Capitolul 2 Serii de funcţii

Bibliografie: Krasnov et al. (1989), Craiu & Rosculet (1976), Stanasila (1981), Riley et al. (2006)

2.1 Definiţii. Mulţime de convergenţă

Definiţia 1: Seria

$$f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad (2.1)$$

a cărui termeni $f_n(x)$, $n=1,2,\ldots$, sunt funcţii definite pe o mulţime reală $E\subset\mathbb{R}$, se numeşte *serie de funcţii*.

Exemplu: Seria $1+x+x^2+x^3+\ldots$ are termenii funcţii definite pe $\mathbb{R}$.

Definiţia 2: Seria de funcţii (2.1) este *convergentă* în punctul $x_0\in E$, dacă seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ este convergentă.

Definiţia 3: Dacă seria de funcţii (2.1) este convergentă $\forall x\in D\subseteq E$, atunci se spune că seria (2.1) este *simplu convergentă* pe *D*, şi *D* se numeşte *mulţime de convergenţă* a seriei.

Definiţia 4: Seria (2.1) este *absolut convergentă* pe *D*, dacă pe această mulţime seria $\sum_{n=1}^{\infty}\left|f_n(x)\right|$ este convergentă.

A *n*-a suma partiala a seriei (2.1) este:

$$S_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\ldots+f_n(x), \quad x\in \text{ multime de convergenta}$$

Funcţia $S(x)=\lim_{n\to\infty} S_n(x)$ se numeşte *suma seriei*.

Considerând *x* constant, pentru unele serii de funcţii putem determina intervalul de convergenţă folosind testele stabilite la serii numerice cu termeni pozitivi, de exemplu testul D'Alembert şi testul Cauchy.

Exemple:

1. Determinaţi intervalul de convergenţă al seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\lg x}}$

Seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p}}$ este convergentă pentru $p>1$ şi divergentă pentru $p\le 1$. Dacă considerăm $p=\lg x$, seria va fi convergentă pentru

$$\lg x>1, \quad x>10$$

şi intervalul de convergenţă va fi $D=(10,+\infty)$

2. Determinaţi intervalul de convergenţă al seriei $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}ne^{nx}$

Considerăm seria:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}ne^{nx}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}ne^{nx} \tag{2.2}$$

Deoarece termenii sunt pozitivi, vom aplica de exemplu, testul D'Alembert:

$$\lambda=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)e^{(n+1)x}}{ne^{nx}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)e^{x}}{n}=e^{x}$$

Seria (2.2) va fi convergentă dacă $e^{x}<1$, adică $x<0$. În consecinţă seria este absolut convergentă pe intervalul $(-\infty,0)$. Pentru $x\ge 0$ seria este divergentă.

3. Determinaţi intervalul de convergenţă al seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n}}{\left(1+x^{2}\right)^{n}}$

Termenii seriei sunt funcţii pozitive, continue, definite pe $\mathbb{R}$. Aplicăm testul Cauchy:

$$\lambda=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^{n}}{\left(1+x^{2}\right)^{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1+x^{2}}=+\infty$$

pentru $\forall x\in\mathbb{R}$. Seria este astfel divergentă $\forall x\in\mathbb{R}$.

4. Determinaţi intervalul de convergenţă al seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^{n}}{n\cdot 2^{n}}$

Considerăm seria $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x+1|^n}{n\cdot 2^n}$

Deoarece termenii sunt pozitivi, vom aplica de exemplu, testul D'Alembert:

$$\lambda = \lim_{n\to\infty}\frac{|x+1|^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}\frac{n\cdot 2^n}{|x+1|^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)}\cdot|x+1| = \frac{|x+1|}{2}$$

Seria valorilor absolute va fi convergentă dacă $\frac{|x+1|}{2}<1$, adică $|x+1|<2$, $-3<x<1$. Pe acest interval seria iniţială este absolut convergentă deci convergentă. În $x=1$ obţinem seria armonică divergentă, iar în $x=-3$ avem $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\dots$ care cu Leibniz este semiconvergentă. $D=[-3,+1)$.

Fie seria de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ simplu convergentă pe mulţimea D şi suma sa $S(x)$, atunci putem scrie:

$$S(x) = S_n(x) + R_n(x) \tag{2.3}$$

unde $R_n(x)$ este *restul* de ordinul *n* al seriei convergente pe mulţimea *D*:

$$R_n(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \tag{2.4}$$

Cum $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$, trecem la limita in (2.3) si pentru rest avem:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left[S(x) - S_n(x)\right] = 0 \tag{2.5}$$

In concluzie, restul $R_n(x)$ al seriei convergente $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ tinde la zero pentru $n\to\infty$ $\forall x\in D$.

2.2 Convergenţă uniformă

Fie *A* o mulţime oarecare fixată, $A\subset\mathbb{R}$ şi $\{f_n\}_{n\geq 1}$ un şir de funcţii $f_n : A\to\mathbb{R}$. Fie $f : A\to\mathbb{R}$ o altă funcţie.

Definiţie: Şirul $\{f_n\}_{n\geq 1}$ este *punctual convergent* pe *A* către *f* pentru $n\to\infty$ şi se scrie $f_n \xrightarrow{p.c.} f$ dacă şirul numeric $f_n(x_0)$ este convergent la $f(x_0)$ pentru orice $x_0\in A$.

Aşadar, fiind dat un şir de funcţii $f_n : A\to\mathbb{R}$ limita sa punctuală pe *A* dacă există, este funcţia $f : A\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $\forall x\in A$.

Definiţie: Şirul $\{f_n\}_{n\geq 1}$ este *uniform convergent* pe *A* către *f* pentru $n \to \infty$ şi se scrie $f_n \xrightarrow{u.c.} f$ dacă este îndeplinită următoarea condiţie: $\forall \varepsilon > 0$ există $N(\varepsilon) > 0$ numar natural astfel incat să avem

$$\left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon \tag{2.6}$$

pentru orice $\forall n > N(\varepsilon)$ si pentru $\forall x \in A$.

Exemplu: Se da sirul de functii $f_n(x) = 1 + x^{2n}$, $x \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, ...$
Sa se determine: a) multimea de convergenta si functia limita b) Sa se arate ca sirul de functii nu este uniform convergent pe $(-1, +1)$. Sa se determine o multime de convergenta uniforma.

Sirul este divergent pentru $|x| > 1$, deoarece

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + x^{2n}\right) = +\infty$$

Pentru $|x| < 1$ sirul este convergent, deoarece

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + x^{2n}\right) = 1$$

Iar $\lim_{n\to\infty} f_n(1) = 2$, $\lim_{n\to\infty} f_n(-1) = 2$.
Multimea de convergenta *A*, este deci $[-1, +1]$, iar functia limita este:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-1, +1) \\ 2, & x = 1, \quad x = -1 \end{cases}$$

Aratam ca sirul *f_n* nu este uniform convergent pe $(-1, +1)$. In acest scop aratam ca nu exista $N(\varepsilon)$ finit astfel incat

$$\left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon$$

pentru orice $n > N(\varepsilon)$ si orice $x \in (-1, +1)$. Avem $f_n(x) - f(x) = x^{2n}$, deci trebuie sa avem $x^{2n} < \varepsilon$ sau $2n \ln|x| < \ln \varepsilon$, de unde

$$n > \frac{1}{2}\frac{\ln \varepsilon}{\ln|x|} \ , \quad x \in (-1, +1)$$

Insa pentru ε fixat, avem

$$\sup_{|x|<1} \frac{\ln \varepsilon}{\ln|x|} = +\infty$$

Deci nu exista $N(\varepsilon)$ finit.
Pentru orice interval inchis $[-\alpha, +\alpha] \subset (-1, +1)$ si $x \in [-\alpha, +\alpha]$ avem:

$$\sup_{|x|<\alpha} \frac{\ln \varepsilon}{\ln|x|} = \frac{\ln \varepsilon}{\ln \alpha} = N(\varepsilon) \quad \text{finit!}$$

Atunci, sirul $f_n(x) = 1 + x^{2n}$ este uniform convergent pe $[-\alpha, +\alpha] \subset (-1, +1)$.

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ o serie de funcţii care *converge simplu* pe *D* şi are suma $S(x)$. Considerăm a *n*-a sumă parţială $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$.

Definiţie: Seria de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ este *uniform convergentă* pe $\Omega \subset D$, dacă $\forall \varepsilon > 0$ există un număr natural $N(\varepsilon) > 0$, astfel încât inegalitatea

$$|S_n(x) - S(x)| = |R_n(x)| < \varepsilon \qquad (2.7)$$

are loc $\forall n > N(\varepsilon)$ şi $\forall x \in \Omega$.

Observaţie: Numărul $N(\varepsilon)$ este independent de *x*.

Interpretare geometrică

Presupunem că Ω este intervalul $[a,b]$. Reprezentăm grafic (fig 2.1) funcţiile $y = S(x)$, $y = S(x) - \varepsilon$, $y = S(x) + \varepsilon$ şi $y = S_n(x)$.

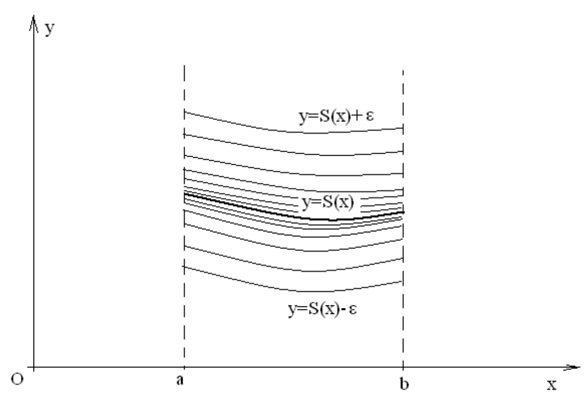

Figura 2.1

Inegalitatea $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$ care are loc $\forall n > N(\varepsilon)$ şi $\forall x \in [a,b]$, poate fi scrisă astfel:

$$-\varepsilon < S_n(x) - S(x) < +\varepsilon$$

$$S(x) - \varepsilon < S_n(x) < S(x) + \varepsilon \qquad (2.8)$$

Aceste inegalităţi arată că graficele tuturor funcţiilor $y=S_n(x)$ cu $n>N(\varepsilon)$ se află în interiorul $\varepsilon-$benzii mărginită de curbele $y=S(x)-\varepsilon$ şi $y=S(x)+\varepsilon$.

Exemplu: Arătaţi că seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{1-x^2}+n}$ este uniform convergentă pe $[-1,+1]$.

Seria este alternată şi îndeplineşte condiţiile din testul Leibniz, şi deci este convergentă $\forall x\in[-1,+1]$. Fie $S(x)$ suma sa şi $S_n(x)$ a *n*-a sumă parţială. Restul de ordinul *n*:

$$R_n(x)=(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}+n+1}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}+n+2}+\dots\right)$$

este serie convergenta si suma nu excede în valoare absolută primul termen:

$$|R_n(x)|\le\frac{1}{\sqrt{1-x^2}+n+1}<\frac{1}{n}$$

adică $|S(x)-S_n(x)|<1/n$ pentru $\forall x\in[-1,+1]$ şi orice $n=1,2,\dots$.

Considerăm $\varepsilon>0$ arbitrar. Inegalitatea $|S(x)-S_n(x)|<\varepsilon$ are loc dacă $1/n<\varepsilon$. Atunci $n>1/\varepsilon$. Considerăm $N(\varepsilon)=1/\varepsilon$, şi inegalitatea $|S(x)-S_n(x)|<\varepsilon$ are loc $\forall n>N=\frac{1}{\varepsilon}$ şi $\forall x\in[-1,+1]$, ceea ce înseamnă că seria converge uniform pe intervalul $[-1,+1]$.

Observaţie: Nu orice serie de funcţii simplu convergentă pe *D* este şi uniform convergentă pe *D*.

2.3 Testul Weierstrass

Acesta conţine o condiţie suficientă pentru convergenţa uniformă a unei serii de funcţii.

Testul Weierstrass: Dacă termenii seriei de funcţii

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x) \tag{2.9}$$

nu depăşesc în valoare absolută termenii corespunzători ai seriei numerice cu termeni pozitivi, convergentă:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{2.10}$$

adică, dacă:

$$|f_n(x)| \leq a_n, \quad n = 1, 2, \ldots \quad \forall x \in \Omega \tag{2.11}$$

atunci seria (2.9) este convergentă pe Ω absolut şi uniform.

Observaţie: Seria (2.10) se numeşte *serie dominantă* pentru seria (2.9).

Exemple:

1. Examinaţi convergenţa uniformă a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$

Are loc inegalitatea:

$$\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| = \frac{|\cos nx|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, \ldots \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Seria Dirichlet:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

este convergentă, şi cu testul Weierstrass seria dată converge uniform şi absolut pe $\mathbb{R}$.

2. Examinaţi convergenţa uniformă a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 + (4 - x^2)^{n/2}}$

Termenii seriei sunt funcţii continue pe $[-2, 2]$ pentru orice număr natural *n*, şi

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2 + (4 - x^2)^{n/2}}\right| = \frac{|\sin nx|}{n^2 + (4 - x^2)^{n/2}} \leq \frac{1}{n^2 + (4 - x^2)^{n/2}} \leq \frac{1}{n^2}$$

Atunci,
$$\left|\frac{\sin nx}{n^2 + (4 - x^2)^{n/2}}\right| \leq \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, \ldots \quad \forall x \in [-2, 2]$$

Cum seria Dirichlet:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

este convergentă, cu testul Weierstrass seria dată converge uniform şi absolut pe $[-2, 2]$.

Observaţie: Seria (2.9) poate fi uniform convergentă pe Ω şi dacă nu are serie dominantă (2.10), adică testul Weierstrass este doar un test suficient pentru convergenţă uniformă, dar nu neapărat necesar.

Exemplu: Seria de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{1-x^2}+n}$ converge uniform pe $[-1,1]$, dar nu are serie dominantă. Are loc inegalitatea:

$$\left| \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{1-x^2}+n} \right| \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ şi } \forall x \in [-1,1]$$

şi seria numerică armonică nu este convergentă.

2.4 Proprietăţile seriilor de funcţii uniform convergente

Teorema 1: Dacă toţi termenii unei serii de funcţii *uniform convergente* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ pe $[a,b]$ se înmulţesc cu aceeaşi funcţie $g(x)$ mărginită pe $[a,b]$, atunci seria rezultată:

$$\sum_{n=1}^{\infty} g(x) f_n(x) \tag{2.12}$$

este uniform convergentă pe $[a,b]$.

Teorema 2: (transfer de continuitate) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ este uniform convergentă pe $[a,b]$ şi toţi termenii săi sunt funcţii continue, atunci suma sa $S(x)$ este şi ea continuă pe $[a,b]$.

Teorema 3: Fie $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ o serie *uniform convergentă* de funcţii *continue* pe $[a,b]$. Atunci are loc:

$$\int_{x_0}^{x} S(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \right] dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt \tag{2.13}$$

adică seria *se integrează termen cu termen*, $\forall x_0, x \in [a,b]$ şi seria rezultată este uniform convergentă pe $[a,b]$.

Observaţie: Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ nu este uniform convergentă, atunci în general, nu poate fi integrată termen cu termen.

Teorema 4: Dacă toţi termenii unei serii $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *simplu convergente* pe $[a,b]$ au derivate continue şi seria acestor derivate $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ este *uniform convergentă* pe $[a,b]$ având suma $T(x)$, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ este *uniform convergentă* pe $[a,b]$, şi suma sa $S(x)$ este derivabilă cu $S'(x)=T(x)$, $\forall x\in[a,b]$.

Teorema 4 stabileşte condiţii suficiente pentru ca o serie de funcţii să poată fi *derivată termen cu termen*. Ultima relaţie se poate scrie:

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right]' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x),\ \forall x\in[a,b] \tag{2.14}$$

Exemplu: Seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$, $x\in\mathbb{R}$ este derivabilă termen cu termen pe $\mathbb{R}$.

Într-adevăr, seria de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$ este uniform convergentă pe $\mathbb{R}$ cu testul Weierstrass deoarece $\left|\frac{\sin nx}{n^3}\right|\le\frac{1}{n^3}$.

Seria derivatelor $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$ este de asemenea uniform convergentă pe $\mathbb{R}$ deoarece $\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$. Deci seria dată este derivabilă termen cu termen şi are loc:

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}\right]' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$$

Capitolul 3 Serii de puteri

Bibliografie: Krasnov et al. (1989), Craiu & Rosculet (1976), Stanasila (1981), Riley et al. (2006)

3.1 Teorema Abel. Interval şi rază de convergenţă pentru serii de puteri

Definiţie: O serie de forma:

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{3.1}$$

sau:

$$c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots + c_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n \tag{3.2}$$

unde $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ sunt coeficienţi constanţi, se numeşte *serie de puteri* în *x*, respectiv în $x - x_0$.

Seria de puteri (3.1) întotdeauna este convergentă în $x = 0$, iar seria (3.2) este convergentă în $x = x_0$. Sumele acestor serii fiind c_0.

Exemple: Seriile $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n+1}$ sunt serii de puteri.

Teorema 1 (**Abel**): Dacă seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ este convergentă în $x = x_1 \neq 0$, atunci aceasta este absolut convergentă $\forall x$ cu $|x| < |x_1|$.
Dacă seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ este divergentă în $x = x_2$, atunci aceasta este divergentă $\forall x$ cu $|x| > |x_2|$.

Cu această teoremă putem stabili intervalele de convergenţă pentru seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Astfel, dacă seria este convergentă în $x = x_1 \neq 0$, atunci aceasta va fi absolut convergentă pe intervalul $(-|x_1|, +|x_1|)$. Dacă seria este divergentă în $x = x_2$ $(|x_2| > |x_1|)$, atunci aceasta va fi divergentă pe $(-\infty, -|x_2|) \cup (|x_2|, +\infty)$.

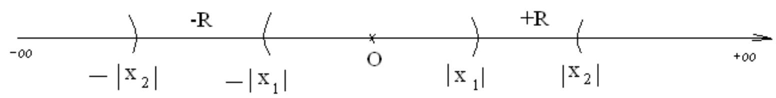

Figura 3.1

Observaţie: Există două puncte simetrice R şi $-R$ care stabilesc frontiera dintre intervalele de convergenţă şi de divergenţă.

Teorema 2: Pentru o serie de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ care este convergentă în mai mult decât $x=0$, există un număr $R>0$ pozitiv şi unic astfel încât seria este absolut convergentă pentru $|x|<R$ şi divergentă pentru $|x|>R$.

Mulţimea de *convergenţă absolută* a seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ este intervalul $(-R,+R)$. Intervalul $(-R,+R)$ se numeşte *interval de convergenţă* al seriei, iar numărul R se numeşte *rază de convergenţă*.

La capetele intervalului de convergenţă, adică în $x=-R$ şi $x=R$, seria de puteri poate să fie convergentă sau divergentă.

Observaţie: Seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ cu $x_0 \neq 0$ are aceeaşi rază de convergenţă ca şi seria $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, dar intervalul de convergenţă este $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Formule de calcul pentru raza de convergenţă

Raza de convergenţă pentru seriile $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$, $x_0 \neq 0$ poate fi calculată cu formulele:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} \qquad (3.3)$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} \qquad (3.4)$$

Observaţie: Dacă limitele din aceste formule nu există, se recomandă aplicarea directă a testelor D'Alembert şi Cauchy aşa cum s-a procedat la determinarea intervalului de convergenţă a seriilor de funcţii.

Exemple:

1. Determinaţi intervalul de convergenţă pentru seria $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^n$

$$c_n = (-1)^{n-1}n \qquad c_{n+1} = (-1)^n(n+1)$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left|(-1)^{n-1}n\right|}{\left|(-1)^n(n+1)\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$$

$R=1$, seria este absolut convergentă pe $(-1,+1)$. Examinăm si convergenţa seriei la capetele intervalului:

$x=-1 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n(-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n-1}n = \sum_{n=1}^{\infty}(-n)$ divergentă deoarece nu este îndeplinită condiţia necesară $\lim_{n\to\infty}(-n) \neq 0$.

$x=1 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n(+1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n$ divergentă deoarece nu există limita $\lim_{n\to\infty}(-1)^n n$. Intervalul de convergenţă rămâne $(-1,+1)$.

2. Determinaţi intervalul de convergenţă pentru seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}(x+2)^n$

$$c_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n} \qquad c_{n+1} = \frac{(-1)^n}{(n+1)2^{n+1}}$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}\right|}{\left|\frac{(-1)^n}{(n+1)2^{n+1}}\right|} = \lim_{n\to\infty} 2\frac{n+1}{n} = 2$$

$R=2$, seria este absolut convergentă pe $(-4,0)$. Examinăm si convergenţa seriei la capetele intervalului:

$x=-4 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}(-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergentă

$x=0 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}(2)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ semiconvergentă

Intervalul de convergenţă este $(-4,0]$.

3. Determinaţi intervalul de convergenţă pentru seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^n}(x-2)^n$

$$c_n=\frac{(-1)^n}{n^n}$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{n^n}\right|}}=\lim_{n\to\infty}n=+\infty$$

$R=+\infty$, seria este absolut convergentă pe $\mathbb{R}$.

4. Determinaţi intervalul de convergenţă pentru seria $\sum_{n=1}^{\infty}n!x^n$

$$c_n=n! \qquad c_{n+1}=(n+1)!$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|n!|}{|(n+1)!|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

$R=0$, seria este absolut convergentă în $x=0$.

3.2 Proprietăţile seriilor de puteri

Teorema 1: Seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ este *absolut şi uniform convergentă* pe orice interval $[-a,+a]$, $a>0$ care aparţine intervalului de convergenţă $(-R,+R)$ al seriei.

Teorema 2: Suma $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ este *continuă* în fiecare punct din intervalul de convergenţă $(-R,+R)$ al seriei.

Teorema 3: Seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ poate fi *integrată termen cu termen* pe intervalul său de convergenţă $(-R,+R)$, $R>0$ şi seria obţinută prin integrare termen cu termen va avea aceeaşi rază de convergenţă. Are loc:

$$\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_nt^n\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}x^{n+1}\text{,}\quad \forall x\in(-R,+R) \tag{3.5}$$

$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$ pentru seria initiala.

$$R' = \lim_{n\to\infty}\frac{|c'_n|}{|c'_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{n+1}\frac{n+2}{|c_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = R$$

Teorema 4: Seria de puteri $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$ poate fi *derivată termen cu termen* în orice punct din intervalul de convergenţă $(-R,+R)$ $R>0$, şi seria obţinută prin derivare termen cu termen va avea aceeaşi rază de convergenţă. Are loc:

$$S'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}nc_n x^{n-1} \qquad (3.6)$$

Remarcă: O serie de puteri $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$ are derivată de orice ordin:

$$S^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\dots(n-k+1)c_n x^{n-k} \qquad \forall x\in(-R,+R) \qquad (3.7)$$

unde $k=1,2,\dots$. Raza de convergenţă a acestei serii este egală cu raza de convergenţă a seriei iniţiale $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$.

3.3 Serii Taylor

Definiţie: O funcţie $f(x)$ este *dezvoltabilă în serie de puteri* $\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$ pe intervalul $(-R,+R)$ dacă seria de puteri este convergentă pe acest interval şi suma sa este egală cu $f(x)$, adică:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n\ ,\ \forall x\in(-R,+R) \qquad (3.8)$$

Teorema 1: Dacă o funcţie $f(x)$ este dezvoltabilă în serie de puteri (3.8) pe intervalul $(-R,+R)$, atunci dezvoltarea este *unică*, şi coeficienţii seriei (3.8) sunt definiţi în mod unic de suma seriei (adica de funcţie).

Într-adevăr,

$$f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\dots+c_nx^n+\dots \qquad (3.9)$$

$$f'(x)=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\dots+nc_nx^{n-1}+\dots$$

$$f''(x)=1\cdot 2c_2+2\cdot 3c_3x+3\cdot 4c_4x^2+\ldots+(n-1)nc_nx^{n-2}+\ldots$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(x)=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot nc_n+2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n\cdot(n+1)c_{n+1}x+\ldots,\ \forall x\in(-R,+R)$$

Considerăm $x=0$,

$$f^{(n)}(0)=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n\ c_n$$

$$f^{(n)}(0)=n!c_n$$

$$c_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\qquad n=0,1,2,\ldots \tag{3.10}$$

Coeficienţii seriei sunt unic determinaţi.

Observaţie: Dacă o funcţie $f(x)$ este dezvoltabilă în serie de puteri în diferenţele $x-x_0$, adică:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n,\qquad \forall x\in(x_0-R,x_0+R) \tag{3.11}$$

atunci, coeficienţii seriei sunt:

$$c_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\qquad n=0,1,2,\ldots \tag{3.12}$$

Fie $f(x)$ o funcţie care are derivate de orice ordin în $x=x_0$, adică există $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $\ldots$, $f^{(n)}(x_0),\ldots$.

Definiţie: Seria de puteri de forma:

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\ldots$$
$$\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{3.13}$$

se numeşte *serie Taylor* a funcţiei $f(x)$ în punctul x_0.

Restul de ordinul *n* al acestei serii este:

$$R_n(x) = S(x) - \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right] \qquad (3.14)$$

Pentru a evalua restul putem folosi *formula Lagrange*:

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}\left(x_0 + \theta(x - x_0)\right), \text{ unde } \theta \in (0,1) \qquad (3.15)$$

Caz particular: $x_0 = 0 \Rightarrow$ *serie Maclaurin* a funcţiei $f(x)$ în punctul $x_0 = 0$:

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad (3.16)$$

Observaţie: Dacă o funcţie $f(x)$ este dezvoltabilă în serie de puteri pe $(x_0 - R, x_0 + R)$ atunci seria va fi seria Taylor a funcţiei $f(x)$.

Afirmaţia reciprocă nu e în general adevărată. Seria Taylor a unei funcţii cu derivate de orice ordin pe un interval, poate fi convergentă pe interval, dar suma sa să nu fie egală cu funcţia.

Problemă: Ce condiţii trebuie să îndeplinească $f(x)$ pentru ca seria Taylor să fie convergentă la $f(x)$ pe intervalul $(x_0 - R, x_0 + R)$, $R > 0$?

Teorema 2: Dacă o funcţie $f(x)$ îndeplineşte condiţiile:

- □ are derivate de orice ordin pe $(x_0 - R, x_0 + R)$
- □ restul seriei Taylor $R_n(x) \to 0$ pentru $n \to \infty$, $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.

Atunci:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \text{ pe } (x_0 - R, x_0 + R),\ R > 0 \qquad (3.17)$$

Teorema 3: Dacă o funcţie $f(x)$ îndeplineşte condiţiile:

- □ are derivate de orice ordin pe $(x_0 - R, x_0 + R)$
- □ există $M > 0$ astfel încât $\left|f^{(n)}(x)\right| \le M$, $n = 1, 2, \ldots$, $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.

Atunci:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \text{ pe } (x_0 - R, x_0 + R),\ R > 0$$

Seriile Taylor ale funcţiilor elementare

1. $f(x)=e^x$. Funcţia are derivate de orice ordin în intervalul $(-a,+a)$, $\forall a>0$ şi verifică inegalitatea: $\left|f^{(n)}(x)\right|=e^x<e^a$, $n=0,1,2,\dots$

Atunci funcţia exponenţială e^x poate fi reprezentată ca o serie Taylor care este convergentă la funcţie pe orice interval $(-a,+a)$ adică pe întreaga axă reală. Deoarece $f^{(n)}(0)=e^0=1$, pentru $n=0,1,2,\dots$ avem:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad (3.18)$$

Raza de convergenţă este $R=+\infty$. Intr-adevar,

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\frac{(n+1)!}{1}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$$

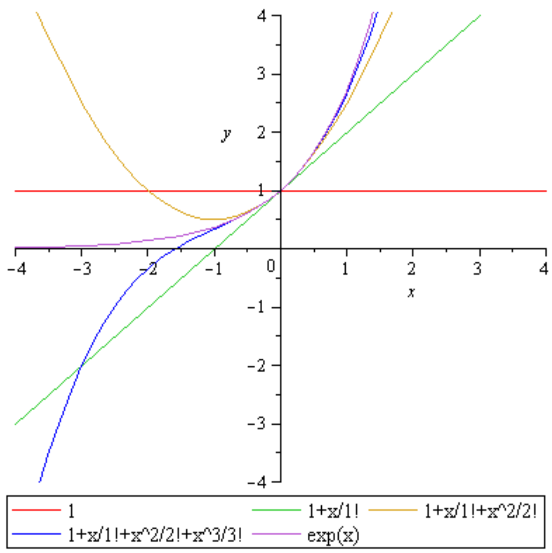

Figura 3.2 $f(x)=e^x$ şi aproximaţiile acesteia

Dacă în (3.18) substituim *x* cu –*x*, avem:

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\dots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!} \qquad (3.19)$$

2. $f(x)=\sin x$. Funcţia are derivate de orice ordin, astfel încât

$$\left|(\sin x)^{(n)}\right|=\left|\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)\right|\le 1,\quad n=0,1,2,\dots,\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

Cu teorema 3, $\sin x$ poate fi reprezentată ca o serie Taylor în *x* pe $\mathbb{R}$, serie convergentă la funcţie. Deoarece,

$$f^{(n)}(0) = \sin n\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{pentru} \quad n = 2k \\ (-1)^k & \text{pentru} \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \quad = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (3.20)$$

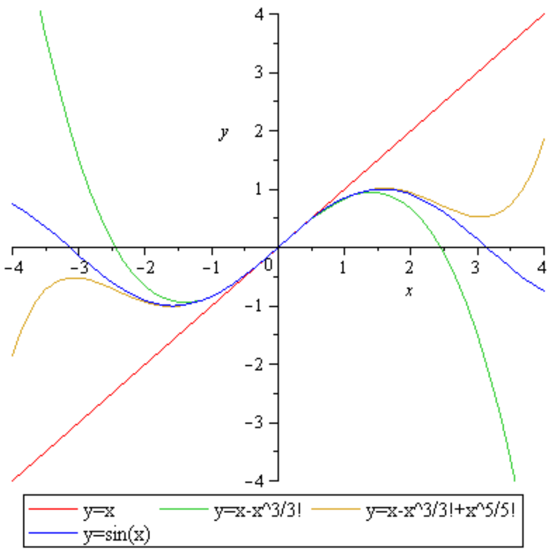

Figura 3.3 $f(x) = \sin x$ şi aproximaţiile acesteia