Notite de curs: Matematica II

Eugenia Paulescu

Facultatea de Fizica, Universitatea de Vest din Timisoara

Martie-2023

Aceste notite sunt pentru cursul de matematica pentru anul I, licenta in fizica, predate in anul universitar 2022/2023 , in semestrul II. Voi fi recunoscatoare pentru orice feedback din partea studentilor sau altor cititori critici.

Fiecare curs are asociat un set de probleme, pe care-l gasiti in directorul TEME.

Cuprins

Cap. I Serii numerice

Bibliografie: Krasnov et al. (1989), Riley et al. (2006)

1.1 Convergenţa unei serii numerice

O *serie* este o suma care are un numar infinit de termeni. Formal scriem:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1.1}$$

Suma primilor n termeni din serie se numeste *a n-a sumă parţială* a seriei si o notam S_n :

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \tag{1.2}$$

In practica, suntem interesati de suma unei serii cu numar infinit de termeni. Suma unei serii infinite de termeni este definita cel mai bine prin considerarea *sumei partiale* a primilor n termeni, S_n. Daca valoarea sumei partiale S_n tinde la o limita finita, S, atunci cand n tinde la infinit, spunem ca seria este *convergenta* si *suma* sa este limita S. Cu alte cuvinte,

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n \tag{1.3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \tag{1.4}$$

Dacă limita $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ nu există sau este infinită, atunci spunem ca seria este *divergentă* şi *nu are sumă*.

Exemple:

1. Arătaţi că următoarea serie este convergentă:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \ldots + \frac{1}{4n^2 - 1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$$

Considerăm a n-a sumă parţială a seriei:

$$S_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \ldots + \frac{1}{4n^2 - 1}$$

Pentru calcularea acestei sume folosim metoda diferentelor. Scriem termenul general in forma:

$$\frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

Si reprezentăm suma parţială în forma:

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\ldots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)
\end{aligned}$$

Trecând la limită obţinem:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}$$

Cu definiţia, seria este convergentă şi suma sa este $S=1/2$, sau

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}$$

2. Considerăm seria cunoscută ca *progresie geometrică* cu raţia q:

$$a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}, \qquad a\in\mathbb{R}^* \qquad (1.5)$$

A n-a sumă parţială a seriei este:

$$S_n = a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}$$

$$= a\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}, \qquad q\neq 1 \qquad (1.6)$$

- Dacă $|q|<1$, atunci $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ şi astfel:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}\right)=\frac{a}{1-q}$$

Adică seria este convergentă şi suma sa este $\frac{a}{1-q}$ sau

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q} \qquad (1.7)$$

- Dacă $|q|>1$, atunci $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$ şi atunci $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ adică seria este divergentă.

- Dacă $q=-1$, obţinem o serie divergentă $a-a+a-a+\dots$, $a\neq 0$. Sumele parţiale ale acestei serii sunt:

$$S_n = \begin{cases} a, & \text{pentru } n \text{ impar} \\ 0, & \text{pentru } n \text{ par} \end{cases}$$

Deci $\lim_{n\to\infty} S_n$ nu există.

Dacă $q=1$, obţinem seria $a+a+a+\dots$ pentru care $S_n = na$, şi

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} na = \infty$$

Adică seria este divergentă.

În consecinţă, seria $a+aq+aq^2+\dots+aq^{n-1}+\dots$ este convergentă pentru $|q|<1$, suma sa fiind $\frac{a}{1-q}$, şi este divergentă pentru $|q|\geq 1$.

Exemplu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 7\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 7+7\frac{1}{2}+7\left(\frac{1}{2}\right)^2+\dots = \frac{7}{1-\frac{1}{2}} = 14$$

1.2 Operaţii cu serii

Vom intelege prin *natura* unei serii calitatea acesteia de a fi convergenta sau divergenta. Dacă se renunţă la un număr finit de termeni ai unei serii sau daca se adauga un numar finit de termeni, seria nou obţinută va avea aceeaşi natură (convergenta sau divergenta) ca şi seria iniţială. Desigur, în caz de convergenţă, suma se modifică în mod corespunzător cu suma termenilor la care se renunţă, respectiv se adaugă.

Teorema 1: Daca seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este *convergentă* şi daca $\lambda \neq 0$ este un număr real, atunci si seria,

$$\lambda a_1 + \lambda a_2 + \ldots + \lambda a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$$

este *convergentă* şi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1.8}$$

Teorema 2: Dacă seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sunt *convergente*, atunci suma şi diferenţa lor $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ sunt serii *convergente* şi mai mult:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{1.9}$$

În cele ce urmează, ne ocupăm de noţiunea de *rest* pentru o serie.

Definiţie: Dacă renunţăm la primii *n* termeni ai unei serii *convergente*:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

obţinem o seria *convergentă*:

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+k} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} \tag{1.10}$$

care se numeşte *restul de ordinul n al seriei.*
Seria originală poate fi scrisă în forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_n + R_n \tag{1.11}$$

Dacă *S* este suma seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, atunci restul va fi $R_n = S - S_n$ pentru orice $n = 1, 2, \ldots$

1.3 Teste pentru convergenţa seriilor

Desi sumele unor serii infinite populare pot fi calculate, suma unei serii infinite, in general, este dificil de calculat. Cu toate acestea, este util sa stim macar daca o serie este convergenta. Pentru a investiga convergenta oricarei serii, este util sa avem disponibile un numar de teste si criterii cu larga aplicabilitate.

Criteriul Cauchy: O condiţie necesară şi suficientă pentru ca o serie numerică $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ să fie convergentă este ca oricare ar fi $\varepsilon > 0$ să existe un număr $N = N(\varepsilon)$ astfel încât pentru orice $n > N$ şi $\forall p \in \mathbb{N}$ să aibă loc inegalitatea:

$$\left| a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+p} \right| < \varepsilon \qquad (1.12)$$

Test necesar (preliminar) pentru convergenţa seriilor numerice**:** Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă, atunci:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad (1.13)$$

Demonstraţie: Considerăm $p = 0$ în criteriul Cauchy şi vom avea $|a_n| < \varepsilon$, pentru toţi $n > N(\varepsilon)$. Numărul $\varepsilon > 0$ fiind arbitrar, avem $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
(Definitia limitei unui sir: $a_n \to A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)$ *a.i.* $|a_n - A| < \varepsilon, \forall n > N(\varepsilon)$)

Consecinţă: Dacă $\lim_{n\to\infty} a_n$ este nenulă sau nu există, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

Exemple:

1. Seria

$$-1 + 0 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos\frac{\pi}{5} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{\pi}{n}$$

este divergentă deoarece:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \cos\frac{\pi}{n} = \cos 0 = 1 \neq 0$$

2. Seria

$$1-1+1-1+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$$

este divergentă deoarece

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1} \quad \text{nu există.}$$

Remarcă: Testul necesar ne dă o condiţie necesară pentru convergenţa unei serii, condiţie care nu este şi suficientă, adică condiţia $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ poate fi îndeplinită şi de o serie divergentă.

3. Considerăm seria numerică

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \tag{1.14}$$

numită *seria armonică.* Seria armonică îndeplineşte condiţia necesară, deoarece:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

Dar, demonstrăm că această serie este *divergentă*. Astfel în criteriul Cauchy, considerăm $p=n$, atunci:

$$|a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{2n}|=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$$

$$>\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{n+n}+\frac{1}{n+n}+\ldots+\frac{1}{2n}$$

$$=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}=n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$$

Această inegalitate are loc pentru n oricât de mare. Urmează că pentru $\varepsilon \le 1/2$ şi $p=n$ inegalitatea $|a_n+a_{n+1}+\ldots+a_{n+p}|<\varepsilon$ din criteriul Cauchy, nu este îndeplinită, şi cu criteriul Cauchy seria armonică este divergentă.

Teste de comparaţie pentru serii cu termeni pozitivi

Test I de comparatie: Fie

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1.15}$$

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{1.16}$$

două serii cu termeni pozitivi, astfel încât

$$a_n \le b_n \;, \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.17}$$

Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă, atunci şi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este la rândul său divergentă.

Remarcă: Acest rezultat are loc chiar dacă inegalitatea (1.17) are loc numai pentru $n \ge k$, deoarece renunţând la un număr finit de termeni, nu alterăm convergenţa seriei.

Recomandări pentru teste de comparaţie:

-seria progresie geometrică $a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$ este convergentă pentru $|q| < 1$, suma sa fiind $\frac{a}{1-q}$, şi este divergentă pentru $|q| \ge 1$. Are loc:

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q} \tag{1.18}$$

-seria armonică este divergentă şi n-are sumă:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tag{1.19}$$

Exemple:

1. Examinaţi convergenţa seriei:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+\sqrt{n}}$$

Observvăm că:

$$\frac{1}{2^n+\sqrt{n}}\le\frac{1}{2^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad n=1,2,\dots$$

Deoarece seria progresie geometrică $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ este convergentă, atunci cu testul I de comparaţie seria dată converge şi ea.

2. Examinaţi convergenţa seriei

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$$

Deoarece $\ln n<n$, avem $\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$ pentru $n=2,3,\dots$ Cum seria armonică $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ este divergentă, deci şi seria dată este divergentă.

3. Examinaţi convergenţa seriei:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n}$$

Cum $\frac{1}{n\cdot 3^n}\le\left(\frac{1}{3}\right)^n$ seria dată este convergentă.

4. Examinaţi convergenţa seriei:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{2^n}\right)$$

Cum $\sin x\le x,\quad \forall x\ge 0$, avem inegalităţile:

$$0<1-\cos\frac{\pi}{2^n}=2\sin^2\frac{\pi}{2\times 2^n}\le 2\left(\frac{\pi}{2\times 2^n}\right)^2=\frac{\pi^2}{2}\frac{1}{4^n}$$

Cum seria progresie geometrică $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ este convergentă. Atunci, cu testul I de comparaţie, seria dată este convergentă.

Test II de comparaţie (la limită)**:** Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ două serii de numere reale pozitive astfel încât limita:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \qquad (0 < L < \infty) \tag{1.20}$$

să existe şi să fie finită şi nenulă. Atunci seriile au aceeaşi natură, sunt convergente sau divergente simultan.

Exemple:

1. Examinaţi convergenţa seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{n}$

Comparăm seria dată cu seria armonică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \pi \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = \pi \neq 0$$

Seria armonică este divergentă deci şi seria dată este divergentă.

2. Examinaţi convergenţa seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - n}$

Pentru comparaţie considerăm seria convergentă $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Atunci:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^n - n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{n}{2^n}} = 1 \neq 0$$

Deoarece $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$. Astfel seria dată este convergentă.

3. Examinaţi convergenţa seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$

Comparăm seria dată cu seria armonică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2}\neq 0$$

Seria armonică este divergentă deci şi seria dată este divergentă.

4. Stiind ca seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ este divergenta, determinati natura urmatoarei serii:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2-n-3}{n^3+2n}$$

Daca consideram $a_n=\left(4n^2-n-3\right)/\left(n^3+2n\right)$ si $b_n=1/n$ atunci limita (1.20) devine:

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(4n^2-n-3\right)/\left(n^3+2n\right)}{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3-n^2-3n}{n^3+2n}=4$$

Deoarece limita este finita si nenula, seria data este si ea divergenta.

Test D'Alembert: (Testul D'Alembert pentru convergenţa unei serii) Considerăm seria $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ cu $a_n>0$. Dacă:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lambda \tag{1.21}$$

atunci pentru $0\le\lambda<1$ seria este convergentă, şi pentru $\lambda>1$ seria este divergentă. Dacă $\lambda=1$, atunci nu se ştie natura seriei.

Exemple:

1. Examinaţi convergenţa seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$

$$a_n=\frac{n^2}{2^n} \qquad a_{n+1}=\frac{\left(n+1\right)^2}{2^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n+1\right)^2 2^n}{2^{n+1}n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=\frac{1}{2}<1$$

Cu testul D'Alembert seria este convergentă.

2. Examinaţi convergenţa seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$

$$a_n=\frac{n^n}{n!} \qquad a_{n+1}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{(n+1)^n}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n\, n!}{n!n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e>1$$

Cu testul D'Alembert seria este divergentă.

3. Examinaţi convergenţa seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$

$$a_n=\frac{2n-1}{2^n} \qquad a_{n+1}=\frac{2n+1}{2^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)2^n}{2^{n+1}(2n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{4n-2}=\frac{1}{2}<1$$

Cu testul D'Alembert seria este convergentă.

4.Determinati daca urmatoarea serie este convergenta

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots$$

Putem folosi testul raportului D'Alembert pentru a stabili ca aceasta serie este convergenta.

$$\lambda=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

Observatie: Seria data poate fi obtinuta inlocuind $x=1$ in dezvoltarea Maclaurin a exponentialei e^x:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\ ,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

Cum stim ca aceasta este convergenta seria data are suma $e^1=e$.

Test Cauchy: Considerăm seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cu $a_n > 0$. Dacă:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda \tag{1.22}$$

atunci pentru $0 \le \lambda < 1$ seria este convergentă, şi pentru $\lambda > 1$ seria este divergentă. Dacă $\lambda = 1$, atunci nu se ştie natura seriei.

Exemple:

1. Determinati daca urmatoarea serie este convergenta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{27} + \dots$$

Cu testul radacinii al lui Cauchy, avem

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

Deci seria este convergenta.

2. Examinaţi convergenţa seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n-1} = \frac{1}{3} < 1$$

Cu testul Cauchy seria este convergentă.

3. Examinaţi convergenţa seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\ln^n (n+1)}$

$$a_n = \frac{2^n}{\ln^n (n+1)} \qquad \sqrt[n]{a_n} = \frac{2}{\ln(n+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\ln(n+1)} = 0 < 1$$

Cu testul Cauchy seria este convergentă.

4. Examinaţi convergenţa seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

$$a_n = \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \qquad \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{2}e > 1$$

Cu testul Cauchy seria este divergentă.

Testul Cauchy integral: Fie $f(x)$ o funcţie continuă, pozitivă şi monoton descrescătoare pentru $x \ge 1$. Atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ şi integrala improprie $\int_1^{\infty} f(x)dx$ sunt convergente sau divergente simultan. Rezultatul este valabil şi pentru $x \ge a$, cu a un număr mai mare ca unu.

Exemplu:

Examinaţi convergenţa seriei lui *Dirichlet* (*armonică generalizată*):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \tag{1.23}$$

$$f(n) = \frac{1}{n^p} \qquad \text{sau} \qquad f(x) = \frac{1}{x^p}$$

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ este convergentă pentru $p > 1$ şi divergentă pentru $p \le 1$

Pentru $p = 1$ seria este seria armonică care ştim că este divergentă.

Într-adevăr,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b x^{-p}dx = \lim_{b\to+\infty} \left(\left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_1^b \right) = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{b^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1} \right) = \frac{1}{p-1} \text{ dacă } p > 1.$$

Deci, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ este *convergentă* pentru $p > 1$.

Observaţie: Convergenţa multor serii poate fi testată cu ajutorul seriei Dirichlet.
Functia Riemann zeta este:

$$\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \tag{1.24}$$

Si este convergenta pentru $p > 1$.

p	$\zeta(p)$
2	$\pi^2/6$
4	$\pi^2/90$
6	$\pi^2/945$

1. Examinaţi convergenţa seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$

$$f(x)=\frac{1}{x^2+1}$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^2+1}=\lim_{b\to+\infty} arctgx\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}(arctgb-arctg1)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

Integrala este convergentă, deci şi seria este convergentă.

2. Examinaţi convergenţa seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1}$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{xdx}{x^2+1}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{xdx}{x^2+1}=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\ln\left(b^2+1\right)-\frac{1}{2}\ln 2\right)=+\infty$$

Adică integrala este divergentă, seria este şi ea divergentă.

3.Determinati daca urmatoarea serie este convergenta:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-3/2)^2}=4+4+\frac{4}{9}+\frac{4}{25}+\dots$$

Consideram functia $f(x)=\frac{1}{(x-3/2)^2}$. Desigur $f(n)=a_n$ si $f(x)$ descreste monoton pentru $x>3/2$. Aplicand testul integral, consideram

$$\lim_{b\to\infty}\int_2^b\frac{1}{(x-3/2)^2}dx=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x-3/2}\right)\Bigg|_2^b=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{2-3/2}-\frac{1}{b-3/2}\right)=2$$

Deoarece integrala este convergenta, seria este convergenta.

1.4 Serii alternate. Testul Leibniz

Definiţie: Seria *alternată* este o serie în care termenii alternează semnele:

$$a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots \qquad (1.25)$$

În această expresie toţi a_n au acelaşi semn (de exemplu $a_n > 0$).

Exemplu: Seria armonică alternată:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

Testul Leibniz: Presupunem că în seria alternată $a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots$ $(a_n > 0)$ sunt îndeplinite condiţiile:

- $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$ (1.26)
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (1.27)

Atunci, seria este *convergentă*, iar suma sa *S* este pozitivă şi nu excede primul termen, adică $0 < S \le a_1$.

Exemplu: Seria armonica alternata

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \qquad (1.28)$$

este o serie *convergentă* deoarece

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \ldots \qquad \text{şi} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Testul Leibniz ne permite să *estimăm* restul de ordinul *n* al unei serii convergente,

$$R_n = \pm(a_{n+1} - a_{n+2} + \ldots)$$

rest care este la rândul său o serie alternată convergentă. Avem $|R_n| \le a_{n+1}$. Deoarece $R_n = S - S_n$, atunci

$$|S - S_n| \le a_{n+1} \qquad (1.29)$$

Eroarea absolută datorată înlocuirii sumei unei serii alternate cu a n-a suma parţială a seriei, nu este mai mare în valoare absolută, decât primul dintre termenii la care s-a renunţat.

Exemplu: Verificaţi convergenţa şi calculaţi aproximativ suma seriei:

$$1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n!}+\ldots$$

păstrând numai primii patru termeni şi estimaţi eroarea.

Deoarece $1>\frac{1}{2!}>\frac{1}{3!}>\ldots$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n!}=0$ seria este convergentă.

$$S\simeq S_4=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{24}=0.625$$

Atunci, $|S-S_4|\le\frac{1}{5!}=\frac{1}{120}$. Eroarea absolută este mai mică decât $\frac{1}{120}=0.0083$.

1.5 Serii cu termeni pozitivi şi negativi (oarecare)

Considerăm seria cu termeni pozitivi şi negativi $a_1+a_2+a_3+\ldots$ şi seria valorilor absolute $|a_1|+|a_2|+|a_3|+\ldots$

Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ este *convergentă*, atunci şi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ este *convergentă*.

Definiţii:

- Seria cu termeni pozitivi şi negativi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ se numeşte *absolut convergentă* dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ este convergentă.
- Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ se numeşte *semiconvergentă sau condiţionat convergentă* dacă este convergentă şi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ este divergentă.

Exemple:

1. Seria $1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}-\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}+\ldots$ este *absolut convergentă*, deoarece seria valorilor absolute $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\ldots$ este convergentă.

2. Seria $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\dots$ este *semiconvergentă* deoarece este convergentă şi seria valorilor absolute este seria armonică $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\dots$ care este divergentă.

Observaţii:

1. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ este convergentă, atunci are loc: $\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$.

2. La stabilirea naturii seriei $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ putem folosi testele stabilite la serii cu termeni pozitivi.

Teorema 1: Dacă termenii unei serii *absolut convergente* sunt arbitrar rearanjaţi, atunci seria rămâne absolut convergentă şi suma sa nu se modifică. Deci, suma unei serii absolut convergente este independentă de ordinea în care se adună termenii.

Teorema 2: Dacă o serie este *semiconvergentă*, atunci putem rearanja termenii seriei a.î. seria rezultată să aibă o altă sumă. Mai mult, rearanjarea poate fi făcută a.î. seria rezultată să fie divergentă.

Exemplu:

Considerăm seria armonica alternata semiconvergentă $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\dots$ cu suma S.
Rearanjăm termenii încât fiecare termen pozitiv să fie urmat de doi termeni negativi:

$$
\begin{aligned}
&\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\dots \\
&=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\dots \\
&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\dots \\
&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\dots\right)=\frac{1}{2}S
\end{aligned}
$$

Seria obţinută prin reordonare are suma egală cu jumătate din suma seriei iniţiale. Împotriva intuiţiei, termenii unei serii armonice alternate pot fi rearanjaţi astfel încât seria să aibă altă sumă. Într-o sumă finită de termeni rezultatul este independent de ordinea în care adunăm termenii, totuşi această regulă îşi poate pierde valabilitatea într-o sumă infinită.