5.3.4 Ecuaţii omogene în x şi y

Definiţie: O funcţie $f(x,y)$ se numeşte *omogenă de gradul n în x şi y* dacă pentru orice t are loc:

$$f(tx,ty)=t^n f(x,y) \tag{5.31}$$

Exemple:

- $f(x,y)=x^2-xy+y^2$

  $f(tx,ty)=t^2x^2-t^2xy+t^2y^2=t^2\left(x^2-xy+y^2\right)=t^2 f(x,y)$

  $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ este omogenă de gradul 2 în x şi y.

- $f(x,y)=\dfrac{y}{x}$

  $f(tx,ty)=\dfrac{ty}{tx}=\dfrac{y}{x}=f(x,y)$

  $f(x,y)=\dfrac{y}{x}$ este omogenă de gradul 0 în x şi y.

Definiţie: O ecuaţie diferenţială de ordinul întâi: $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$ este *omogenă în x şi y*, dacă funcţia $f(x,y)$ este omogenă de gradul 0 în x şi y.

Considerăm ecuaţia diferenţială omogenă în x şi y :

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{5.32}$$

Deoarece $f(tx,ty)=f(x,y)$, pentru $t=\dfrac{1}{x}$, obţinem $f(x,y)=f\left(1,\dfrac{y}{x}\right)$, adică o funcţie omogenă de gradul 0 în x şi y depinde numai de raportul argumentelor. Renotând funcţia, scriem ecuatia diferentiala omogena astfel:

$$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{5.33}$$

Pentru a transforma această ecuaţie în altă ecuaţie cu variabile separabile, considerăm o nouă funcţie:

$$u(x)=\frac{y}{x} \tag{5.34}$$

Atunci $y=xu$ şi

$$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx} \quad\Rightarrow\quad u+x\frac{du}{dx}=\varphi(u)$$

$$\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{dx}{x}+C$$

$$\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\ln|x|+C \qquad (5.35)$$

Şi revenind la substituţia $u(x)=\frac{y}{x}$, obţinem integrala generală pentru ecuaţia dată.
Am presupus $\varphi(u)-u\neq 0$. Daca ecuatia $\varphi(u_0)=u_0$ are radacini, acestea dau motive pentru solutii aditionale, care sunt dreptele $y(x)=u_0x$.

Exemple: 1. Integraţi ecuaţia: $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{xy}$

$f(tx,ty)=f(x,y)$, deci ecuaţia este una omogenă.

$$f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

Notăm: $u(x)=\frac{y}{x} \Rightarrow y=xu$ şi

$$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$$

$$u+x\frac{du}{dx}=u+\frac{1}{u} \quad \Rightarrow \quad x\frac{du}{dx}=\frac{1}{u} \quad \Rightarrow \quad udu=\frac{dx}{x}$$

Integrăm ecuaţia cu variabilele separate:

$$\frac{u^2}{2}=\ln|x|+\ln|C| \quad \Rightarrow \quad u^2=\ln x^2+\ln C^2$$

$$u^2=\ln Cx^2 \quad \Rightarrow \quad y^2=x^2\ln Cx^2$$

1. Integraţi ecuaţia: $xy'-y=(x+y)\ln\frac{x+y}{x}$

   Impartim cu $x\neq 0$

$$y'=\frac{y}{x}+\left(1+\frac{y}{x}\right)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)$$

Notăm: $u(x)=\frac{y}{x} \Rightarrow y=xu$ şi

$$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$$

$$u+x\frac{du}{dx}=u+(1+u)\ln(1+u) \quad \Rightarrow \quad x\frac{du}{dx}=(1+u)\ln(1+u) \quad |:(1+u)\ln(1+u)\neq 0$$

$$\int \frac{du}{(1+u)\ln(1+u)} = \int \frac{dx}{x}$$

Facem schimbare de variabila: $\varphi = \ln(1+u)$ $\quad d\varphi = \frac{1}{1+u}du$

$$\int \frac{d\varphi}{\varphi} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|\varphi| = \ln|x| + \ln|C| \quad \Rightarrow \quad \ln|\ln(1+u)| = \ln|Cx|$$

$$|\ln(1+u)| = |Cx| \quad \Rightarrow \quad \ln\left(1+\frac{y}{x}\right) = \pm Cx \quad \Rightarrow \quad \ln\left(1+\frac{y}{x}\right) = Cx$$

$$1+\frac{y}{x} = e^{Cx} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x} = e^{Cx} - 1 \quad \Rightarrow \quad y = x\left(e^{Cx}-1\right),\ C \in \mathbb{R}$$

In procesul de separare a variabilelor am presupus $(1+u)\ln(1+u) \neq 0$

$\left(1+\frac{y}{x}\right)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1+\frac{y}{x} = 0$, $y = -x$ nu convine si

$$\ln\left(1+\frac{y}{x}\right) = 0,\ 1+\frac{y}{x} = 1,\ y = 0.$$

Ultima solutie este inclusa in solutia generala pentru $C = 0$.

5.3.5 Ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi

Definiţie: O *ecuaţie diferenţială liniară de ordinul întâi* este o ecuaţie liniară în funcţia necunoscută $y = y(x)$ şi în derivata sa dy/dx. În general o astfel de ecuaţie are forma:

$$A(x)\frac{dy}{dx} + B(x)y = f(x) \tag{5.36}$$

cu coeficienţii $A(x)$, $B(x)$ şi $f(x)$ funcţii definite pe un interval (α, β).

Dacă $f(x) = 0$, ecuaţia se numeşte *omogenă*. În caz contrar, *neomogenă*.

Presupunem că $A(x) \neq 0$, şi împărţim ecuaţia (5.36) cu $A(x)$:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \tag{5.37}$$

În această ecuaţie $p(x) = B(x)/A(x)$ şi $q(x) = f(x)/A(x)$.

Teorema: Dacă funcţiile $p(x)$ şi $q(x)$ sunt continue pe $[a,b] \subset (\alpha, \beta)$, atunci ecuaţia (5.37) are soluţie unică care satisface condiţia iniţială $y(x_0) = y_0$, unde punctul (x_0, y_0) aparţine benzii $a < x < b$, $-\infty < y < +\infty$.

Demonstraţie: Rezolvăm ecuaţia (5.37) în y':

$$y' = -p(x)y + q(x) \tag{5.38}$$

Această ecuaţie are în partea dreaptă $f(x,y) = -p(x)y + q(x)$ şi aceasta functie satisface condiţiile din Teorema 1 de existenţă şi unicitate. Anume, $f(x,y)$ este continuă în variabilele x şi y şi are derivată parţială $\partial f / \partial y = -p(x)$ mărginită în bandă. Deci teorema este demonstrată.

□ Integrare prin metoda variaţiei de constantă

O ecuaţie diferenţială liniară *omogenă*, corespunzătoare ecuaţiei (5.37), are forma:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \tag{5.39}$$

Această ecuaţie se integrează separând variabilele:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C|$$

$$y(x) = Ce^{-\int p(x)dx} \tag{5.40}$$

Observaţie: Împărţind cu *y*, pierdem soluţia $y = 0$. Aceasta poate fi inclusă în familia soluţiilor (5.40) dacă permitem lui *C* şi valoarea zero.

Formula (5.40) reprezintă *soluţia generală* pentru ecuaţia (5.39) în banda $a < x < b$, $-\infty < y < +\infty$.

Ecuaţia liniară neomogenă (5.37) $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$, poate fi integrată folosind *metoda variaţiei de constantă*. Aceasta constă în următoarele:
Mai întâi integrăm ecuaţia omogenă:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0,$$

a cărei soluţie, stim deja, este:

$$y(x) = Ce^{-\int p(x)dx}$$

unde *C* este o constantă arbitrară.
Apoi, facem constanta *C* functie, $C \to C(x)$, si căutăm o soluţie pentru ecuaţia neomogenă sub forma:

$$y(x) = C(x)e^{-\int p(x)dx} \tag{5.41}$$

unde $C(x)$ este o nouă funcţie necunoscută.

Calculăm derivata funcţiei (5.41) şi o substituim împreună cu funcţia în ecuaţia neomogenă (5.37):

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x) \qquad (5.37)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dC}{dx}e^{-\int p(x)dx}+C(x)e^{-\int p(x)dx}\left(-p(x)\right)$$

Înlocuim in ecuaţia (5.37):

$$\frac{dC}{dx}e^{-\int p(x)dx}+C(x)e^{-\int p(x)dx}\left(-p(x)\right)+p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx}=q(x)$$

$$\frac{dC}{dx}+C(x)\left(-p(x)\right)+p(x)C(x)=q(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$\frac{dC}{dx}=q(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$dC=q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

$$C(x)=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C \qquad (5.42)$$

unde *C* este o constantă de integrare.
Atunci:

$$y(x)=C(x)e^{-\int p(x)dx}$$

$$y(x)=\left(C+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right)e^{-\int p(x)dx}$$

$$y(x)=Ce^{-\int p(x)dx}+e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx \qquad (5.43)$$

Aceasta este *soluţia generală* a ecuaţiei diferenţiale liniare neomogene (5.37). Se observă că soluţia generală pentru ecuaţia liniara si neomogena (5.37) este suma soluţiei generale a ecuaţiei omogene (5.39) şi a soluţiei particulare pentru ecuaţia neomogenă (5.37) care rezultă din (5.43) pentru $C=0$, adică:

$$y_{gen.neomogena}=y_{gen.omogena}+y_{partic.neomogena} \qquad (5.44)$$

Exemplu 1: Integraţi ecuaţia diferenţială liniară:

$$\frac{dy}{dx}+y\cos x=2\cos x$$

Rezolvam ecuatia omogena:

$$\frac{dy}{dx}+y\cos x=0 \qquad \frac{dy}{y}=-\cos x\ dx \qquad \ln|y|=-\sin x+\ln|C|$$

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\sin x \qquad \left|\frac{y}{C}\right| = e^{-\sin x} \qquad y(x) = Ce^{-\sin x}$$

Pentru a rezolva ecuatia neomogena, aplicam variatia de constanta. Facem constanta *C* functie, $C \to C(x)$,

$$y(x) = C(x)e^{-\sin x}$$

$$\frac{dC(x)}{dx}e^{-\sin x} + C(x)e^{-\sin x}\cdot(-\cos x) + C(x)e^{-\sin x}\cdot\cos x = 2\cos x$$

$$\frac{dC(x)}{dx}e^{-\sin x} = 2\cos x \qquad dC(x) = 2\cos x\, e^{\sin x}dx$$

$$C(x) = 2\int \cos x\, e^{\sin x}dx \qquad C(x) = 2e^{\sin x} + C$$

$$y(x) = Ce^{-\sin x} + 2$$

Observăm că 2 este o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene.

Exemplu 2: Integraţi ecuaţia diferenţială liniară:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$$

Desigur are forma generala: $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$

Incepem cu rezolvarea ecuatiei *omogene*:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0 \qquad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \qquad \ln|y| = \ln|x| + \ln|C|$$

$y(x) = Cx$ soluţia generală a ecuaţiei omogene

Căutăm soluţia ecuaţiei *neomogene* cu metoda *variaţiei de constantă*. Facem constanta *C* functie, $C \to C(x)$,

$$y(x) = C(x)x$$

$$\frac{dC(x)}{dx}x + C(x) - \frac{1}{x}\,C(x)x = x$$

$$\frac{dC(x)}{dx}x = x \qquad dC(x) = dx$$

$$C(x) = x + C$$

Deci, soluţia generală a ecuaţiei neomogene este: $y(x) = (x + C)x$

$$y(x) = Cx + x^2$$

Observăm că x^2 este o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene.

Observaţie: Dacă soluţia particulară a ecuaţiei liniare neomogene poate fi ghicită, atunci căutarea soluţiei generale este mult simplificată.

Exemplu 3: $y' + y = x + 3$

Rezolvam ecuatia *omogena*:

$$\frac{dy}{dx} + y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = -x + C$$

$$|y| = e^{-x+C} \quad \Rightarrow \quad |y| = e^{C} e^{-x} \quad \Rightarrow \quad |y| = Ce^{-x}$$

$y = \pm Ce^{-x} \quad \Rightarrow \quad y(x) = Ce^{-x}$ solutia generala a ecuatiei omogena

Cautam solutia ecuatiei *neomogene* in forma:

$$y(x) = C(x)e^{-x}$$

$$\frac{dC(x)}{dx}e^{-x} + C(x)e^{-x}(-1) + C(x)e^{-x} = x + 3$$

$$\frac{dC(x)}{dx}e^{-x} = x + 3 \qquad dC(x) = (x+3)e^{x}dx$$

$$\int dC(x) = \int (x+3)e^{x}dx \qquad \int dC(x) = \int xe^{x}dx + 3\int e^{x}dx$$

$$\int dC(x) = \left(xe^{x} - \int e^{x}dx\right) + 3\int e^{x}dx \qquad C(x) = xe^{x} + 2e^{x} + C$$

$$y(x) = \left(xe^{x} + 2e^{x} + C\right)e^{-x}$$

$$y(x) = Ce^{-x} + x + 2$$

Observăm că $x+2$ este o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene.

□ Pentru rezolvarea ecuaţiei liniare neomogene se poate utiliza şi altă metodă, un fel de truc. Căutăm soluţia în forma unui produs:

$$y(x) = u(x)\cdot v(x) \tag{5.43}$$

Si înlocuim in ecuaţia (5.37): $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$$

$$u'v + \left(v' + p(x)v\right)u = q(x) \tag{5.44}$$

Dacă se alege funcţia v astfel încât $v' + p(x)v = 0$ şi funcţia u astfel ca $u'v = q(x)$, atunci cu u şi v astfel determinate, soluţia generală a ecuaţiei liniare neomogene (5.37) este $y(x) = u(x)\cdot v(x)$.

Exemplu: Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei:

$$y' + 2xy = xe^{-x^2}$$

Căutăm soluţia acestei ecuaţii deferenţiale în forma:

$$y(x) = u(x)\cdot v(x)$$

$$u'v + uv' + 2xuv = xe^{-x^2} \qquad u'v + (v' + 2xv)u = xe^{-x^2}$$

Considerăm $v(x)$ o soluţie a ecuaţiei $v' + 2xv = 0$, ecuatie cu variable separabile

$$\frac{dv}{v} = -2xdx \qquad v(x) = Ce^{-x^2}$$

Alegem pentru $v(x)$ o soluţie particulară, de exemplu pentru $C = 1$. Atunci, pentru funcţia $u(x)$ avem ecuaţia:

$$u'v = xe^{-x^2}$$

$$u'e^{-x^2} = xe^{-x^2} \qquad u' = x \qquad u(x) = \frac{x^2}{2} + C$$

Soluţia generală a ecuaţiei neomogene date este:

$$y(x) = u(x) \cdot v(x) = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)e^{-x^2}$$

Observaţie: Metoda variaţiei de constantă are avantajul că poate fi generalizată la ecuaţii diferenţiale liniare neomogene de ordin superior.

- Metoda factorului integrant

Inmultim ecuatia $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$ cu un factor integrant, o functie de x, $\mu(x)$

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)y = \frac{d}{dx}\big(\mu(x)y\big) = \mu(x)q(x) \tag{5.45}$$

A doua egalitate (5.45) poate fi integrata imediat:

$$\mu(x)y = \int \mu(x)q(x)dx \tag{5.46}$$

Iar factorul integrant necesar se determina din prima egalitate (5.45):

$$\frac{d}{dx}\big(\mu(x)y\big) = \mu(x)\frac{dy}{dx} + \frac{d\mu}{dx}y = \mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)y$$

Ceea ce conduce la relatia:

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu(x)p(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mu}{\mu} = p(x)dx \quad \Rightarrow \quad \mu(x) = e^{\int p(x)dx} \tag{5.47}$$

Exemplu: $\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x$

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)2xy = \frac{d}{dx}\big(\mu(x)y\big) = \mu(x)4x$$

$$\mu(x)y = \int \mu(x)4xdx$$

$$\frac{d}{dx}\big(\mu(x)y\big) = \mu(x)\frac{dy}{dx} + \frac{d\mu}{dx}y = \mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)2xy$$

$$\frac{d\mu}{dx}=\mu(x)2x \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mu}{\mu}=2xdx \quad \Rightarrow \quad \mu(x)=Ce^{x^2} \ , \quad C=1$$
$$e^{x^2}y=\int e^{x^2}4xdx \quad \Rightarrow \quad e^{x^2}y=2e^{x^2}+C \quad \Rightarrow \quad y(x)=Ce^{-x^2}+2$$

5.3.6 Ecuaţia diferenţială Bernoulli

Ecuaţia Bernoulli este o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi de forma:

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^{\alpha} \qquad (5.48)$$

unde $\alpha \in \mathbb{R}-\{0,1\}$, iar *p* şi *q* sunt funcţii continue pe un interval, cunoscute.

$y(x)=0$ clar este solutie. Impartim cu y^{α}

$$\frac{1}{y^{\alpha}}\frac{dy}{dx}+p(x)y^{1-\alpha}=q(x)$$

$$\frac{1}{1-\alpha}\frac{d}{dx}\left(y^{1-\alpha}\right)+p(x)y^{1-\alpha}=q(x)$$

$$\frac{dz}{dx}+(1-\alpha)p(x)z=(1-\alpha)q(x)$$

- Prin substituţia $z=y^{1-\alpha}$, ecuaţia Bernoulli se reduce la o ecuaţie diferenţială liniară în necunoscuta *z*.

$$y=z^{\frac{1}{1-\alpha}} \qquad (5.49)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1-\alpha}z^{\frac{1}{1-\alpha}-1}\frac{dz}{dx}=\frac{1}{1-\alpha}z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\frac{dz}{dx}$$

Ecuaţia (5.48) devine:

$$\frac{1}{1-\alpha}z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\frac{dz}{dx}+p(x)z^{\frac{1}{1-\alpha}}=q(x)z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$
$$\frac{1}{1-\alpha}\frac{dz}{dx}+p(x)z=q(x)$$
$$\frac{dz}{dx}+(1-\alpha)p(x)z=(1-\alpha)q(x) \qquad (5.50)$$

Deci, este o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul întâi în necunoscuta *z*.

Exemple:

1. Rezolvati problema Cauchy**:** $\begin{cases} y'+\dfrac{4}{x}y=x^3y^2 \\ y(2)=-1, \quad x>0 \end{cases}$

Facem substitutia $z = y^{1-2} \quad \Rightarrow \quad z = y^{-1} \quad \Rightarrow \quad y = z^{-1}$

$$(-1)z^{-2}\frac{dz}{dx} + \frac{4}{x}z^{-1} = x^3 z^{-2}$$

$$(-1)\frac{dz}{dx} + \frac{4}{x}z^{1} = x^3$$

$$\frac{dz}{dx} - \frac{4}{x}z = -x^3 \quad \text{ecuatie diferentiala liniara}$$

Rezolvam ecuatia omogena:

$$\frac{dz}{dx} - \frac{4}{x}z = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{z} = \frac{4}{x}dx \quad \Rightarrow \quad \ln|z| = 4\ln|x| + \ln|C|$$

$$\ln\left|\frac{z}{C}\right| = \ln x^4 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{z}{C}\right| = x^4 \quad \Rightarrow \quad z = \pm C x^4 \quad \Rightarrow \quad z(x) = Cx^4$$

Cautam solutia pentru ecuatia neomogena in forma: $z(x) = C(x)x^4$

$$\frac{dC(x)}{dx}x^4 + C(x)4x^3 - \frac{4}{x}C(x)x^4 = -x^3$$

$$\frac{dC(x)}{dx}x^4 = -x^3 \quad \Rightarrow \quad dC(x) = -\frac{1}{x}dx \quad \Rightarrow \quad C(x) = -\ln|x| + C$$

$$z(x) = \left(-\ln|x| + C\right)x^4 \quad \Rightarrow \quad z(x) = Cx^4 - x^4\ln x$$

$$y(x) = \frac{1}{Cx^4 - x^4 \ln x}$$

Aceasta este solutia generala a ecuatiei Bernoulli data. Pentru a gasi solutia problemei Cauchy, trebuie sa determinam constanta din conditia initiala a problemei.

$$y(2) = -1 \quad \Rightarrow \quad -1 = \frac{1}{C\cdot 2^4 - 2^4 \ln 2} \quad \Rightarrow \quad C = \ln 2 - \frac{1}{16}$$

$$y(x) = \frac{1}{\left(\ln 2 - \frac{1}{16}\right)x^4 - x^4 \ln x} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{-16}{x^4\left(1 + 16\ln\frac{x}{2}\right)}$$

2. Rezolvati problema Cauchy**:** $\begin{cases} y' - 5y = e^{-2x}y^{-2} \\ y(0) = 2 \end{cases}$

$$z = y^{1-(-2)} \quad \Rightarrow \quad z = y^3 \quad \Rightarrow \quad y = z^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{1}{3}z^{\frac{1}{3}-1}\frac{dz}{dx} - 5z^{\frac{1}{3}} = e^{-2x}\left(z^{\frac{1}{3}}\right)^{-2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3}z^{-\frac{2}{3}}\frac{dz}{dx} - 5z^{\frac{1}{3}} = e^{-2x}z^{-\frac{2}{3}}$$

$$\frac{1}{3}\frac{dz}{dx} - 5z = e^{-2x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} - 15z = 3e^{-2x} \quad \text{ecuatie diferentiala liniara}$$

$$\frac{dz}{dx}-15z=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{dz}{z}=15dx \quad\Rightarrow\quad \ln|z|=15x+\ln|C| \quad\Rightarrow\quad \ln\left|\frac{z}{C}\right|=15x$$

$$\left|\frac{z}{C}\right|=e^{15x} \quad\Rightarrow\quad z=\pm Ce^{15x} \quad\Rightarrow\quad z(x)=Ce^{15x}$$

Cautam solutia pentru ecuatia neomogena in forma: $z(x)=C(x)e^{15x}$

$$\frac{dC(x)}{dx}e^{15x}+C(x)e^{15x}\cdot 15-15\cdot C(x)e^{15x}=3\cdot e^{-2x}$$

$$\frac{dC(x)}{dx}e^{15x}=3\cdot e^{-2x}$$

$$dC(x)=3\cdot e^{-17x}dx \quad\Rightarrow\quad C(x)=-\frac{3}{17}e^{-17x}+C$$

$$z(x)=\left(-\frac{3}{17}e^{-17x}+C\right)e^{15x}=Ce^{15x}-\frac{3}{17}e^{-2x}$$

$$y(x)=\left(Ce^{15x}-\frac{3}{17}e^{-2x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Aceasta este solutia generala a ecuatiei Bernoulli data. Pentru a gasi solutia problemei Cauchy, trebuie sa determinam constanta din conditia initiala a problemei.

$$y(0)=2 \quad\Rightarrow\quad 2=\left(Ce^{0}-\frac{3}{17}e^{0}\right)^{\frac{1}{3}} \quad\Rightarrow\quad 2^{3}=\left(C-\frac{3}{17}\right) \quad\Rightarrow\quad C=\frac{139}{17}$$

$$y(x)=\left(\frac{139}{17}e^{15x}-\frac{3}{17}e^{-2x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

3. Rezolvati problema Cauchy**:** $\begin{cases} 6y'-2y=xy^{4} \\ y(0)=-2 \end{cases}$

$$z=y^{1-4} \qquad z=y^{-3} \qquad y=z^{-\frac{1}{3}}$$

$$6\left(-\frac{1}{3}\right)z^{-\frac{1}{3}-1}\frac{dz}{dx}-2z^{-\frac{1}{3}}=x\left(z^{-\frac{1}{3}}\right)^{4}$$

$-2z^{-\frac{4}{3}}\dfrac{dz}{dx}-2z^{-\frac{1}{3}}=x\cdot z^{-\frac{4}{3}} \quad\Rightarrow\quad \dfrac{dz}{dx}+z=-\dfrac{1}{2}x$ ecuatie diferentiala liniara

$$\frac{dz}{dx}+z=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{dz}{z}=-dx \quad\Rightarrow\quad \ln|z|=-x+\ln|C|$$

$$\Rightarrow\quad \ln\left|\frac{z}{C}\right|=-x \quad\Rightarrow\quad z(x)=Ce^{-x}$$

Cautam solutia pentru ecuatia neomogena in forma: $z(x)=C(x)e^{-x}$

$$\frac{dC(x)}{dx}e^{-x}+C(x)e^{-x}\cdot(-1)+C(x)e^{-x}=-\frac{1}{2}x$$

$$\frac{dC(x)}{dx}e^{-x}=-\frac{1}{2}x \quad \Rightarrow \quad dC(x)=-\frac{1}{2}xe^{x}dx$$

$$C(x)=-\frac{1}{2}\left(xe^{x}-\int e^{x}dx\right)+C \quad \Rightarrow \quad C(x)=-\frac{1}{2}xe^{x}+\frac{1}{2}e^{x}+C$$

$$z(x)=\left(-\frac{1}{2}xe^{x}+\frac{1}{2}e^{x}+C\right)e^{-x}=Ce^{-x}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

$$y(x)=\left(Ce^{-x}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

Aceasta este solutia generala a ecuatiei Bernoulli data. Pentru a gasi solutia problemei Cauchy, trebuie sa determinam constanta din conditia initiala a problemei.

$$y(0)=-2 \;\Rightarrow\; -2=\left(Ce^{-0}-\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} \;\Rightarrow -2=\left(C+\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

$$(-2)^{3}=\left(C+\frac{1}{2}\right)^{-1} \quad \Rightarrow \quad C=-\frac{5}{8}$$

$$y(x)=\left(-\frac{5}{8}e^{-x}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

- Altă metodă de integrare a ecuaţiei Bernoulli este ”trucul” de cautare a solutiei in forma produsului:

$$y(x)=u(x)\cdot v(x) \tag{5.51}$$

Inlocuim in ecuatia Bernoulli (5.48) $\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^{\alpha}$

$$u'v+\left(v'+p(x)v\right)u=q(x)u^{\alpha}v^{\alpha}$$

Cu $v(x)$ soluţie netrivială a ecuaţiei $v'(x)+p(x)v(x)=0$, $u(x)$ este definită de ecuaţia:

$$\frac{du}{dx}=q(x)u^{\alpha}v^{\alpha-1}$$

Exemplu: Determinaţi soluţia generală a următoarei ecuaţii Bernoulli:

$$y'-y\;tgx=-y^{2}\cos x$$

Căutăm soluţia în forma:

$$y(x)=u(x)\cdot v(x)$$

$$u'v + uv' - uv\ tgx = -u^2v^2\cos x$$
$$u'v + u\left(v' - v\ tgx\right) = -u^2v^2\cos x$$

Alegem $v(x)$ astfel încât să fie o soluţie netrivială a ecuaţiei:

$$v' - v\ tgx = 0$$
$$\frac{dv}{dx} = v\frac{\sin x}{\cos x} \qquad \int\frac{dv}{v} = \int\frac{\sin x}{\cos x}dx,\ \text{cu}\ \varphi = \cos x$$
$$\ln|v| = -\int\frac{d\varphi}{\varphi} \qquad \ln|v| = -\ln|\varphi| + \ln|C|$$
$$v(x) = \frac{C}{\cos x}$$

Alegem pentru $v(x)$ o soluţie particulară, de exemplu pentru $C = 1$. Atunci pentru funcţia $u(x)$ avem ecuaţia:

$$u'\frac{1}{\cos x} = -u^2\frac{1}{\cos^2 x}\cos x$$
$$u' = -u^2 \qquad \frac{du}{u^2} = -dx \qquad -\frac{1}{u} = -x + C$$
$$u = \frac{1}{x - C} = \frac{1}{x + C'}$$

Soluţia generală a ecuaţiei Bernoulli data este:

$$y(x) = u(x)\cdot v(x) = \frac{1}{(x + C)\cos x}$$

5.3.7 Ecuaţii cu diferenţiale totale exacte

Ecuaţia diferenţială de ordinul întâi, scrisa in forma simetrica

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{5.52}$$

se numeşte *ecuaţie cu diferenţială totală exactă* dacă există o funcţie de două variabile $u(x,y)$ continuă pe un domeniu D care are proprietatea că

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = M(x,y)dx + N(x,y)dy \tag{5.53}$$

În acest caz ecuaţia diferenţială poate fi scrisă sub forma $du = 0$ ceea ce înseamnă că soluţia generală a ecuaţiei este $u(x,y) = C$ cu C constantă arbitrară.

Presupunem că funcţiile $M(x,y)$ şi $N(x,y)$ au derivate parţiale continue în raport cu y şi respectiv x, pe un domeniu D din planul xy.

Teorema: Condiţia necesară şi suficientă ca partea stângă a ecuaţiei (5.52) să fie diferenţială totală exactă a unei funcţii $u(x,y)$ este:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \tag{5.53}$$

Demonstraţie:
Necesitatea: Presupunem că partea stângă a ecuaţiei (5.52) este diferenţială totală exactă a unei funcţii $u(x,y)$, adică

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$$

Atunci:

$$M=\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{şi} \quad N=\frac{\partial u}{\partial y}$$

Derivăm parţial *M* în raport cu *y* şi *N* în raport cu *x*:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} \quad \text{şi} \quad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$$

Deoarece derivatele parţiale mixte sunt egale, atunci:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

Suficienţa: Presupunem condiţia (5.53) îndeplinită şi căutăm să determinăm $u(x,y)$ care are diferenţiala $du=M(x,y)dx+N(x,y)dy$. Deci trebuie să aibă loc:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y) \quad \text{şi} \quad \frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y) \tag{5.54}$$

Mai, întâi căutăm $u(x,y)$ care să satisfacă prima condiţie (5.54). Integrăm această condiţie în raport cu *x*, presupunând *y* constant.

$$u(x,y)=\int M(x,y)dx+\varphi(y) \tag{5.55}$$

Aici, $\varphi(y)$ este o funcţie arbitrară de *y*. Determinăm această funcţie impunând a doua condiţie (5.54), adică derivata parţială a lui *u* în raport cu *y* să fie $N(x,y)$.

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx+\varphi'(y)=N(x.y)$$

$$\varphi'(y)=N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$$

Integrăm în raport cu *y*:

$$\varphi(y) = \int \left(N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx \right) dy + C$$

cu C o constantă de integrare.
Substituim această funcţie în relaţia (5.55) şi obţinem funcţia căutată:

$$u(x, y) = \int M dx + \int \left(N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx \right) dy + C \qquad (5.56)$$

Această funcţie are diferenţiala totală $du = M(x, y)dx + N(x, y)dy$.

Procedura de construcţie a funcţiei $u(x, y)$ din această demonstraţie constitue o metodă de integrare a ecuaţiei diferenţiale (5.52), a cărei parte stângă este diferenţială totală exactă.

Exemplu 1: Verificaţi dacă ecuaţia:

$$e^{-y}dx - \left(2y + xe^{-y}\right)dy = 0$$

este ecuaţie cu diferenţială totală exactă şi integraţi ecuaţia.

$$M(x, y) = e^{-y} \qquad N(x, y) = -\left(2y + xe^{-y}\right)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -e^{-y} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -e^{-y}$$

Conform teoremei, ecuaţia este cu diferenţială totală exactă.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y - xe^{-y}$$

$$u(x, y) = \int M(x, y)dx + \varphi(y)$$

$$u(x, y) = \int e^{-y}dx + \varphi(y)$$

$$u(x, y) = xe^{-y} + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -xe^{-y} + \varphi'(y) \qquad -xe^{-y} + \varphi'(y) = -2y - xe^{-y}$$

$$\varphi'(y) = -2y \qquad \varphi(y) = -y^2 + C$$

$$u(x, y) = xe^{-y} - y^2 + C$$

$$xe^{-y} - y^2 = C \qquad \text{integrala generală}$$

Exemplu 2: Verificaţi dacă ecuaţia:

$$\left(3x^2 + 6xy^2\right)dx + \left(6x^2y + 4y^3\right)dy = 0$$

este ecuaţie cu diferenţială totală exactă şi integraţi ecuaţia.

$$M(x, y) = 3x^2 + 6xy^2 \qquad N(x, y) = 6x^2y + 4y^3$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 12xy \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 12xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^2 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 6x^2 y + 4y^3$$

$$u(x,y) = \int M(x,y)dx + \varphi(y) \qquad u(x,y) = \int \left(3x^2 + 6xy^2\right)dx + \varphi(y)$$

$$u(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y) \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2 2y + \varphi'(y)$$

$$6x^2y + \varphi'(y) = 6x^2y + 4y^3 \qquad \varphi'(y) = 4y^3 \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) = y^4 + C$$

$$u(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 + C$$

$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$ integrala generală

3. $\begin{cases} \left(2xy - 9x^2\right)dx + \left(2y + x^2 + 1\right)dy = 0 \\ y(0) = -3 \end{cases}$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy - 9x^2 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y + x^2 + 1$$

$$u(x,y) = \int M(x,y)dx + \varphi(y) \qquad u(x,y) = \int \left(2xy - 9x^2\right)dx + \varphi(y)$$

$$u(x,y) = yx^2 - 3x^3 + \varphi(y)$$

Din $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y + x^2 + 1$ avem $x^2 + \varphi'(y) = 2y + x^2 + 1$

$$\varphi'(y) = 2y + 1 \qquad \varphi(y) = y^2 + y + C$$

$$u(x,y) = yx^2 - 3x^3 + y^2 + y + C$$

$yx^2 - 3x^3 + y^2 + y = C$ solutia generala

Constanta se determina din $y(0) = -3$, anume $C = 6$.

$yx^2 - 3x^3 + y^2 + y = 6$ solutia particulara

Dacă pentru o ecuaţie diferenţială:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{5.57}$$

are loc inegalitatea

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \tag{5.58}$$

adică, ea nu este ecuaţie cu diferenţială totală exactă, se pune întrebarea dacă nu *există o funcţie* $\mu(x,y)$ cu proprietatea că înmulţind ecuaţia cu această funcţie, ea să devină cu diferenţială totală exactă, adică:

$$\mu(x,y)\left[M(x,y)dx+N(x,y)dy\right]=du(x,y) \qquad (5.59)$$

O astfel de funcţie $\mu(x,y)$ dacă există, se numeşte *factor integrant* al ecuaţiei. Factorul integrant $\mu(x,y)$ satisface ecuaţia:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \qquad (5.60)$$

Ecuaţie care se numeşte *ecuaţia factorului integrant*.
Aceasta ecuatie poate fi scrisa:

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y}+\mu\frac{\partial M}{\partial y}=N\frac{\partial \mu}{\partial x}+\mu\frac{\partial N}{\partial x} \qquad (5.61)$$

$$\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=N\frac{\partial \mu}{\partial x}-M\frac{\partial \mu}{\partial y} \qquad (5.62)$$

Tehnic, aceasta ecuatie are drept necunoscuta o functie de doua variabile $\mu(x,y)$, deci este o ecuatie cu derivate partiale, care este mai dificil de rezolvat. Dar, aici avem nevoie nu de solutia generala, ci de o solutie particulara a acestei ecuatiei. Putem cauta un factor integrant care este functie doar de *x* sau doar de *y* si ecuatia se simplifica considerabil. De exemplu, daca cautam $\mu=\mu(x)$, ecuatia devine:

$$\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=N\frac{\partial \mu}{\partial x} \qquad (5.63)$$