lambda^2 + 1\right) = 0$$
$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \qquad \lambda_3 = 1 \qquad \lambda_4 = -1 \qquad \lambda_5 = i \qquad \lambda_6 = -i$$

$$y(x) = C_1 + C_2x + C_3e^x + C_4e^{-x} + C_5\cos x + C_6\sin x$$