4.3 Condiţii suficiente pentru dezvoltarea in serie Fourier a unei funcţii cu perioada 2π

Teorema 1: Dacă o funcţie periodică $f(x)$ cu perioada 2π este *monotonă pe porţiuni* şi *mărginită* pe intervalul $[-\pi,\pi]$, atunci seria sa Fourier este convergentă în fiecare punct al intervalului. Si suma seriei:

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right) \tag{4.17}$$

cu coeficientii calculati cu formulele:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad n=0,1,2,\dots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \qquad n=1,2,\dots$$

verifică relatiile:

- $S(x)=f(x)$ în punctele de continuitate a lui $f(x)$ din $(-\pi,+\pi)$.
- $S(x)=\frac{1}{2}\left(f(x+0)+f(x-0)\right)$ în punctele de discontinuitate de speta intai a lui $f(x)$ din $(-\pi,+\pi)$.
- $S(-\pi)=S(\pi)=\frac{1}{2}\left(f(-\pi+0)+f(\pi-0)\right)$ (4.18)

Exemple:

1. Dezvoltaţi funcţia:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in(-\pi,0)\\ x, & x\in[0,\pi)\end{cases}$$

în serie Fourier pe intervalul $(-\pi,+\pi)$.

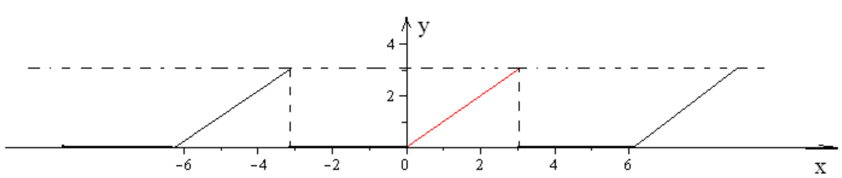


Figura 4.3

Această funcţie îndeplineşte condiţiile din teoremă.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0dx + \int_{0}^{\pi} xdx\right) = \frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\ dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} xd\left(\frac{\sin nx}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\ dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi} = \frac{\cos n\pi - 1}{\pi n^2} = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} =$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{2}{\pi n^2}, & n = 1,3,5,\ldots \\ 0, & n = 2,4,6,\ldots \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\ dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} xd\left(-\frac{\cos nx}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\ dx\right) =$$

$$= -\frac{\cos n\pi}{n} = -\frac{(-1)^n}{n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}\ , \qquad n = 1,2,\ldots$$

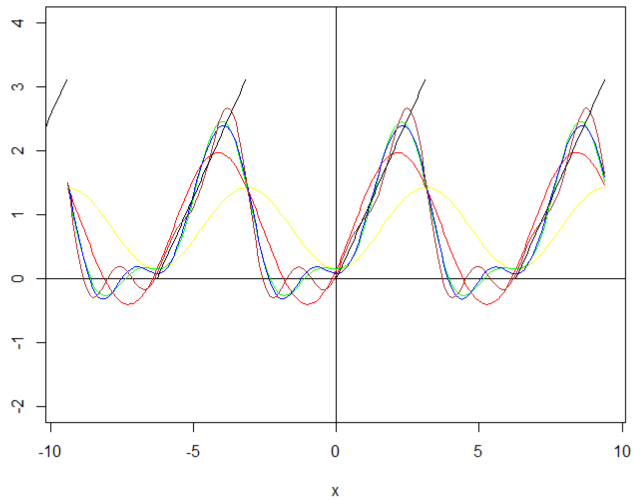
Obţinem seria:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \left(-\frac{2}{\pi}\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} - \frac{2}{\pi}\frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} - \frac{2}{\pi}\frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right),\ x \in (-\pi, \pi)$$

La capetele intervalului $[-\pi, \pi]$, în $x = -\pi$ şi $x = \pi$ care sunt discontinuităţi de speţa întâi, suma seriei este:

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{0 + \pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Intr-un punct de discontinuitate, reprezentarea Fourier a functiei se va abate de la valoarea functiei. Desi pe masura ce luam in considerare tot mai multi termeni din serie, abaterea se va deplasa intr-o pozitie apropiata de discontinuitate, aceasta abatere nu va disparea nici la limita unui numar infinit de termeni.



În $x=0$, seria este: $0=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots\right)$

Adică, suma seriei din paranteza este:

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8} \qquad (4.19)$$

4.4 Dezvoltări Fourier pentru funcţii pare şi impare

Funcţia $f:[-l,l]\to\mathbb{R}$, $l>0$ este *pară* dacă $f(-x)=f(x)$, $\forall x\in[-l,l]$. Graficul unei funcţii pare este simetric faţă de axa *Oy*.

Funcţia $f:[-l,l]\to\mathbb{R}$, $l>0$ este *impară* dacă $f(-x)=-f(x)$, $\forall x\in[-l,l]$. Graficul unei funcţii impare este simetric faţă de originea *O* a sistemului de coordonate.

Exemple:

1. $f(x)=\cos x$ este pară pe $[-\pi,\pi]$, deoarece $\cos(-x)=\cos x$, $\forall x\in[-\pi,\pi]$.
2. $f(x)=\sin x$ este impară pe $[-\pi,\pi]$, deoarece $\sin(-x)=-\sin x$, $\forall x\in[-\pi,\pi]$.
3. $f(x)=x^2-x$ nu este nici pară nici impară pe $[-\pi,\pi]$

$$f(-x)=(-x)^2-(-x)=x^2+x\neq x^2-x,\ \forall x\in[-\pi,\pi],\ x\neq 0$$

□ Fie $f(x)$ o funcţie care îndeplineşte ipotezele din teorema 1, paragraful precedent (monotonie pe porţiuni şi mărginire pe $[-\pi,\pi]$), şi care este *pară* pe $[-\pi,\pi]$, adică $f(-x)=f(x)$, $\forall x\in[-\pi,\pi]$.

Atunci,

$$f(-x)\cos(-nx)=f(x)\cos nx,\ \forall x\in[-\pi,\pi]$$

adică $f(x)\cos nx$ este funcţie pară. Şi

$$f(-x)\sin(-nx)=-f(x)\sin nx,\ \forall x\in[-\pi,\pi]$$

adică $f(x)\sin nx$ este funcţie impară.

Coeficienţii Fourier ai unei funcţii pare vor fi:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx \qquad n=0,1,2,\ldots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=0 \qquad n=1,2,\ldots$$

În consecinţă, seriile Fourier ale funcţiilor *pare* conţin numai cosinusuri care sunt functii pare, adică au forma:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx \tag{4.20}$$

□ Fie $f(x)$ o funcţie care îndeplineşte ipotezele din teorema 1, paragraful precedent (monotonie pe porţiuni şi mărginire pe $[-\pi,\pi]$), şi care este impară pe $[-\pi,\pi]$, adică $f(-x)=-f(x)$, $\forall x\in[-\pi,\pi]$.

Atunci,

$$f(-x)\cos(-nx)=-f(x)\cos nx,\ \forall x\in[-\pi,\pi]$$

adică $f(x)\cos nx$ este funcţie impară. Şi

$$f(-x)\sin(-nx)=f(x)\sin nx,\ \forall x\in[-\pi,\pi]$$

adică $f(x)\sin nx$ este funcţie pară.

Coeficienţii Fourier ai unei funcţii impare vor fi:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=0 \qquad n=0,1,2,\ldots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx \qquad n=1,2,\ldots$$

În consecinţă, seriile Fourier ale funcţiilor *impare* conţin numai sinusuri care sunt functii impare, adică au forma:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \tag{4.21}$$

Exemple:

1. Dezvoltaţi funcţia $f(x)=x^2$ în serie Fourier pe intervalul $[-\pi,\pi]$.

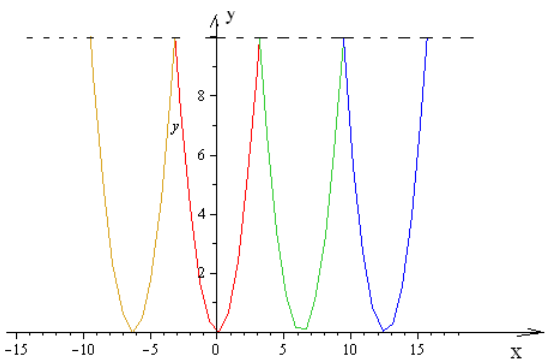


Figura 4.4

Funcţia este monotonă pe porţiuni şi mărginită şi este o funcţie *pară*. Atunci seria Fourier are forma:

$$x^2=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

Determinăm coeficienţii Fourier:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx=\frac{2}{\pi}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^{\pi}=\frac{2}{3}\pi^2$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx\, dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 d\left(\frac{\sin nx}{n}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2\sin nx}{n}\bigg|_0^{\pi}-\frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\sin nx\, dx\right)=$$

$$=\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} xd\left(\frac{\cos nx}{n}\right)=\frac{4}{n\pi}\left(x\frac{\cos nx}{n}\bigg|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right)=$$

$$=\frac{4}{\pi n^2}\pi\cos n\pi=\frac{4}{n^2}(-1)^n, \qquad n=1,2,\ldots n$$

Seria Fourier pentru funcţia dată este:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}$$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots\right) \qquad (4.22)$$

Relaţia (4.22) are loc $\forall x \in [-\pi, \pi]$, şi în $x = \pm\pi$ suma seriei coincide cu valorile funcţiei. Graficul funcţiei şi cel al sumei seriei coincid.

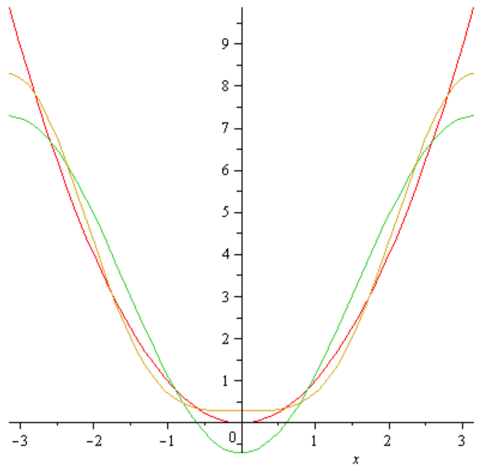


Figura 4.5

În figura 4.5 am reprezentat primele două sume parţiale s_1 şi s_2 care aproximează destul de bine funcţia.

Observaţie: Această serie Fourier permite determinarea sumelor unor serii numerice convergente. De exemplu, pentru $x = 0$, avem

$$0 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots\right)$$

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots \qquad (4.23)$$

Pentru $x = \pi$, avem

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(-\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} - \dots\right)$$

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \quad \text{sau} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad (4.24)$$

2. Dezvoltaţi funcţia $f(x)=x$ în serie Fourier pe intervalul $(-\pi,\pi)$.

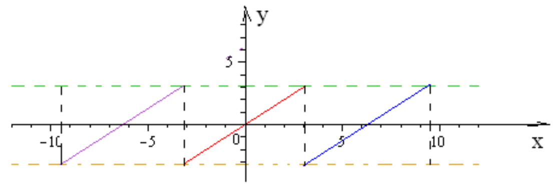


Figura 4.6

Funcţia este monotonă pe porţiuni şi mărginită şi este o funcţie *impară*. Atunci seria Fourier are forma:

$$x=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

Determinăm coeficienţii Fourier:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x d\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)=$$

$$=-\frac{2}{\pi}\left(\frac{x\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}\,dx\right)=$$

$$=-\frac{2}{\pi n}\pi\cos n\pi=-\frac{2}{n}(-1)^n=2\frac{(-1)^{n+1}}{n}, \qquad n=1,2,\ldots \text{n}$$

Seria Fourier pentru funcţia dată este:

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$$

$$x=2\left(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\ldots\right) \tag{4.25}$$

Această relaţie are loc $\forall x\in(-\pi,\pi)$. La $x=\pm\pi$ suma seriei nu coincide cu $f(x)=x$, în aceste puncte suma seriei este

$$S(-\pi)=S(\pi)=\frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2}=\frac{-\pi+\pi}{2}=0$$

În afara intervalului $[-\pi,\pi]$ suma seriei repetă periodic $f(x)=x$.

În figura următoare sunt reprezentate primele patru sume parţiale S_1, S_2, S_3 şi S_4. Convergenţa nu este foarte rapidă la funcţie, în special în apropierea lui π, unde funcţia nu este continuă.

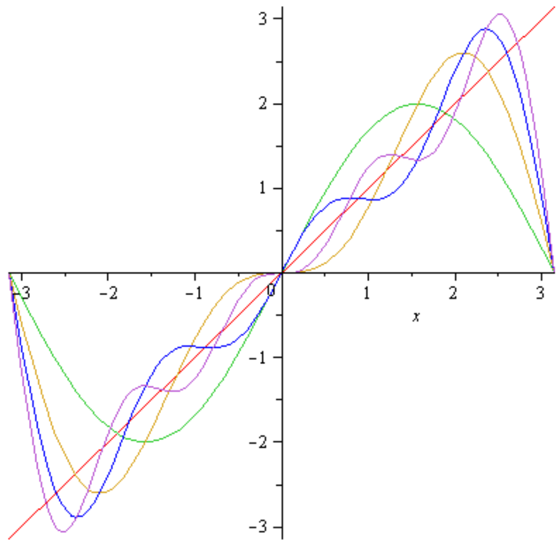


Figura 4.7

4.5 Dezvoltarea unei funcţii definite pe $[0,\pi]$ în serie de sinusuri sau cosinusuri

Fie $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ mărginită şi monotonă pe porţiuni. Dacă extindem definiţia acestei funcţii într-o manieră pară sau impară şi pe $[-\pi,0]$, atunci o putem dezvolta în serie Fourier.

Astfel, dacă definim $f(x)$ pe $[-\pi,0]$ într-o manieră pară astfel încât $f(x)=f(-x)$, atunci seria Fourier va fi una incompletă de cosinusuri.
Dacă definim $f(x)$ pe $[-\pi,0]$ într-o manieră impară astfel încât $f(x)=-f(-x)$, atunci seria Fourier va fi una incompletă de sinusuri.
În concluzie, orice funcţie $f(x)$ definită pe $[0,\pi]$ poate fi dezvoltată în serie de sinusuri sau de cosinusuri, dacă îndeplineşte condiţiile de mărginire şi monotonie pe porţiuni.

Exemplu: Dezvoltaţi $f(x)=\pi-x$, $x\in[0,\pi]$ în serie Fourier de sinusuri şi de cosinusuri.

Dacă extindem $f(x)$ pe $[-\pi,0]$ într-o manieră pară, funcţia va fi mărginită şi monotonă pe porţiuni.

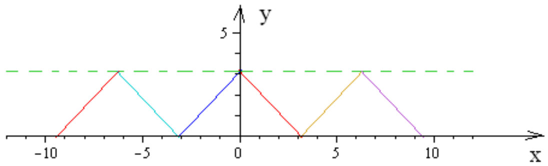


Figura 4.8

Seria Fourier va fi una de cosinusuri:

$$\pi - x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\,dx = -\frac{2}{\pi}\frac{(\pi - x)^2}{2}\Bigg|_0^{\pi} = \pi$$

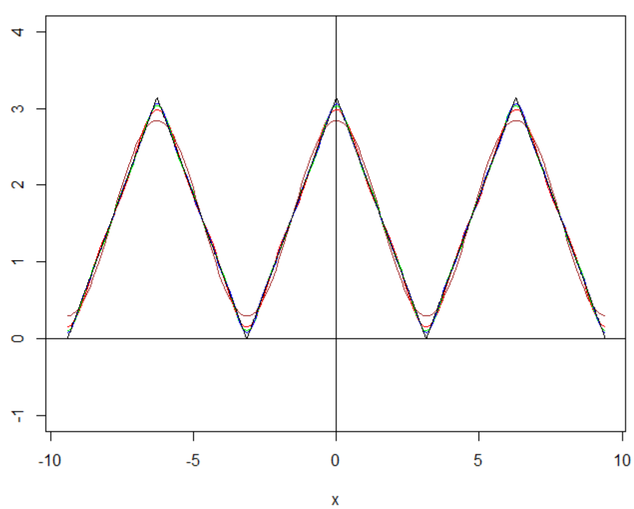
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\,d\left(\frac{\sin nx}{n}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left((\pi - x)\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}\,dx\right) = -\frac{2}{\pi n}\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}(1 - \cos n\pi) = \frac{2}{\pi n^2}\left(1 - (-1)^n\right)$$

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi n^2}, & n = 1, 3, 5, \ldots \\ 0, & n = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$$

$$\pi - x = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right), \quad x \in [0, \pi] \qquad (4.26)$$



Dacă extindem $f(x)$ pe $[-\pi, 0]$ într-o manieră impară, seria Fourier va fi una de sinusuri.

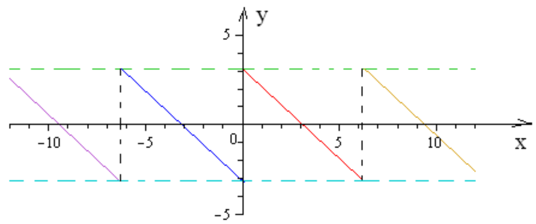
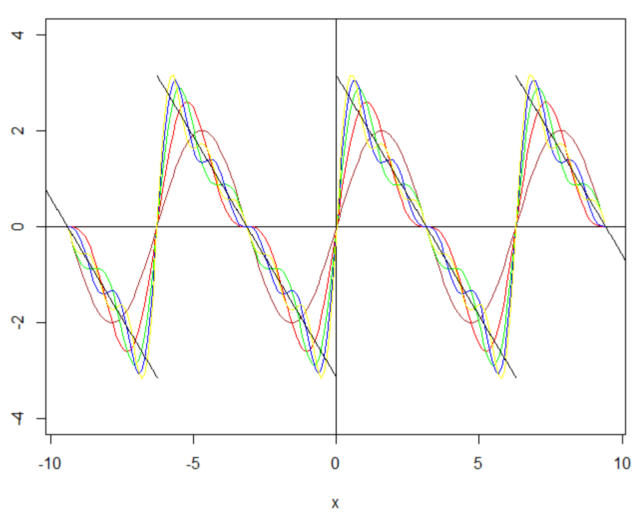


Figura 4.9

$$\pi - x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\sin nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\, d\left(-\frac{\cos nx}{n}\right) =$$
$$= \frac{2}{\pi}\left(-(\pi - x)\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right) = \frac{2}{\pi}\frac{\pi}{n} = \frac{2}{n}$$

$$\pi - x = 2\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots\right), \qquad x \in (0, \pi] \qquad (4.27)$$



4.6 Seriile Fourier pentru funcţii cu perioadă arbitrară

Fie $f(x)$ o funcţie cu perioada $2l,\ l \neq 0$. Pentru a o dezvolta într-o serie Fourier pe $[-l,l]$ cu $l > 0$, vom face o schimbare de variabilă:

$$x = \frac{l \cdot t}{\pi} \tag{4.28}$$

Funcţia $F(t) = f\left(\frac{l \cdot t}{\pi}\right)$ va fi periodică în *t* cu perioada 2π. Într-adevăr,

$$F(t+2\pi) = f\left[\frac{l}{\pi}(t+2\pi)\right] = f\left(\frac{l \cdot t}{\pi} + 2l\right) = f\left(\frac{l \cdot t}{\pi}\right) = F(t)$$

Şi, funcţia poate fi dezvoltată în serie Fourier pe $[-\pi,\pi]$:

$$F(t) = f\left(\frac{l \cdot t}{\pi}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nt + b_n \sin nt\right)$$

unde:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l \cdot t}{\pi}\right)\cos nt\ dt,\quad n = 0,1,2,\ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l \cdot t}{\pi}\right)\sin nt\ dt,\quad n = 1,2,\ldots$$

Revenim la variabila *x*, adică înlocuim $t = \frac{\pi x}{l}$ şi $dt = \frac{\pi}{l}dx$ şi obţinem:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{4.29}$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\quad n = 0,1,2,\ldots \tag{4.30}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\quad n = 1,2,\ldots \tag{4.31}$$

Observaţie: Toate teoremele pentru serii Fourier ale funcţiilor cu perioada 2π sunt valabile şi pentru funcţiile cu perioada $2l$.

Exemple:

1. Dezvoltaţi în serie Fourier funcţia $f(x)=|x|$ cu perioada $2l$ pe intervalul $[-l,l]$.

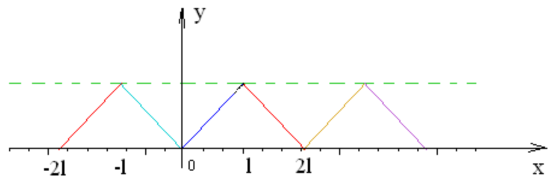


Figura 4.10

Deoarece funcţia este pară, seria are forma:

$$|x|=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}$$

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l xdx=\frac{2}{l}\frac{x^2}{2}\bigg|_0^l=l$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l x\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=\frac{2}{l}\int_0^l xd\left(\frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}\right)=\frac{2}{l}\left(x\frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}\bigg|_0^l-\int_0^l\frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right)=$$

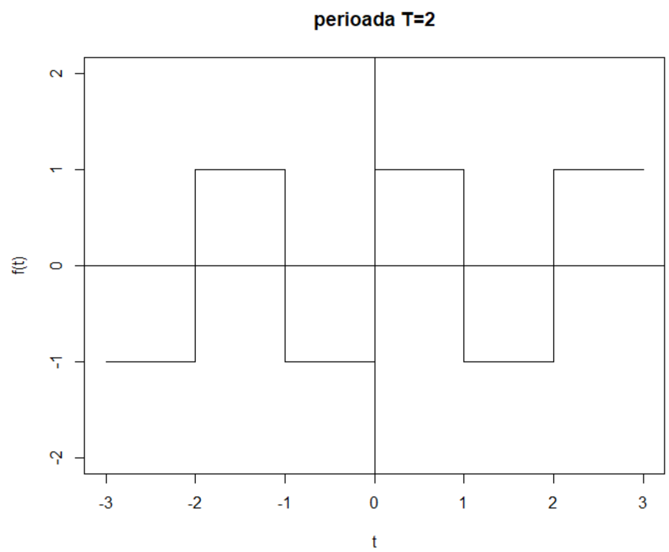
$$=-\frac{2}{l}\frac{l}{n\pi}\left(-\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}\bigg|_0^l\right)=\frac{2l}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)=\frac{2l}{n^2\pi^2}\left((-1)^n-1\right)$$

$$a_n=\begin{cases}-\dfrac{4l}{n^2\pi^2}, & n=1,3,5,\dots\\ 0, & n=2,4,6,\dots\end{cases}$$

$$|x|=\frac{l}{2}-\frac{4l}{\pi^2}\left(\frac{\cos\frac{\pi x}{l}}{1^2}+\frac{\cos\frac{3\pi x}{l}}{3^2}+\frac{\cos\frac{5\pi x}{l}}{5^2}+\dots\right),\ x\in[-l,l] \qquad (4.32)$$

2. Dezvoltati unda patrata ca o serie Fourier. Fizic, aceasta unda poate reprezenta input-ul intr-un circuit electric care face trecerea intre doua stari cu o perioada T. Unda patrata poate fi reprezentata matematic:

$$f(t)=\begin{cases}-1, & -\frac{1}{2}T \le t < 0 \\ +1, & 0 \le t < \frac{1}{2}T\end{cases}$$



Pentru a determina coeficientii seriei Fourier observam ca functia este impara si seria va contine numai termeni cu sinusuri. Determinam coeficientii sinusurilor :

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)dt=\frac{4}{T}\int_{0}^{T/2}\sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)dt=$$

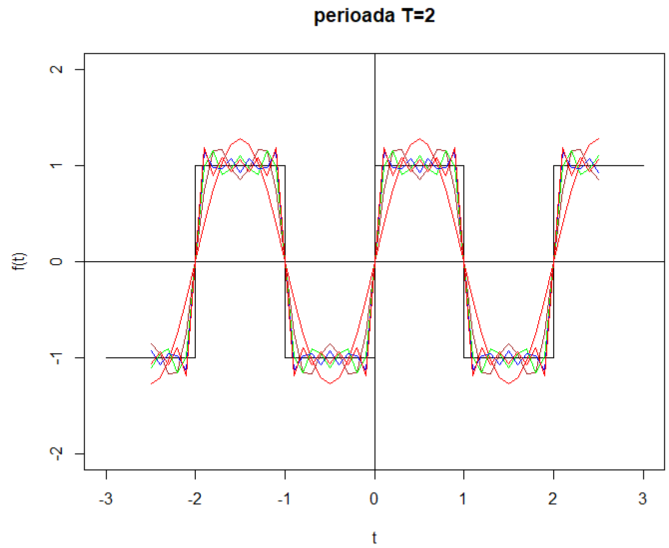
$$=\frac{4}{T}\left(-\frac{\cos\frac{2n\pi t}{T}}{\frac{2n\pi}{T}}\right)\Bigg|_0^{T/2}=-\frac{4}{T}\frac{T}{2n\pi}\left(\cos(n\pi)-1\right)=\frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)$$

$$b_n=\begin{cases}0, & n=2,4,6,\dots \\ \frac{4}{n\pi}, & n=1,3,5,\dots\end{cases}$$

Deci, coeficientii pari sunt nuli iar cei impari sunt $4/n\pi$. Seria Fourier pentru functia unda patrata se poate scrie:

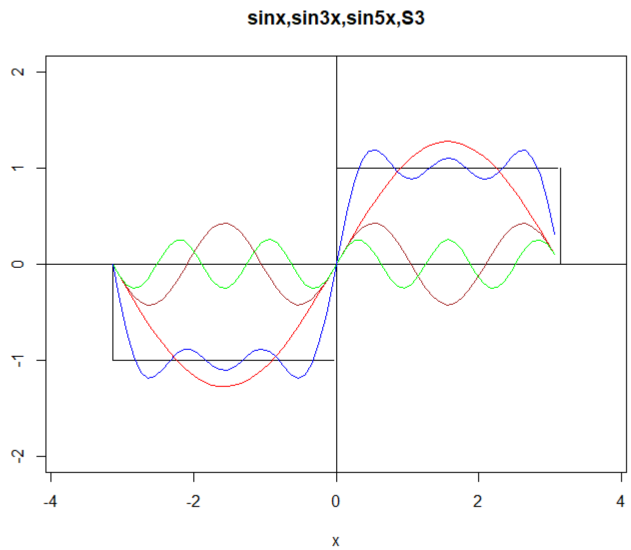
$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left(\sin \omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \frac{\sin 5\omega t}{5} + \dots\right)$$

unde, $\omega = 2\pi / T$ este frecventa.

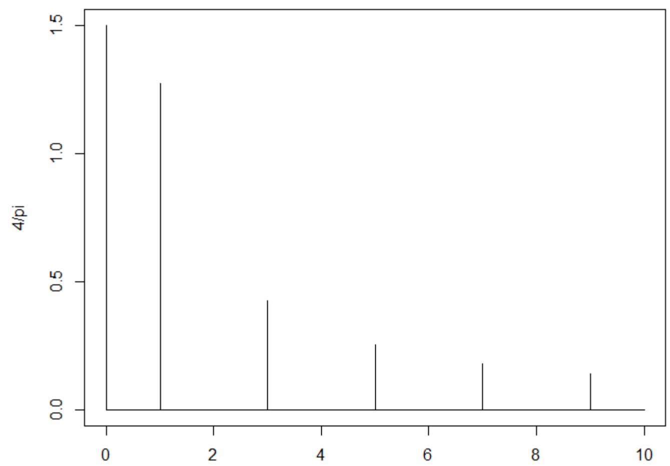


Prima suma partiala sau prima armonica $4/\pi \sin \omega t$ reprezentata cu rosu are frecventa undei patrate.

In figura urmatoare aveti un detaliu de constructie a sumei partiale S_3 (curba albastra). Sunt reprezentati separat primii trei termeni (primele trei armonice) si apoi suma lor prin S_3. Prima armonica (curba rosie) sau armonica fundamentala are frecventa undei patrate iar armonicele cu frecvente mai mari (violet, verde) construiesc unda patrata.



Seriile Fourier pot fi reprezentate si ca un spectru de frecvente. In figura urmatoare sunt reprezentate amplitudinile frecventelor componente din unda patrata. Fiecare termen cu sinus este reprezentat printr-o singura linie spectrala (b_1, b_3, b_5, ...).



Proprietate: Dacă $f(x)$ are perioada T şi este integrabilă, atunci pentru $\forall a \in \mathbb{R}$ avem:

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx \tag{4.33}$$

Cu alte cuvinte, integrala funcţiei pe un interval de lungime T are aceeaşi valoare indiferent de poziţia intervalului pe axa reală.
Geometric, dacă $f(x) \geq 0$, atunci ariile haşurate sunt egale.

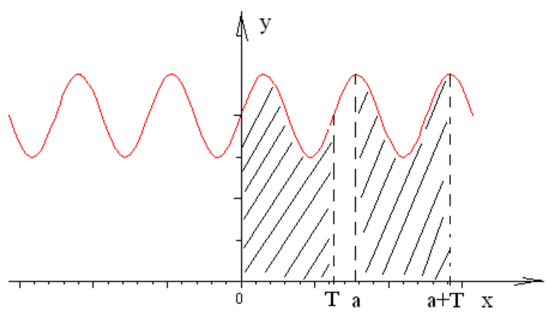


Figura 4.11

Caz particular: Dacă $f(x)$ are perioada $T = 2\pi$ şi $a = -\pi$, atunci

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{0}^{2\pi} f(x)dx \tag{4.34}$$

Exemplu:
Funcţia $f(x)=\sin^7 x$ este periodică cu $T=2\pi$. Atunci avem:

$$\int_{a}^{a+2\pi} \sin^7 x\, dx = \int_{0}^{2\pi} \sin^7 x\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^7 x\, dx = 0$$

Am folosit imparitatea.

În consecinţă, coeficienţii Fourier pentru o funcţie periodică $f(x)$ cu perioada $2l$ pot fi calculaţi astfel:

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{a}^{a+2l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n=0,1,2,\ldots$$
$$b_n = \frac{1}{l}\int_{a}^{a+2l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n=1,2,\ldots$$

4.7 Reprezentarea complexă a seriilor Fourier

Presupunem că $f(x)$ îndeplineşte condiţii suficiente pentru dezvoltare în serie Fourier. Atunci poate fi reprezentată pe $[-\pi,\pi]$ cu seria:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx \qquad n=0,1,2,\ldots$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx \qquad n=1,2,\ldots$$

Folosind formulele Euler:

$$e^{inx} = \cos nx + i\sin nx$$
$$e^{-inx} = \cos nx - i\sin nx$$

avem:

$$\cos nx = \frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2} \qquad \sin nx = \frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}$$
$$\sin nx = i\frac{e^{-inx}-e^{inx}}{2}$$

Substituind aceste două funcţii obţinem:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}+ib_n\frac{e^{-inx}-e^{inx}}{2}\right)$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-ib_n}{2}e^{inx}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-inx}\right)$$

Notăm:

$$\frac{a_0}{2}=c_0 \qquad \frac{a_n-ib_n}{2}=c_n \qquad \frac{a_n+ib_n}{2}=c_{-n}$$

$$f(x)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_ne^{inx}+c_{-n}e^{-inx}\right)$$

$$f(x)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_ne^{inx}+\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}e^{-inx}$$

$$f(x)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_ne^{inx}+\sum_{n=-1}^{-\infty}c_ne^{inx}$$

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{-1}c_ne^{inx}+c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_ne^{inx}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_ne^{inx}$$

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_ne^{inx} \tag{4.35}$$

Aceasta este forma complexă a seriei Fourier.
Vom exprima coeficienţii c_n şi c_{-n} cu ajutorul integralelor:

$$c_n=\frac{a_n-ib_n}{2}=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx-i\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)(\cos nx-i\sin nx)dx$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx$$

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{inx}dx$$

Formulele pentru coeficienţii c_n, c_0 şi c_{-n} pot fi combinate într-o singură expresie:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{4.36}$$

Coeficienţii c_n se numesc coeficienţi Fourier complecşi ai funcţiei $f(x)$.

Observaţie: Seriile sunt convergente pentru un *x* fixat, dacă există limitele:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{+n} c_k e^{ikx}$$

În general, pentru o funcţie periodică $f(x)$ cu perioada $T = 2l$, $l > 0$ seria Fourier va fi:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{4.37}$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$\frac{a_0}{2}$, $a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$ $n = 1, 2, \ldots$ se numesc armonicele functiei $f(x)$, iar multimea coeficientilor Fourier a_n, b_n formeaza spectrul functiei $f(x)$.

Observatie: Multe procese oscilatorii in fizica se modeleaza cu functii $f(x)$ sau functii de timp $f(t)$ cu perioada $T = 2l$, si dezvoltarea in serie Fourier poate avea urmatoarea forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}\left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}\cos\frac{n\pi x}{l} + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}\sin\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{4.38}$$

Notatii: $$\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} = \cos\varphi_n , \quad \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} = \sin\varphi_n \quad \varphi_n \in [0, 2\pi)$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}\left(\cos\varphi_n \cos\frac{n\pi x}{l} + \sin\varphi_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l} - \varphi_n\right) \tag{4.39}$$

unde $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ si $tg\varphi_n = b_n / a_n$.

In fizica se spune ca procesul oscilator $f(x)$ se descompune in oscilatiile armonice simple $A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l} - \varphi_n\right)$ cu frecventele $\frac{n\pi}{l}$, amplitudinile A_n si fazele initiale φ_n. Daca avem in vedere ca perioada este $T = 2l$, frecventele pot fi scrise mai natural $\omega_n = \frac{n2\pi}{T}$.

Forma complexă a seriei (4.37) este:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}} \qquad (4.40)$$

în care coeficienţii sunt:

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) e^{-i\frac{n\pi x}{l}} dx, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Seria (4.40) este convergenta pentru un x fixat, dacă există limita: $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{+n} c_k e^{i\frac{k\pi x}{l}}$

Exemplu: Dezvoltaţi într-o serie Fourier complexă funcţia periodică:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 \le x < \pi \end{cases} \qquad T = 2\pi$$

Funcţia îndeplineşte condiţiile de dezvoltare în serie Fourier.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-inx} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{in} e^{-inx}\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{1}{2\pi ni}\left(1 - e^{-in\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi ni}\left(1 - \cos n\pi + i \sin n\pi\right) = \frac{i}{2\pi n}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$c_n = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ -\dfrac{i}{\pi n}, & n \text{ impar} \end{cases}$$

$$c_{2n-1} = -\frac{i}{\pi(2n-1)}$$

$$f(x) = -\frac{i}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i(2n-1)x}}{2n-1}, \qquad x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi) \qquad S(0) = \frac{1}{2}$$