3.3 Serii Taylor

Rezumat

Fie $f(x)$ o funcţie care are derivate de orice ordin în $x = x_0$, adică există $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $\ldots$, $f^{(n)}(x_0), \ldots$.

Definiţie: Seria de puteri de forma:

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad (3.13)$$

se numeşte *serie Taylor* a funcţiei $f(x)$ în punctul x_0.

Pentru a evalua restul de ordinul putem folosi *formula Lagrange*:

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}\left(x_0 + \theta(x - x_0)\right), \text{ unde } \theta \in (0,1) \qquad (3.15)$$

Caz particular: $x_0 = 0 \Rightarrow$ *serie Maclaurin* a funcţiei $f(x)$ în punctul $x_0 = 0$:

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad (3.16)$$

Teorema 3: Dacă o funcţie $f(x)$ îndeplineşte condiţiile:

- □ are derivate de orice ordin pe $(x_0 - R, x_0 + R)$
- □ există $M > 0$ a. î. $\left|f^{(n)}(x)\right| \le M$ pentru $n = 1, 2, \ldots$ şi $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.

Atunci: $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \text{ pe } (x_0 - R, x_0 + R),\ R > 0 \qquad (3.17)$$

Seriile Taylor ale funcţiilor elementare

1. $f(x) = e^x$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad -\infty \le x \le +\infty \qquad (3.18)$$

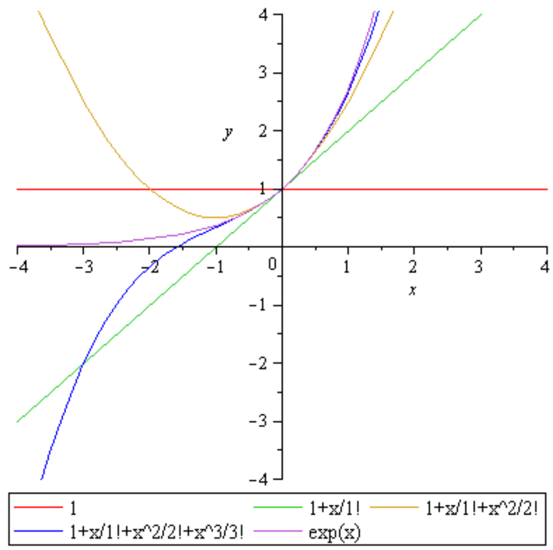


Figura 3.2 $f(x)=e^x$ şi aproximaţiile acesteia

2. $f(x)=\sin x$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad -\infty\le x\le+\infty \quad (3.19)$$

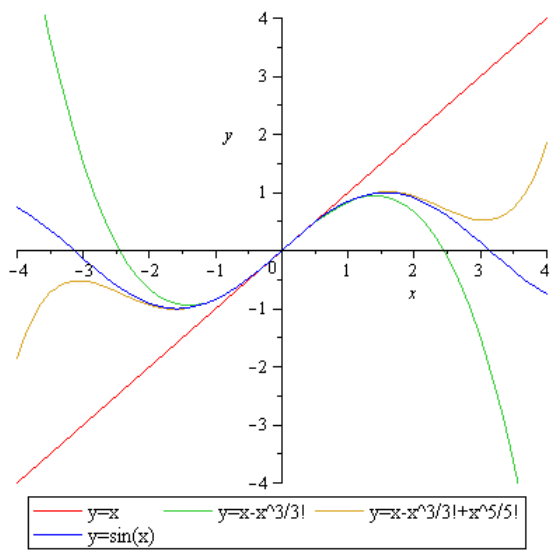


Figura 3.3 $f(x)=\sin x$ şi aproximaţiile acesteia

3. $f(x)=\cos x$

Funcţia are derivate de orice ordin, astfel încât

$$\left|(\cos x)^{(n)}\right|=\left|\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)\right|\le 1, \quad n=0,1,2,\ldots, \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

Cu teorema 3, $\cos x$ poate fi reprezentată ca o serie Taylor în *x* pe $\mathbb{R}$, serie convergentă la funcţie.

$$f^{(n)}(0)=\cos n\frac{\pi}{2}=\begin{cases}0, & n=2k+1\\ (-1)^k, & n=2k\end{cases}$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad R=+\infty \qquad (3.20)$$

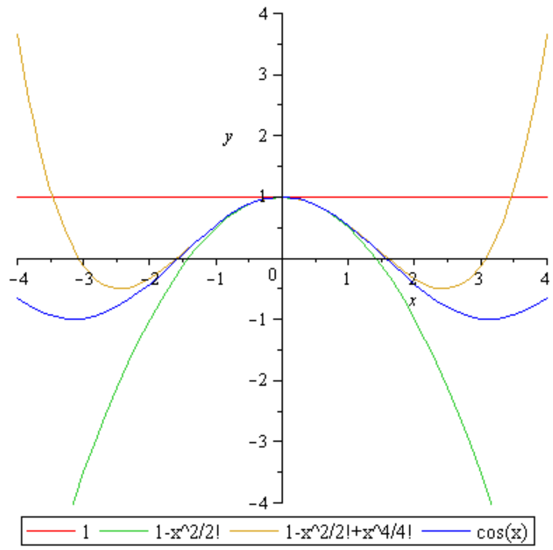


Figura 3.4 $f(x)=\cos x$ şi aproximaţiile acesteia

4. $f(x)=(1+x)^{\alpha}$, $x>-1$, $\alpha\in\mathbb{R}$ Dezvoltăm această funcţie în serie Maclaurin şi obţinem aşa numita *serie binomială*:

$$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}, \qquad f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \quad \ldots$$

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots \quad x\in(-1,1) \qquad (3.21)$$

Caz particular: $\alpha=-1$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots \qquad x\in(-1,1) \qquad (3.22)$$

Substituim *x* cu $-x$,

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots \quad x\in(-1,1) \qquad (3.23)$$

Adică, o serie progresie geometrică.

Caz particular: $\alpha = \frac{1}{2}$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \dots \qquad x \in (-1,1) \qquad (3.24)$$

5. $f(x) = \ln(1+x)$, $x > -1$

$$\left(\ln(1+x)\right)' = \frac{1}{1+x}$$

Pentru a dezvolta funcţia dată în serie Taylor în *x*, integrăm seria (3.22) de la *0* la *x*, $x \in (-1,1)$.

$$\ln(1+x) = \ln(1+t)\Big|_0^x = \int_0^x \left(\ln(1+t)\right)' dt = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt$$

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \left(1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^{n-1} t^{n-1} + \dots\right) dt$$

$$\ln(1+t)\Big|_0^x = t\Big|_0^x - \frac{t^2}{2}\Big|_0^x + \frac{t^3}{3}\Big|_0^x - \frac{t^4}{4}\Big|_0^x + \dots + (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n}\Big|_0^x + \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + \dots \quad x \in (-1,1) \quad (3.25)$$

Această dezvoltare are loc şi în $x = 1$, caz in care obtinem seria armonică alternate:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \qquad (3.26)$$

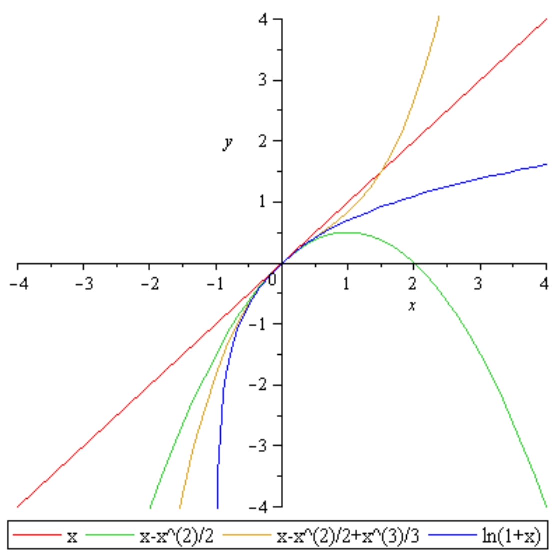


Figura 3.5 $f(x) = \ln(1+x)$ şi aproximaţiile acesteia

Cu aceste dezvoltări pentru funcţiile exponenţială, trigonometrice, putere şi logaritmică, putem deduce alte dezvoltări pentru alte funcţii, fără a aplica algoritmul de dezvoltare in serie (formula care defineste seria Taylor). Mai mult, uneori este recomandată derivarea şi integrarea termen cu termen a seriilor (ca în exemplul de la punctul 5).

Exemple:

1. Dezvoltaţi funcţia $\frac{1}{4-x}$ într-o serie de puteri în $x-2$ cu $x_0=2$

Metoda I: Transformăm funcţia astfel încât să putem folosi (3.23) pentru funcţia $\frac{1}{1-x}$, adică:

$$\frac{1}{4-x}=\frac{1}{2-(x-2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x-2}{2}}$$

Substituim x cu $\frac{x-2}{2}$ în seria (3.23) şi obţinem:

$$\frac{1}{4-x}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{x-2}{2}+\left(\frac{x-2}{2}\right)^2+\left(\frac{x-2}{2}\right)^3+\dots\right)$$

$$\frac{1}{4-x}=\frac{1}{2}+\frac{x-2}{2^2}+\frac{(x-2)^2}{2^3}+\frac{(x-2)^3}{2^4}+\dots$$

Această dezvoltare are loc pentru $\left|\frac{x-2}{2}\right|<1$, $|x-2|<2$, $-2<x-2<2$, $0<x<4$.

Metoda II: Daca aplicam algoritmul de dezvoltare in serie, avem nevoie de derivatele functiei:

$$f(x)=\frac{1}{4-x} \qquad f(2)=\frac{1}{4-2}=\frac{1}{2}$$

$$f'(x)=-\frac{1}{(4-x)^2}(-1)=\frac{1}{(4-x)^2} \qquad f'(2)=\frac{1}{(4-2)^2}=\frac{1}{4}$$

$$f''(x)=-2\frac{1}{(4-x)^3}(-1)=\frac{2}{(4-x)^3} \qquad f''(2)=\frac{2}{(4-2)^3}=\frac{1}{4}$$

$$f'''(x)=-6\frac{1}{(4-x)^4}(-1)=\frac{6}{(4-x)^4} \qquad f'''(2)=\frac{6}{(4-2)^4}=\frac{3}{8}$$

$$\frac{1}{4-x}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{4}\frac{(x-2)^2}{2!}+\frac{3}{8}\frac{(x-2)^3}{3!}+\dots$$

$$\frac{1}{4-x}=\frac{1}{2}+\frac{x-2}{2^2}+\frac{(x-2)^2}{2^3}+\frac{(x-2)^3}{2^4}+\dots$$

2. Dezvoltaţi funcţia $\arcsin x$ în serie Taylor în $x_0 = 0$.

$$\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1+\left(-x^2\right)\right)^{-1/2}$$

Pentru a dezvolta funcţia dată în serie Taylor, integrăm seria binomiala (3.21), substituind x cu $-x^2$ şi $\alpha = -1/2$.

$$\arcsin x = \arcsin t\Big|_0^x = \int_0^x \left(\arcsin t\right)' dt = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

$$\left(\arcsin x\right)' = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^4 - \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^6 + \dots$$

$$\left(\arcsin x\right)' = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2!2^2}x^4 + \frac{3\cdot 5}{3!2^3}x^6 + \dots$$

Integrăm de la *0* la *x*,

$$\int_0^x \left(\arcsin t\right)' dt = \int_0^x \left(1 + \frac{t^2}{2} + \frac{1\cdot 3}{2!2^2}t^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!2^3}t^6 + \dots\right) dt$$

$$\arcsin t\Big|_0^x = t\Big|_0^x + \frac{1}{2}\frac{t^3}{3}\Big|_0^x + \frac{1\cdot 3}{2!2^2}\frac{t^5}{5}\Big|_0^x + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!2^3}\frac{t^7}{7}\Big|_0^x + \dots$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2!2^2\cdot 5}x^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!2^3\cdot 7}x^7 + \dots$$

Pentru validitate:

$$\left|-x^2\right| = x^2 < 1 \quad \Rightarrow \quad x \in (-1,1) \quad R = 1$$

Integrarea termen cu termen este legitimă, deoarece seria de puteri este uniform convergentă pe orice interval $[0, x]$ conţinut în $(-1,1)$.

3. Dezvoltaţi funcţia $arctgx$ în serie Taylor în $x_0 = 0$.

$$\left(arctgx\right)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Cu seria (3.22) putem scrie dezvoltarea:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots$$

$$arctgx = \int_0^x \left(arctgt\right)' dt = \int_0^x \left(1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 - \dots\right) dt$$

$$= t\Big|_0^x - \frac{t^3}{3}\Big|_0^x + \frac{t^5}{5}\Big|_0^x - \frac{t^7}{7}\Big|_0^x + \frac{t^9}{9}\Big|_0^x - \dots$$

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots \qquad x \in (-1,1)$$

Observaţie: Dezvoltările în serii de puteri uniform convergente pot fi utilizate pentru a calcula integrale ce nu pot fi exprimate în termeni de funcţii elementare.

Exemple:

1. $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$

Primitiva lui $\frac{\sin t}{t}$ nu poate fi exprimată prin funcţii elementare. Atunci, folosim seria functiei $\sin x$:

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots$$

$$\frac{\sin t}{t} = 1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \frac{t^6}{7!} + \dots, \quad t \neq 0$$

Iar în $t = 0$, considerăm $\frac{\sin t}{t} = 1$ şi seria este convergentă pe $\mathbb{R}$. Integrăm seria termen cu termen:

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = t\Big|_0^x - \frac{t^3}{3!3}\Big|_0^x + \frac{t^5}{5!5}\Big|_0^x - \frac{t^7}{7!7}\Big|_0^x + \dots$$

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = x - \frac{x^3}{3!3} + \frac{x^5}{5!5} - \frac{x^7}{7!7} + \dots$$

Seria obţinută este una alternată şi este uşor să estimăm eroarea făcută la aproximarea acesteia cu o sumă parţială.

2. $\int_0^x e^{-t^2} dt$

Primitiva lui e^{-t^2} nu poate fi exprimată prin funcţii elementare. Pentru a integra, folosim dezvoltarea functiei exponentiale:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

înlocuim x cu $-t^2$,

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \dots$$

Integrăm de la *0* la *x*:

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = t\Big|_0^x - \frac{t^3}{3}\Big|_0^x + \frac{t^5}{2!5}\Big|_0^x - \frac{t^7}{3!7}\Big|_0^x + \dots$$

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots$$

Seria este convergentă pe $\mathbb{R}$ şi este alternată.

Uneori este folositor sa avem la dispozitie tabele cu serii Maclaurin disponibile pentru functii elementare, fapt pentru care cumulam cateva din rezultatele din acest capitol pentru cateva astfel de serii.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \text{ pentru } -\infty < x < +\infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \text{ pentru } -\infty < x < +\infty$$

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \text{ pentru } -1 < x < +1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \text{ pentru } -\infty < x < +\infty$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \text{ pentru } -1 < x \le 1$$

$$(1+x)^n = 1 + nx + n(n-1)\frac{x^2}{2!} + n(n-1)(n-2)\frac{x^3}{3!} + \dots \text{pentru} -1 < x < +1$$

Toate acestea pot fi deduse aplicand formula Taylor pentru dezvoltarea functiilor in $x_0 = 0$.

Erorile de aproximare cu serii Taylor

Am vazut cum sa dezvoltam o functie $f(x)$ intr-o serie de puteri infinita, serie care este exact egala cu $f(x)$ $\forall x$ din intervalul de convergenta al seriei. Dar, in fizica nu ne dorim sume cu un numar infinit de termeni, ci preferam sa folosim doar un numar finit de termeni din seriile Taylor pentru a *aproxima* o functie intr-un anumit domeniu al valorilor lui *x*. In acest caz, este de dorit sa stim care este eroarea posibila maxima asociata cu aproximarea facuta.

Asa cum am vazut, cu relatia:

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) + R_{n-1}(x)$$

o functie $f(x)$ poate fi reprezentata cu o serie finita de puteri de ordinul $n-1$ impreuna cu un termen ce constitue restul.

$$R_{n-1}(x) = \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(\xi)$$

si ξ necunoscut se afla in intervalul $[x_0, x]$. $R_{n-1}(x)$ este termenul rest si reprezinta eroarea in aproximarea lui $f(x)$ cu seria finita de puteri de ordinul $n-1$ de mai sus. Deoarece valoarea exacta a lui ξ din expresia lui $R_{n-1}(x)$ este necunoscuta, o *limita superioara a erorii* poate fi gasita prin derivarea lui $R_{n-1}(x)$ in raport cu ξ si egalarea derivatei cu zero pentru a determina maximul.

Exemplu: Dezvoltati functia $f(x) = \cos x$ in serie Taylor in jurul lui $x = 0$ si gasiti eroarea asociata cu folosirea aproximarii la evaluarea lui $\cos(0.5)$ daca se retin numai primii doi termeni nenuli. (Observatie: Dezvoltarile Taylor pentru functiile trigonometrice sunt valabile numai pentru unghiuri exprimate in radiani.)

Evaluam functia si derivatele sale in $x = 0$:

$$f(0) = \cos 0 = 1$$

$$f'(0) = -\sin 0 = 0$$

$$f''(0) = -\cos 0 = -1$$

$$f'''(0) = \sin 0 = 0$$

Astfel, pentru $|x|$ mic, gasim ca:

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

Deoarece $\cos x$ este functie para, dezvoltarea in serie de puteri contine numai puteri pare ale lui *x*. Atunci, pentru a estima eroarea in aceasta aproximatie, trebuie sa consideram termenul in x^4, care este urmatorul in serie. Derivata necesara este $f^{(4)}(x)$ si este egala cu $\cos x$. Astfel, adaugam la aproximatia facuta termenul rest $R_3(x)$,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\cos\xi$$

unde ξ se afla in $[0, x]$. Astfel, cea mai mare eroare posibila este $x^4/4!$, deoarece $\cos\xi$ nu depaseste valoarea unu. Daca $x = 0.5$, considerand numai primii doi termeni $\cos(0.5) \approx 0.875$ cu o eroare prezisa mai mica decat 0.0026. Cum $\cos(0.5) = 0.87758$, la aceasta acuratete, erorea reala este 0.00258, deci mai mica decat 0.0026.

Capitolul 4 Serii Fourier

Bibliografie: Krasnov et al. (1989), Riley et al. (2006)

4.1 Serii trigonometrice

In capitolul precedent, am vazut ca functii complicate pot fi reprezentate cu ajutorul seriilor de puteri. Dar, acesta nu este unicul mod in care o functie poate fi reprezentata ca o serie. In acest capitol, vom reprezenta functii ca suma de termeni ce sunt sinusuri si cosinusuri. O astfel de reprezentare se numeste *serie Fourier*. Spre deosebire de seriile Taylor, o serie Fourier poate reprezenta o functie care nu este neaparat continua si derivabila peste tot. Seriile Fourier sunt folosite in multe domenii din fizica, dintre care vibratiile intr-o coarda finita, imprastierea luminii pe o retea de difractie, transmisia unui semnal de intrare de un circuit electronic.

Incepem cu reluarea notiunii de periodicitate.

Definiţie: O funcţie $f(x)$ definită pe o mulţime *D* se numeşte *periodică* dacă există un număr $T \neq 0$ astfel încât:

$$f(x \pm T) = f(x), \quad \forall x \in D, \quad x \pm T \in D \qquad (4.1)$$

Numărul *T* se numeşte *perioadă* pentru funcţia $f(x)$.

Exemple:

1. $f(x)=\sin x$, $x \in \mathbb{R}$ este periodică, deoarece $\exists\ T=2\pi \neq 0$, astfel încât are loc $\sin(x+2\pi)=\sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x+2\pi \in \mathbb{R}$
2. $f(x)=tgx$, $x \in \mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+n\pi, n \in \mathbb{Z}\right\}$ este periodică, deoarece $\exists T=\pi \neq 0$, astfel încât are loc $tg(x+\pi)=tgx$, $\forall x \in \mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+n\pi\right\}$, $x+\pi \in \mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+n\pi\right\}$

Definiţie:
O serie de funcţii de forma:

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\ldots+a_n\cos nx+b_n\sin nx+\ldots$$
$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right) \tag{4.2}$$

se numeşte *serie trigonometrică*, iar constantele a_0, a_n, b_n $n=1,2,\ldots$ se numesc *coeficienţii seriei trigonometrice.*

Sumele parţiale $S_n(x)$ ale seriei trigonometrice sunt combinaţii liniare de funcţiile *1*, $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 2x$, $\ldots$, funcţii care formează aşa numitul *sistem trigonometric*.
Deoarece termenii seriei sunt funcţii periodice cu perioada 2π, atunci dacă seria trigonometrică este convergentă, suma sa $S(x)$ este funcţie periodică cu perioada 2π.

$$S(x+2\pi)=S(x),\quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{4.3}$$

Definiţie: A dezvolta o funcţie *periodică* $f(x)$ într-o serie trigonometrică înseamnă să găsim o serie trigonometrică convergentă şi suma sa să fie egală cu funcţia, $f(x)=S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Ortogonalitatea sistemului trigonometric

Definiţii:

- Două funcţii $f(x)$ şi $g(x)$ continue pe $[a,b]$ se numesc *ortogonale* pe acest interval, dacă:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0 \tag{4.4}$$

Exemplu:
Funcţiile $f(x)=x$ şi $g(x)=x^2$ sunt ortogonale pe $[-1,1]$ deoarece:

$$\int_{-1}^{1} x\cdot x^2 dx = \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0$$

- Un sistem finit sau infinit de funcţii $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x),\dots$, $\varphi_n(x)$ continue pe $[a,b]$, $\varphi_n(x)\neq 0$, $n=1,2,\dots$ se numeşte *sistem ortogonal* pe acest interval, dacă $\forall m,n$ cu $m\neq n$ are loc:

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx = 0 \tag{4.5}$$

Teorema1: Sistemul trigonometric *1*, $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 2x,\dots$, $\cos nx$, $\sin nx,\dots$ este ortogonal pe intervalul $[-\pi,\pi]$.

Demonstraţie:

$\forall n\neq 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos nx\; dx = \left.\frac{\sin nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin nx\; dx = -\left.\frac{\cos nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Cu formulele trigonometrice:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)$$

$\forall m,n\in\mathbb{N},\;\; m\neq n$, avem:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\;\cos nx\; dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\big(\cos(m-n)x+\cos(m+n)x\big)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left.\frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right|_{-\pi}^{\pi} + \left.\frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right|_{-\pi}^{\pi}\right] = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\;\sin nx\; dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\big(\cos(m-n)x-\cos(m+n)x\big)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left.\frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right|_{-\pi}^{\pi} - \left.\frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right|_{-\pi}^{\pi}\right] = 0$$

Cu formula trigonometrică:

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin\left(\alpha-\beta\right)+\sin\left(\alpha+\beta\right)\right)$$

$\forall m,n\in\mathbb{N},\ \ m\neq n$, avem:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\ \cos nx\ dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sin\left(m-n\right)x+\sin\left(m+n\right)x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{\cos\left(m-n\right)x}{m-n}\bigg|_{-\pi}^{\pi}-\frac{\cos\left(m+n\right)x}{m+n}\bigg|_{-\pi}^{\pi}\right]=0$$

Dacă $m=n$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos nx\ dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin 2nx}{2}dx=-\frac{\cos 2nx}{2\cdot 2n}\bigg|_{-\pi}^{\pi}=0$$

Deci *sistemul trigonometric este ortogonal* pe $[-\pi,\pi]$.

Remarcă: Dacă $m=n$, integralele produselor funcţiilor trigonometrice sunt:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\ dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2nx}{2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{\sin 2nx}{2n}\bigg|_{-\pi}^{\pi}\right)=\pi \qquad (4.6)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\ dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2nx}{2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{\sin 2nx}{2n}\bigg|_{-\pi}^{\pi}\right)=\pi \qquad (4.7)$$

4.2 Serii Fourier pentru o funcţie periodică cu perioada 2π

Vrem să calculăm coeficienţii seriei trigonometrice a_0, a_n, b_n $n=1,2,\ldots$ funcţie de $f\left(x\right)$.

Teorema 1: Dacă:

$$f\left(x\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)\qquad\forall x\in\mathbb{R}\qquad (4.8)$$

şi seria din dreapta este *uniform convergentă* pe $\left[-\pi,\pi\right]$ şi datorită periodicităţii, pe întreaga axă reală, atunci:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad n = 0,1,2,\ldots \qquad (4.9)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \qquad n = 1,2,\ldots \qquad (4.10)$$

Demonstraţie:
Cum termenii din seria (4.8) sunt funcţii continue pe $[-\pi,\pi]$ şi seria este uniform convergentă, atunci $f(x)$ este continuă, deci integrabilă. Seria (4.8) poate fi integrată termen cu termen:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx\right)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}x\Big|_{-\pi}^{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} + b_n\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = a_0\pi \qquad \Rightarrow \qquad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \qquad (4.11)$$

Primul termen $a_0/2 = 1/2\pi\int_0^{2\pi} f(x)dx$ este tocmai *valoarea medie a functiei* pe un interval egal cu o perioada.

Înmulţim seria (4.8) cu $\cos mx$:

$$f(x)\cos mx = \frac{a_0}{2}\cos mx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos mx\cos nx + b_n\cos mx\sin nx\right)$$

Cum termenii seriei *uniform convergente* sunt înmulţiţi cu o funcţie *mărginită*, se obţine tot o serie uniform convergentă care poate fi integrată termen cu termen.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx +$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\cos nx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\sin nx\,dx\right)$$

Ţinând cont de ortogonalitatea sistemului trigonometric, avem:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\, dx = a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx\, dx$$

Cu (4.6), avem: $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx = a_m \cdot \pi$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\, dx \qquad (4.12)$$

Analog, înmulţim seria (4.8) cu $\sin mx$, integrăm de la $-\pi$ la π, şi obţinem şi coeficienţii b_n.

Fie $f(x)$ o funcţie arbitrară, periodică cu perioada 2π, şi integrabilă pe $[-\pi,\pi]$. Nu ştim dacă $f(x)$ poate fi reprezentată ca suma unei serii trigonometrice, dar cu formulele din teorema precedentă calculăm a_n şi b_n.

Definiţie: Seria trigonometrică:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (4.13)$$

cu coeficienţii a_0, a_n, b_n calculati cu ajutorul lui $f(x)$ cu formulele:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx \qquad n = 0,1,2,\dots \qquad (4.14)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx \qquad n = 1,2,\dots \qquad (4.15)$$

se numeşte *serie Fourier* a funcţiei $f(x)$ şi a_n, b_n se numesc *coeficienţi Fourier*.

Fiecărei funcţii $f(x)$ integrabile pe $[-\pi,\pi]$ îi corespunde o serie Fourier,

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (4.16)$$

adică o serie trigonometrică cu coeficienţii calculaţi cu (4.14)-(4.15). Dacă cerem funcţiei $f(x)$ să fie doar integrabilă pe $[-\pi,\pi]$, atunci în general, nu putem înlocui semnul $\approx$ din relaţia (4.16) cu $=$.

De exemplu, în teoria semnalelor, o funcţie $f(x)$ definită numai pe $[-\pi,\pi]$ deci neperiodică, trebuie să fie dezvoltată într-o serie trigonometrică. Pentru o astfel de funcţie se poate scrie o serie Fourier deoarece coeficienţii (4.14)-(4.15) se calculează pe $[-\pi,\pi]$. Dacă funcţia $f(x)$ este extinsă prin periodicitate pe axa reală, atunci obţinem o funcţie $F(x)$ care are perioada 2π şi

$$F(x) = f(x), \qquad \forall x \in [-\pi,\pi]$$

Funcţia $F(x)$ este *extensia periodică* a lui $f(x)$ pe intreaga axa reala.
Seria Fourier a funcţiei $F(x)$ va fi identică cu seria Fourier a funcţiei $f(x)$. Dacă seria Fourier a funcţiei $f(x)$ va fi convergentă la $F(x)$, atunci suma seriei, o funcţie periodică, va fi o extensie periodică a lui $f(x)$ de la $[-\pi,\pi]$ la axa reală. Va fi suficient să testăm convergenţa seriei Fourier numai pentru funcţii periodice.

4.3 Condiţii suficiente pentru dezvoltarea in serie Fourier a unei funcţii cu perioada 2π

Definiţie: O funcţie $f(x)$ este *monotonă pe porţiuni* pe intervalul $[a,b]$, dacă intervalul poate fi împărţit cu un număr finit de puncte $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < b$ în subintervale (a,x_1), (x_1,x_2), $\ldots$, (x_{n-1},b), pe fiecare subinterval funcţia fiind monotonă, adică crescătoare sau descrescătoare.

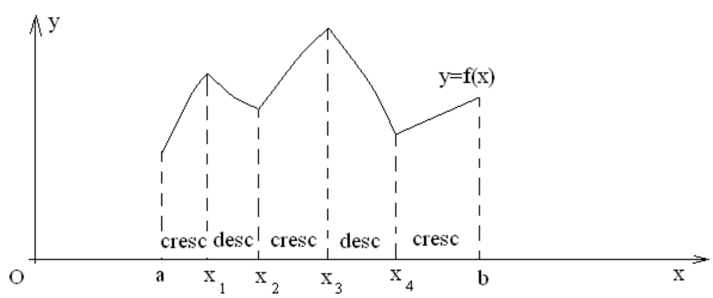


Figura 4.1

Exemple:

1. $f(x) = x^2$ este monotonă pe porţiuni pe axa reală, deoarece intervalul $(-\infty,+\infty)$ poate fi împărţit în două subintervale $(-\infty,0)$ şi $(0,+\infty)$, pe primul interval funcţia este descrescătoare iar pe al doilea funcţia este crescătoare.

2. $f(x) = \cos x$ este monotonă pe porţiuni pe intervalul $[-\pi,\pi]$, deoarece intervalul poate fi împărţit în două subintervale $(-\pi,0)$ şi $(0,+\pi)$, pe primul interval funcţia este crescătoare iar pe al doilea funcţia este descrescătoare.

Observaţie: Dacă funcţia $f(x)$ este monotonă pe porţiuni şi mărginită pe $[a,b]$, adică $m \le f(x) \le M$, atunci aceasta poate avea numai discontinuităţi de speţa întâi pe $[a,b]$.

Teorema 1: Dacă o funcţie periodică $f(x)$ cu perioada 2π este *monotonă pe porţiuni* şi *mărginită* pe intervalul $[-\pi,\pi]$, atunci seria sa Fourier este convergentă în fiecare punct al intervalului. Si suma seriei:

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (4.17)$$

verifică relatiile:

- $S(x)=f(x)$ în punctele de continuitate a lui $f(x)$ din $(-\pi,+\pi)$.
- $S(x)=\frac{1}{2}\big(f(x+0)+f(x-0)\big)$ în punctele de discontinuitate a lui $f(x)$ din $(-\pi,+\pi)$.
- $S(-\pi)=S(\pi)=\frac{1}{2}\big(f(-\pi+0)+f(\pi-0)\big)$ (4.18)

Exemple:

1. Funcţia $f(x)=\pi-x$ cu perioada 2π, îndeplineşte pe intervalul $[-\pi,+\pi]$, condiţiile din teoremă şi poate fi dezvoltată în serie Fourier.

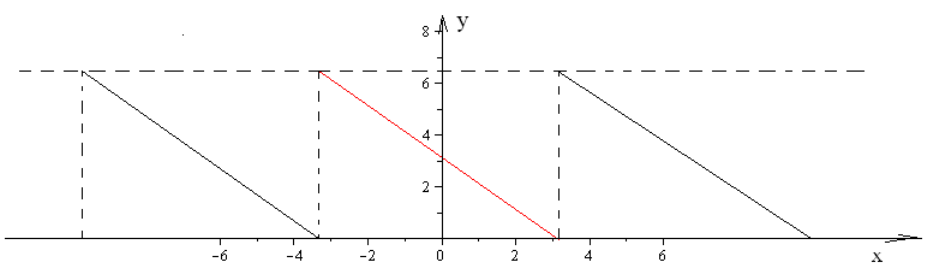


Figura 4.2

Determinăm coeficienţii Fourier integrând prin părţi:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi-x)\,dx=-\frac{(\pi-x)^2}{2\pi}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=2\pi$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi-x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi-x)\,d\left(\frac{\sin nx}{n}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}(\pi-x)\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx=$$

$$=-\frac{\cos nx}{\pi n^2}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{\cos(-n\pi)-\cos n\pi}{\pi n^2}=0 \qquad n=1,2,\ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)\sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)\, d\left(-\frac{\cos nx}{n}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi}(\pi - x)\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\, dx =$$

$$= \frac{2\pi}{\pi n}\cos(-n\pi) - \frac{1}{\pi n^2}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{n}\cos n\pi = 2\frac{(-1)^n}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

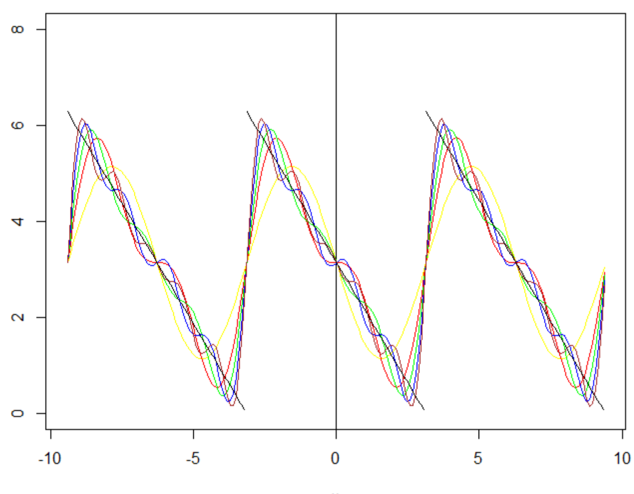
Seria Fourier a funcţiei date este:

$$\pi - x = \pi + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin nx}{n}, \qquad x \in (-\pi, \pi)$$

La capetele intervalului $[-\pi, \pi]$, în $x = -\pi$ şi $x = \pi$ care sunt discontinuităţi de speţa întâi, suma seriei este:

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{2\pi + 0}{2} = \pi$$

In figura urmatoare am reprzentat functia si cateva sume partiale din seria Fourier.



Intr-un punct de discontinuitate, reprezentarea Fourier a functiei se va abate de la valoarea functiei. Desi pe masura ce luam in considerare tot mai multi termeni din serie, abaterea se va deplasa intr-o pozitie apropiata de discontinuitate, aceasta abatere nu va disparea nici la limita unui numar infinit de termeni.