Capitolul 5 Ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi

Bibliografie: Krasnov et al. (1989), Riley et al. (2006), Arnold (1992), Micula & Paval (1989), Pontryagin(1962)

5.1 Noţiuni elementare

Abilitatea teoriilor din fizica de a face predictii in ce priveste evolutia lumii se bazeaza pe capacitatea de a rezolva ecuatii diferentiale; sau cel putin pe abilitatea de a le scrie si a le descrie solutiile calitativ, asimptotic sau in termeni numerici. Deci va aflati in fata celui mai important curs de matematica pentru fizicieni!

Vom incepe cu introducerea unor termeni si unor notiuni care vor forma limbajul pe care-l vom folosi.

O ecuatie diferentiala este o ecuatie in care necunoscutele sunt functii de una sau mai multe variabile si contin atat functiile cat si derivatele acestora. Fizic, sunt relatii intre cantitati si ratele lor de modificare in timp, spatiu sau alta variabila independenta pe care o introducem. Daca functiile necunoscute sunt functii de o singura variabila, atunci ecuatiile diferentiale sunt *ordinare*, iar daca functiile necunoscute sunt functii de mai multe variabile ecuatiile diferentiale sunt cu *derivate partiale*.

O derivata reprezinta rata de modificare instantanee a unei cantitati cu timpul sau cu spatiul:

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y} \qquad\qquad \frac{dy}{dx} = y'$$

O ecuaţie diferenţială *ordinară* este o ecuaţie de tipul:

$$F\left(x, y, y', \cdots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{5.1}$$

care pune în relaţie o variabilă independentă *x*, funcţia necunoscută $y = y(x)$ şi derivatele acesteia $y'(x), y''(x), \cdots, y^{(n)}(x)$. În acest context, *F* este o funcţie cunoscută de argumentele sale. Variabila independenta o notam cu *x* dar adesea o notam si cu *t* in special atunci cand vrem sa gandim ecuatia noastra ca ar descrie evolutia in timp a unei cantitati fizice.

Cea mai simplă ecuaţie diferenţială este:

$$y' = f(x) \tag{5.2}$$

unde $f(x)$ este o funcţie dată, continuă pe un interval (a,b), iar $y = y(x)$ este funcţia necunoscută. Ecuaţii similare apar în calculul integral. Adică, fiind dată o funcţie $f(x)$, trebuie determinată o primitivă a sa $F(x)$. Astfel, o funcţie care verifică ecuaţia (5.2) are forma:

$$y = F(x) + C \tag{5.3}$$

unde $F(x)$ este o primitivă a lui $f(x)$ pe (a,b), iar C este o constantă arbitrară. Solutia (5.3) poate fi scrisa pentru $\forall x_0 \in (a,b)$ astfel:

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(\tau)\,d\tau + C \tag{5.4}$$

Funcţia căutată $y = y(x)$ nu este unic determinată de ecuaţia (5.2). Constanta C ne arata ca avem o infinitate de solutii parametrizate de aceasta constanta.

Definiţie: *Ordinul* unei ecuaţii diferenţiale este ordinul cel mai mare al derivatelor prezente în ecuaţie.

Exemplu: Ecuaţia $y'' + y = 0$ este o ecuaţie diferenţială de ordinul doi.
Funcţia $y(x) = \sin x$ este o soluţie a acestei ecuaţii diferenţiale pe intervalul $(-\infty, +\infty)$

Definiţii:

- Rezolvarea unei ecuaţii diferenţiale se numeşte *integrarea* ecuaţiei diferenţiale.
- Graficul unei soluţii a unei ecuaţii diferenţiale se numeşte *curbă integrală* a ecuaţiei.

Problema 1: Determinaţi o curbă astfel încât panta curbei în fiecare punct să fie egală cu ordonata punctului respectiv.

Fie $y = y(x)$ ecuaţia curbei căutate. Panta curbei este $tg\alpha = y'(x)$. Proprietatea curbei din enunţ este descrisă de ecuaţia diferenţială de ordinul întâi:

$$y' = y$$

$$\frac{dy}{dx} = y \qquad \frac{dy}{y} = dx \qquad \int \frac{dy}{y} = \int dx \qquad \ln|y| = x + C \qquad y = e^{x+C} \qquad y = Ce^{x}$$

Conform integrării de mai sus, ecuaţia are un număr infinit de soluţii, unde C este o constantă care parametrizeaza solutia.

Generalizarea ecuatiei diferentiale din aceasta problema este:

$$y' = ay \ , \ a = ct \tag{5.5}$$

Aceasta reprezinta cea mai importanta ecuatie diferentiala din lume! Rata de crestere ($a > 0$) sau descrestere $(a < 0)$ a unei cantitati este proportionala cu cantitatea. Ecuatia descrie evolutia demografica, procesele de dezintegrare radioactiva. Aceasta ecuatie are forma rezolvata in derivata:

$$y' = f(x, y) \tag{5.6}$$

Unde, $f(x, y)$ este definita pe un domeniu D din planul $\mathbb{R}^2$. Prin fiecare punct al acestui domeniu vom desena o dreapta cu panta $f(x, y)$, dreapta ce are vectorul director cu componentele $(1, f)$. Acest camp de vectori se numeste *campul directiilor* ecuatiei diferentiale ordinare. Solutiile ecuatiei (5.6) sunt curbe $y(x)$ care in fiecare punct al domeniului D sunt tangente la campul directiilor. Acestea stim deja, se numesc *curbe integrale*. Campul directiilor este reprezentarea geometrica a ecuatiei diferentiale iar curbele integrale sunt reprezentarea geometrica a solutiilor ecuatiei diferentiale.

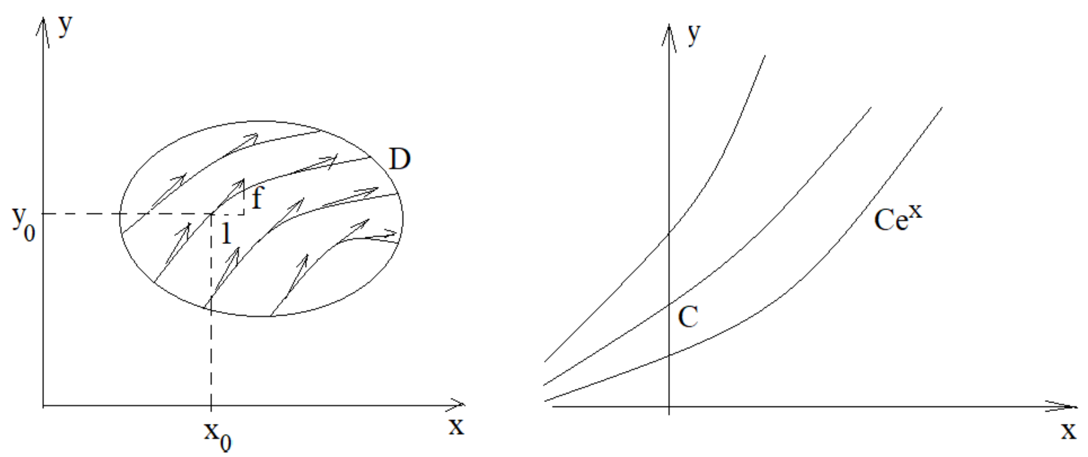

Figura 5.1 a) curbe integrale si campul directiilor b) curbe integrale pentru ecuatia diferentiala $y' = y$

Revenim la cea mai importanta ecuatie diferenţială din lume:

$$\dot{y} = ay \qquad (5.7)$$

unde *a* este o constantă. Descrie o situatie in care rata de crestere (pentru *a* real pozitiv) sau de descrestere ($a<0$) a unei cantitati fizice este proportionala cu cantitatea respectiva. Daca *y* reprezinta o populatie, rata de crestere a acesteia este proportionala cu numarul indivizilor in ipoteza ca hrana este suficienta.

Solutia acestei ecuatii diferentile este:

$$\frac{dy}{dt} = ay \qquad \frac{dy}{y} = adt \qquad \ln|y| = at + C \qquad |y| = e^{at+C}$$

$$y = Ce^{at} \qquad (5.8)$$

unde *C* este o constantă. Prezenta lui *C* subliniaza o proprietate importanta a ecuatiilor diferentiale, acestea au *un număr infinit de soluţii parametrizate de constante*. Numarul constantelor trebuie sa fie egal cu ordinul ecuatiei.

In figura 5.2 am reprezentat campul directiilor pentru ecuatia (5.7). Din forma acestuia se vede ca *y* creste cu timpul *t*. Am reprezentat trei dintre curbele integrale ale ecuatiei cu trei constante *C* diferite ($a=2$).

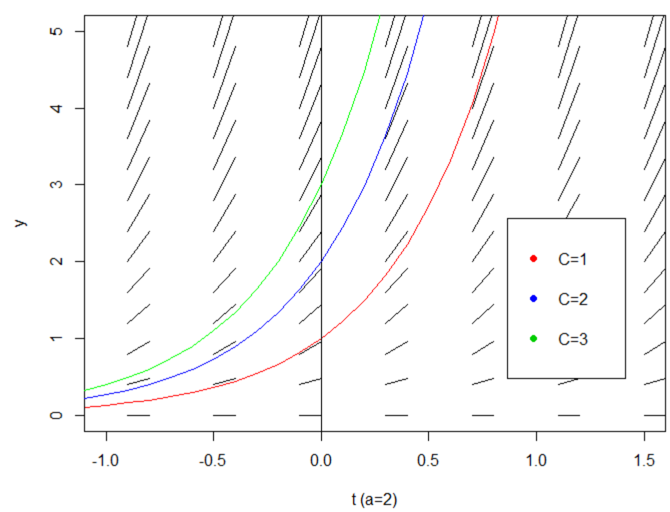

Figura 5.2 Campul directiilor pentru ecuatia $\dot{y} = ay$ si curbele integrale $y(t) = Ce^{at}$ pentru trei valori ale constantei.

Ecuatia de reproducere (5.7) este aplicabila atata timp cat *y* nu este prea mare. Pe masura ce *y* creste competitia pentru hrana duce la scaderea ratei de reproductie. In ipoteza $a = m - ny$, ecuatia de reproductie ia in considerare competitia pentru hrana, si are forma:

$$\dot{y} = (m - ny)y \qquad (5.9)$$

Daca $m = n = 1$ obtinem *ecuatia logistica*:

$$\dot{y} = (1 - y)y \tag{5.10}$$

Campul directiilor pentru ecuatia logistica (5.10) este reprezentat in figura 5.3.

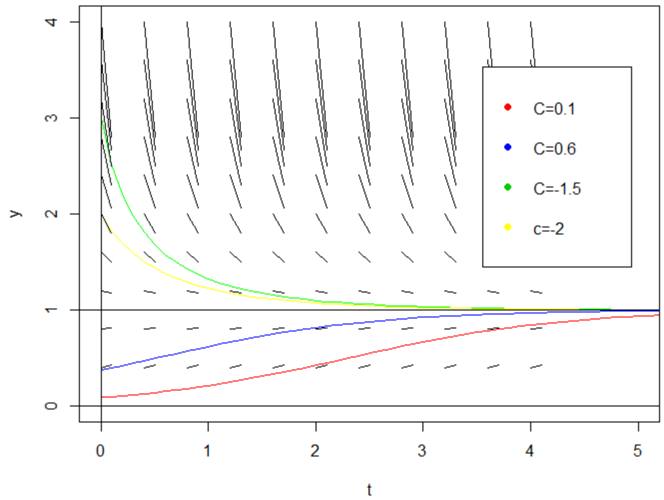

Figura 5.3 Campul directiilor pentru ecuatia $\dot{y} = (1 - y)y$ si curbele integrale $y(t) = \dfrac{Ce^t}{1 + Ce^t}$ pentru diverse valori ale constantei.

Procesul descris are doua pozitii de echilibru $y = 0$ si $y = 1$. Pentru $y \in (0,1)$ campul este orientat de la 0 spre 1 si pentru $y > 1$ campul directiilor coboara spre 1. Astfel pozitia de echilibru 0 este instabila in timp ce pozitia de echilibru 1 este stabila (o populatie mai mica creste si o populatie mai mare va descreste). Pentru orice stare $y > 0$ pe masura ce timpul trece procesul se misca spre starea de echilibru stabil. Solutia generala se determina prin separarea variabilelor.

$$\frac{dy}{dt} = (1 - y)y$$

$$\int \frac{dy}{(1 - y)y} = \int dt \qquad -\int \left(\frac{1}{y - 1} - \frac{1}{y} \right) dy = t + C$$

$$-\ln|y - 1| + \ln|y| = t + C \qquad \ln\left| \frac{y}{y - 1} \right| = t + C$$

$$\frac{y}{y - 1} = Ce^t \qquad y = yCe^t - Ce^t \qquad y(t) = \frac{Ce^t}{1 + Ce^t}$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{Ce^t}{1+Ce^t} = 1$$

Aceste curbe se numesc curbe logistice. Cele cu $C > 0$ descriu trecerea de la starea 0 la starea 1 intr-un timp infinit.

Problema 2: Determinaţi legea mişcării rectilinii a unui punct material care se mişcă cu o acceleraţie constantă *a*.

Fie $s = s(t)$ legea de mişcare căutată. Din enunţ avem următoarea ecuaţie diferenţială de ordinul doi pentru această funcţie:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = a \tag{5.11}$$

Prin două integrări succesive obţinem:

$$\frac{ds}{dt} = at + C_1 \tag{5.12}$$

$$s(t) = a\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2 \tag{5.13}$$

Constantele de integrare C_1, C_2 pot fi determinate impunând condiţii iniţiale.

$$s\Big|_{t=t_0} = s_0 \qquad \frac{ds}{dt}\Big|_{t=t_0} = v_0$$

$$s_0 = a\frac{t_0^2}{2} + C_1 t_0 + C_2 \qquad v_0 = at_0 + C_1$$

$$C_1 = v_0 - at_0 \qquad C_2 = s_0 - a\frac{t_0^2}{2} - (v_0 - at_0)t_0$$

$$s(t) = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a(t-t_0)^2}{2} \tag{5.14}$$

Fie $F(x, y, y') = 0$ o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi. Dacă este rezolvabilă în y', obţinem o altă formă a ecuaţiei:

$$y' = f(x, y) \tag{5.15}$$

unde $f(x, y)$ este o funcţie cunoscută în argumentele sale.

O altă formă echivalentă a ecuaţiei este:

$$dy - f(x, y)dx = 0$$

sau, mai general, punand pe pozitie de egalitate variabila independenta x si variabila dependenta y, obtinem forma simetrica a ecuatiei diferentiale:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{5.16}$$

Vom vedea ca ecuatiile diferentiale ajung intr-o astfel de forma inainte de integrare.

Această ecuaţie este obţinută din precedenta prin înmulţire cu o funcţie $N(x,y) \neq 0$. Funcţiile $M(x,y)$ şi $N(x,y)$ sunt funcţii cunoscute.

Două ecuaţii diferenţiale $F_1(x,y,y') = 0$ şi $F_2(x,y,y') = 0$ sunt *echivalente* pe un domeniu, dacă orice soluţie $y(x)$ a unei ecuaţii diferenţiale este soluţie şi pentru cealaltă ecuaţie şi vice versa.

In general, o ecuaţie diferenţială are o infinitate de soluţii. Pentru a preciza o anumită soluţie a ecuaţiei $y' = f(x,y)$ trebuie să impunem o *condiţie iniţială*, adică să presupunem că la o anumită valoare x_0 a variabilei x funcţia căutată ia o anumită valoare y_0:

$$y\big|_{x=x_0} = y_0 \quad \text{sau} \quad y(x_0) = y_0 \tag{5.17}$$

Geometric, condiţia iniţială implică precizarea unui punct $M_0(x_0, y_0)$ prin care va trece curba integrală căutată.

Definiţie: Problema determinării acelei soluţii a ecuaţiei $y' = f(x,y)$ care verifică condiţia suplimentară $y(x_0) = y_0$, se numeşte *problemă Cauchy* sau *problemă iniţială*.

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{5.18}$$

5.2 Soluţia problemei Cauchy pentru ecuaţiile diferenţiale de ordinul întâi

Are problema Cauchy intotdeauna solutie? Daca gasim o solutie a problemei Cauchy, este aceasta singura solutie sau mai sunt si altele? Cu alte cuvinte, exista o curba integrala care trece prin orice punct $(x_0, y_0) \in D$ si daca acestea se pot intersecta? Raspunsul la aceste intrebari este dat de urmatoarea teorema de existenta si unicitate.

Teorema 1: (existenţa şi unicitatea soluţiei problemei Cauchy) Fie:

$$y' = f(x,y) \tag{5.19}$$

o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi şi fie $f(x,y)$ o funcţie definită pe un domeniu *D* din planul *xy*. Dacă există o vecinătate Ω a unui punct $M_0(x_0, y_0)$ din *D*, pe care $f(x,y)$:

(i) este continuă în toate argumentele

(ii) are derivată parţială $\partial f / \partial y$ mărginită

atunci există un interval $(x_0 - h, x_0 + h)$ pe axa *x* pe care există o *soluţie unică* $y = \varphi(x)$ a ecuaţiei diferentiale (5.19) astfel încât $y_0 = \varphi(x_0)$.

Geometric, înseamnă că prin punctul $M_0(x_0, y_0)$ trece o curbă integrală şi numai una pentru ecuaţia (5.19).

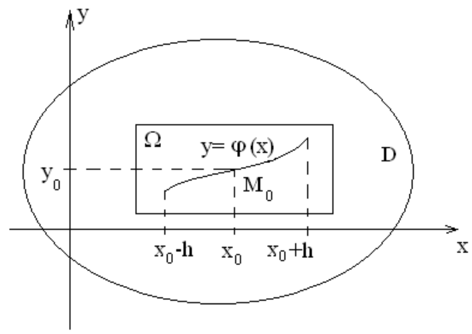

Figura 5.4 Ilustrarea Teoremei 1.

Observaţie: Teorema 1 are natură *locală*: garantează numai existenţa unei soluţii unice $y = \varphi(x)$ pentru ecuaţia (5.19) într-o vecinătate a punctului x_0.

Exemple:

1. Considerăm ecuaţia $y' = x + y$

Funcţia $f(x, y) = x + y$ este definită şi continuă în toate punctele planului *xy* şi $\partial f / \partial y = 1$ peste tot. Cu teorema 1, prin fiecare punct (x_0, y_0) al planului *xy* trece o singura curbă integrală a ecuaţiei.

2. Considerăm ecuaţia $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$

Funcţia $f(x, y) = 3y^{\frac{2}{3}}$ este definită şi continuă în toate punctele planului *xy* şi $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{y^{\frac{1}{3}}}$ şi tinde la infinit pentru $y \to 0$. A doua condiţie din teorema 1 nu este îndeplinită pe axa *x*.

Prin integrare, obţinem $y = (x + C)^3$, $C \in \mathbb{R}$ soluţie a ecuaţiei date.

$$\frac{dy}{dx} = 3y^{\frac{2}{3}} \qquad \frac{dy}{y^{2/3}} = 3dx \qquad \frac{y^{1/3}}{1/3} = 3x + C \qquad y^{\frac{1}{3}} = x + C \qquad y = (x + C)^3$$

Mai mult, şi $y=0$ este soluţie a ecuaţiei date.
Dacă căutăm o soluţie a ecuaţiei date care să satisfacă condiţia $y(0)=0$, obţinem mai multe soluţii, ca de exemplu:

$$y=0, \qquad y=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x^3, & x>0\end{cases}, \qquad y=\begin{cases}x^3, & x<0\\ 0, & x\ge 0\end{cases}, \qquad y=x^3$$

Astfel, prin fiecare punct al axei x trec cel puţin două curbe integrale, şi soluţia nu este unică pe această axă.

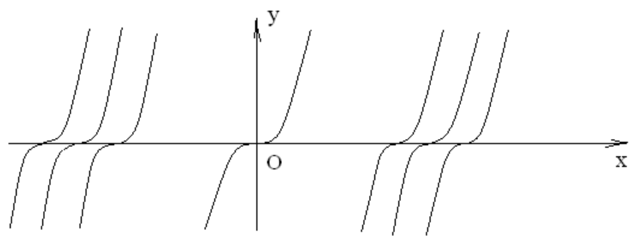

Figura 5.5

Observaţie: Dacă considerăm punctul $M(1,1)$, pe o vecinătate suficient de mică a acestuia, condiţiile din teorema 1 sunt satisfăcute. În consecinţă, prin acest punct, într-un mic pătrat Ω, trece numai curba integrală $y=x^3$ a ecuaţiei $y'=3y^{\frac{2}{3}}$. Dacă considerăm un pătrat Ω suficient de mare (să intersecteze axa *x*), atunci nu vom mai avea soluţie unică. Acest lucru confirmă caracterul local al teoremei 1.

Dacă renunţăm la mărginirea lui $\partial f/\partial y$ obţinem o teoremă de existenţă.

Teorema 2: (existenţa soluţiei problemei Cauchy) Dacă funcţia $f(x,y)$ este continuă pe o vecinătate a punctului (x_0,y_0), atunci ecuaţia $y'=f(x,y)$ are cel puţin o soluţie $y=\varphi(x)$ care în $x=x_0$ ia valoarea y_0.

Definiţie: O *soluţie generală* a ecuaţiei diferenţiale

$$y'=f(x,y) \tag{5.20}$$

pe un domeniu Ω de existenţă şi unicitate a soluţiei problemei Cauchy este o familie uniparametrică *S* de funcţii $y=\varphi(x,C)$ care depind de *x* şi de o constantă arbitrară (parametru), astfel încât:

- Pentru orice C permis, funcţia $y = \varphi(x, C) \in S$ este o soluţie pentru ecuaţia (5.20),
$$\varphi'_x(x, C) = f(x, \varphi(x, C)), \quad x \in (x_0 - h, x_0 + h)$$
- Oricare ar fi condiţia iniţială $y(x_0) = y_0$, există o valoare C_0 pentru C astfel încât soluţia $y = \varphi(x, C_0)$ să satisfacă condiţia iniţială
$$\varphi(x_0, C_0) = y_0$$

Observaţie: s-a presupus că (x_0, y_0) aparţine domeniului Ω de existenţă şi unicitate a soluţiei problemei Cauchy.

Exemplu: Arătaţi că ecuaţia $y' = 1$ are soluţia generală $y = x + C$, cu C constantă arbitrară.

Într-adevăr, $f(x, y) = 1$ şi condiţiile din teorema 1 sunt satisfăcute peste tot. Atunci, prin fiecare punct (x_0, y_0) al planului *xy* trece o singură curbă integrală a ecuaţiei diferenţiale date. Vom testa cele două condiţii din definiţia soluţiei generale:

- $\forall C$ avem $y' = (x + C)' = 1$ astfel încât $y = x + C$ este o soluţie a ecuaţiei date.
- Dacă impunem condiţia iniţială $y(x_0) = y_0$, obţinem $y_0 = x_0 + C$ şi $C_0 = y_0 - x_0$. Atunci, soluţia $y = x + y_0 - x_0$ este în acord cu condiţia iniţială.

Definiţie: O *soluţie particulară* a ecuaţiei diferenţiale
$$y' = f(x, y) \tag{5.21}$$
este o soluţie dedusă din soluţia generală pentru o valoare precizată a lui C.

Observaţie: Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale poate fi definită ca fiind mulţimea tuturor soluţiilor particulare.

Atunci când integrăm o ecuaţie diferenţială ajungem adesea la *integrala generală*, o ecuaţie de forma:
$$\phi(x, y, C) = 0 \tag{5.22}$$
care defineşte implicit soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale iniţiale (5.21). Ecuaţia
$$\phi(x, y, C_0) = 0 \tag{5.23}$$
cu C_0 valoare fixată pentru C, se numeşte *integrală particulară*.

Exemplu: Rezolvaţi problema Cauchy: $\begin{cases} y' = 1+y^2 \\ y(0)=1 \end{cases}$

$$\frac{dy}{dx} = 1+y^2 \qquad \frac{dy}{1+y^2} = dx \qquad \int \frac{dy}{1+y^2} = \int dx \qquad arctg\ y = x + C$$

$x - arctg\ y + C = 0$ integrala generală

$y = tg(x+C)$ soluţia generală

$$y(0)=1 \quad \Rightarrow \quad 1 = tg\ C \quad \Rightarrow \quad C = arctg\ 1 = \frac{\pi}{4}$$

$y = tg\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ soluţia particulară

Definiţie: O soluţie $y = \psi(x)$ a ecuaţiei diferenţiale $y' = f(x,y)$ se numeşte *singulară*, dacă proprietatea de unicitate nu este îndeplinită în fiecare punct al său, adică prin fiecare punct al său (x_0, y_0), pe lângă această soluţie, va trece şi o altă soluţie a ecuaţiei care nu coincide cu $y = \psi(x)$ pe o vecinătate a punctului (x_0, y_0).

Graficul unei soluţii singulare se numeşte *curbă integrală singulară* a ecuaţiei. Geometric, aceasta este o *înfăşurătoare* a familiei de curbe integrale ale ecuaţiei (integrala generală). Înfăşurătoarea unei familii de curbe $\phi(x,y,C)=0$ este o curbă care în fiecare punct este tangentă la câte o curbă din familie.

Dacă pe un domeniu *D* al planului *xy*, ecuaţia $y' = f(x,y)$ satisface condiţiile din teorema 1, atunci prin fiecare punct $(x_0, y_0) \in D$ trece o singură curbă integrală $y = \varphi(x)$ a ecuaţiei. Această curbă aparţine familiei uniparametrice $\phi(x,y,C)=0$ a curbelor care formează integrala generală a ecuaţiei şi se obţine din această familie, pentru o valoare precizată a lui *C*, adică este o integrală particulară a ecuaţiei. Nu este posibil ca alte soluţii să treacă prin (x_0, y_0).

Pentru ca ecuaţia diferenţială $y' = f(x,y)$ să aibă o soluţie *singulară* este necesar să nu fie satisfăcute condiţiile din teorema 1. Dacă funcţia $f(x,y)$ din ecuaţia diferenţială este continuă pe *D*, atunci o soluţie singulară poate trece numai prin punctele în care derivata $\partial f / \partial y$ este nemărginită.

Exemplu: Considerăm ecuaţia diferenţială:

$$y' = 3y^{\frac{2}{3}} \tag{5.24}$$

Funcţia $f(x,y)=3y^{\frac{2}{3}}$ este continuă în toate punctele planului *xy,* dar derivata $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2}{y^{\frac{1}{3}}}$ tinde la infinit pentru $y=0$, adică pe axa *x*. Ecuaţia are soluţia generală $y=(x+C)^3$, adică o familie de parabole cubice, şi soluţia evidentă $y=0$, soluţie care trece prin punctele în care derivata $\partial f/\partial y$ este nemărginită. Soluţia $y=0$ este una *singulară,* deoarece prin fiecare punct al său trec atât parabola cubică cât şi dreapta $y=0$. In fiecare punct al soluţiei $y=0$ proprietatea de unicitate nu este îndeplinită. Soluţia singulară $y=0$ nu rezultă din soluţia generală $y=(x+C)^3$ la nici o valoare numerică a lui *C*.

Observaţie: Dacă mulţimea de puncte în care derivata $\partial f/\partial y$ este nemărginită, este o curbă, se poate ca aceasta să nu fie o soluţie singulară, dacă nu este măcar curbă integrală a ecuaţiei diferenţiale în cauză.
De exemplu, dacă în locul ecuaţiei (5.24) considerăm:

$$y'=3y^{\frac{2}{3}}+a \quad ,a=ct\,,a\neq 0 \tag{5.25}$$

atunci pe drepta $y=0$ derivata $\partial f/\partial y$ este încă nemarginită, dar această dreaptă nu este nici macar curbă integrală pentru ecuaţia (5.25).

Procedura de determinare a *soluţiilor singulare* pentru $y'=f(x,y)$:

- Determinam mulţimea de puncte în care $\partial f/\partial y$ este nemărginită.
- Dacă această mulţime formează una sau mai multe curbe, se verifică dacă ele sunt sau nu curbe integrale pentru ecuaţie.
- Dacă curbele sunt integrale, se verifică dacă proprietatea de unicitate este îndeplinită sau nu în toate punctele acestora.

Dacă toate aceste condiţii sunt îndeplinite, curba este soluţie singulară pentru ecuaţia diferenţială $y'=f(x,y)$.

Probleme:

1) Determinaţi soluţii singulare pentru ecuaţia: $y'=\sqrt{1-y^2}$

Funcţia $f(x,y)=\sqrt{1-y^2}$ este definită şi continuă pentru $-1\le y\le 1$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}\cdot(-2y)=-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$

Derivata $\partial f/\partial y$ este nemărginită pe dreptele $y=1$ şi $y=-1$. Cele două drepte sunt curbe integrale pentru ecuaţia diferenţială dată. Pentru a verifica proprietatea de unicitate în punctele acestor curbe (drepte) căutăm soluţia generală integrând:

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{1-y^2}\,, \qquad \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=dx\,, \qquad \arcsin y = x + C$$

$y=\sin(x+C)$ este soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale dată.

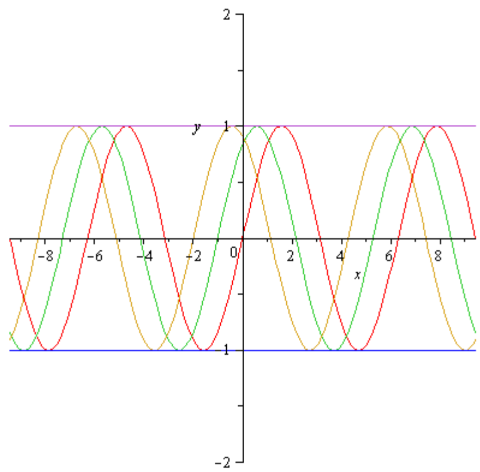

Figura 5.6

Prin fiecare punct al soluţiei $y=1$ trec două curbe: sinusoida $y=\sin(x+C)$ şi dreapta $y=1$. Astfel, în fiecare punct al soluţiei $y=1$ unicitatea nu este îndeplinită. Similar se întâmplă şi pentru $y=-1$. Cele două drepte sunt soluţii singulare.

2) Determinaţi soluţii singulare pentru ecuaţia: $y'=\dfrac{\sqrt{1-y^2}}{y}$

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}\,,\ -1\le y\le 1,\ y\ne 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{1}{y^2\sqrt{1-y^2}}$$

Derivata $\partial f/\partial y$ este nemărginită pe dreptele $y=1$ şi $y=-1$. Cele două drepte sunt curbe integrale pentru ecuaţia diferenţială dată. Pentru a verifica proprietatea de unicitate în punctele acestor curbe (drepte) căutăm soluţia generală integrând:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{1-y^2}}{y} \qquad \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy=dx \qquad -\sqrt{1-y^2}=x+c$$

$(x+C)^2+y^2=1$ este integrala generala a ecuatiei diferentiale.
Solutia generala este formata din cercuri de raza unu si centre $(-C,0)$. Acestea sunt tangente la curbele integrale $y=1$ şi $y=-1$.

5.3 Metode elementare de integrare a ecuaţiilor diferenţiale

In continuare, invatam cateva metode de rezolvare a unor tipuri de ecuatii diferentiale ordinare. Spunem ca o ecuaţie diferenţială este integrabilă prin *cuadraturi* dacă soluţia sa generală poate fi obţinută print-un număr finit de operaţii elementare cu funcţii cunoscute şi prin integrări ale acestora.

5.3.1 Ecuaţii cu variabile separate

Au forma generală:

$$f_1(y)dy = f_2(x)dx \tag{5.26}$$

cu $f_1(y)$ şi $f_2(x)$ funcţii continue cunoscute. Prin integrare obţinem:

$$\int f_1(y)dy = \int f_2(x)dx + C$$

Exemplu: $ydy=-xdx$

Integrăm ambele părţi ale relaţiei şi găsim integrala generală a ecuaţiei diferenţiale date:

$$\frac{y^2}{2}=-\frac{x^2}{2}+C \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2=C$$

5.3.2 Ecuaţii cu variabile separabile

Au forma generală:

$$f_1(x)\varphi_1(y)dx = f_2(x)\varphi_2(y)dy \tag{5.27}$$

Coeficienţii diferenţialelor pot fi factorizaţi în factori ce depind doar de *x* sau doar de *y*. Prin împărţire cu $\varphi_1(y)\,f_2(x)\neq 0$, ecuaţia se reduce la una cu variabile separate:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy$$

Exemplu: Integraţi ecuaţia: $\left(1+y^2\right)x\ dx = \left(1+x^2\right)y\ dy$

Împărţim ecuaţia cu $\left(1+y^2\right)\left(1+x^2\right)\neq 0$

$$\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{y}{1+y^2}dy \quad \Rightarrow \quad \int\frac{x}{1+x^2}dx=\int\frac{y}{1+y^2}dy+C$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)=\frac{1}{2}\ln\left(1+y^2\right)+C$$

$$\frac{1+x^2}{1+y^2}=C$$

Observaţie: Impărţirea cu $\varphi_1(y)\,f_2(x)\neq 0$ poate conduce la o pierdere de soluţii, soluţii care fac $\varphi_1(y)f_2(x)$ zero.

Exemple: Integraţi ecuaţia: $xdy=ydx \quad \left|: xy\neq 0\right.$

$$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|y|=\ln|x|+\ln|C| \quad \Rightarrow \quad \ln|y|-\ln|C|=\ln|x| \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{|y|}{|C|}=\ln|x|$$

$$\Rightarrow \quad \frac{|y|}{|C|}=|x| \quad \Rightarrow \quad |y|=|Cx| \quad \Rightarrow \quad y=\pm Cx \quad \Rightarrow \quad y=Cx$$

unde constanta *C* poate avea valori pozitive, negative, dar nenule. Împărţind ecuaţia cu *y* am pierdut soluţia $y=0$, soluţie care poate fi inclusă în soluţia generală $y=Cx$ dacă permitem lui *C* să ia şi valoarea zero.

Integrati ecuatia: $\frac{dy}{dx}=x(y-1) \quad \left|:(y-1)\neq 0\right.$

$$\frac{dy}{y-1}=xdx$$

$$\int\frac{dy}{y-1}=\int xdx \quad \Rightarrow \quad \ln|y-1|=\frac{x^2}{2}+C \quad \Rightarrow \quad |y-1|=e^{\frac{x^2}{2}+C}$$

$$|y-1|=e^Ce^{\frac{x^2}{2}} \quad \Rightarrow \quad |y-1|=Ce^{\frac{x^2}{2}} \quad \Rightarrow \quad y-1=\pm Ce^{\frac{x^2}{2}} \qquad y-1=Ce^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y(x)=1+Ce^{\frac{x^2}{2}}$$

Observatie: Am modificat constanta *C* la fiecare pas in mod oportun, dar am numit-o tot *C*.

Împărţind ecuaţia cu $(y-1)$ am pierdut soluţia $y=1$, soluţie care este inclusă în soluţia generală pentru *C* cu valoarea zero.

Integrati ecuatia: $\frac{dy}{dx}=2x(1-y)^2 \quad \left|:(1-y)^2\neq 0\right.$

$$\frac{dy}{(1-y)^2} = 2xdx$$

$$\int \frac{dy}{(1-y)^2} = 2\int xdx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1-y} = x^2 + C \quad \Rightarrow \quad y(x) = 1 - \frac{1}{x^2 + C}$$

Observam ca $y(x)=1$ este solutia pierduta prin impartirea cu $(1-y)^2$ si nu se afla in solutia parametrizata.

Integrati ecuatia: $\left(1+y^2\right)\left(e^{2x}dx - e^y dy\right) - (1+y)dy = 0$

$$\left(1+y^2\right)e^{2x}dx = \left(1+y^2\right)e^y dy + (1+y)dy$$

$$e^{2x}dx = \left(e^y + \frac{1+y}{1+y^2}\right)dy$$

$$\int e^{2x}dx = \int e^y dy + \int \frac{1}{1+y^2}dy + \int \frac{y}{1+y^2}dy$$

$$\frac{1}{2}e^{2x} = e^y + arctg\ y + \frac{1}{2}\ln\left(1+y^2\right) + C$$ integrala generala

5.3.3 Ecuaţii care pot fi reduse la ecuaţii cu variabile separabile

Reducerea se realizează cu ajutorul unei schimbări de variabilă. Considerăm ecuaţia diferenţială de forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c) \tag{5.28}$$

în care $f(z)$ este o funcţie continuă, iar *a*, *b*, *c* sunt constante. Substituţia $z = ax + by + c$ transformă ecuaţia în una cu variabile separabile.

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} = a + bf(z)$$

$$\frac{dz}{a + bf(z)} = dx$$

$$\int \frac{dz}{a + bf(z)} = x + C \tag{5.29}$$

Apoi, înlocuind pe *z* cu substituţia făcută $ax + by + c$, găsim integrala generală a ecuaţiei iniţiale.

Aici, trebuie sa avem in vedere ca $\forall z_0$ astfel incat $a + bf(z_0) = 0$, $z = z_0$ este o solutie pe langa curbele integrale (5.29), iar ecuatia (5.28) are si solutii care sunt dreptele:

$$y(x) = -\frac{a}{b}x + \frac{z_0 - c}{b} \tag{5.30}$$

Exemple:

1. Consideram ecuatia $(x+2y)y'=1$ care poate fi scrisa

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+2y}=f(x+2y)\ ,$$

cu conditia $x+2y\neq 0$ pentru ca ecuatia sa aiba sens.

Facem substitutia $z=x+2y$, si avem

$$\frac{dz}{dx}=1+2\frac{dy}{dx}\quad\Rightarrow\quad\frac{dz}{dx}=1+2\frac{1}{z}$$

Aceasta este o ecuatie cu variabile separabile:

$$\frac{dz}{1+\frac{2}{z}}=dx\quad\Rightarrow\int\frac{z}{z+2}dz=\int dx$$

$$\int\frac{z+2-2}{z+2}dz=\int dx\quad\Rightarrow\quad\int\left(1-\frac{2}{z+2}\right)dz=\int dx$$

$$z-2\ln|z+2|=x+C\quad\Rightarrow\quad x+2y-2\ln|x+2y+2|=x+C$$

$$2y-2\ln|x+2y+2|=C\quad\Rightarrow\quad y-\ln|x+2y+2|=C$$

$$\ln|x+2y+2|=y+C\quad\Rightarrow\quad x+2y+2=Ce^{y}$$

Aceasta ar putea sa nu fie singura solutie deoarece avem de luat in considerare cazul in care pentru a separa variabilele am impartit cu zero,

$$1+\frac{2}{z_0}=0\quad\Rightarrow\quad z_0=-2\quad x+2y=-2$$

Aceasta solutie este deja cuprinsa in solutia generala pentru $C=0$

2. Integraţi ecuaţia: $\frac{dy}{dx}=(x+y)^2$

Considerăm $z=x+y$

$$\frac{dz}{dx}=1+\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx}=1+z^2$$

$$\frac{dz}{1+z^2}=dx\ \Rightarrow\int\frac{dz}{1+z^2}=\int dx+C$$

$$arctg\ z=x+C$$

$$z=tg(x+C)$$

Revenim la substituţia făcută $z = x + y$ şi obţinem soluţia generală:

$$x + y = tg\left(x + C\right) \quad \Rightarrow \quad y = -x + tg\left(x + C\right)$$

3. Integraţi ecuaţia: $\frac{dy}{dx} = \left(y - x\right)^2 + 1$

$$z = y - x$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx} - 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = z^2 + 1 - 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = z^2 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dz}{z^2} = \int dx$$

$$-\frac{1}{z} = x + C \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{y - x} = x + C \quad \Rightarrow \quad y - x = -\frac{1}{x + C} \quad \Rightarrow \quad y\left(x\right) = x + \frac{1}{C - x}$$

Observatie: Alta solutie posibila: $z_0^2 = 0$ conduce la $z_0 = 0$, adica $y = x$ care este solutie pentru ecuatia data si nu se obtine pentru nici o valoare a lui C.