10.3 Vibratii libere in coarda fixate la capete. Metoda Fourier (continuare)

Exemplu: Determinaţi legea vibraţiilor libere ale unei coarde omogene de lungime *l*, fixată la ambele capete, dacă la $t = 0$ coarda are forma unei parabole $hx(l-x)$, $h>0$ constant, viteza iniţială fiind nulă.

Problema matematică este o problema mixta alcătuită din ecuaţia:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ t>0, \ 0<x<l \tag{10.51}$$

cu condiţiile la limită:

$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = 0, \ t \geq 0 \tag{10.52}$$

şi cu condiţiile iniţiale:

$$u\big|_{t=0} = hx(l-x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq l \tag{10.53}$$

Folosim metoda Fourier si căutăm soluţiile netriviale ale ecuaţiei (10.51) care verifică condiţiile la limită (10.52), în forma:

$$u(x,t) = T(t)\cdot X(x) \tag{10.54}$$

Substituim $u(x,t)$ cu forma (10.54) în ecuaţia (10.51) şi separăm variabilele astfel:

$$T''(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x)$$

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \tag{10.55}$$

Partea stanga a ecuatiei (10.55) este o functie numai de timp, iar partea dreapta este o functie numai de coordonata si totusi sunt conectate prin ecuatie. Aceasta egalitate poate sa aiba loc numai daca, in ciuda aparentelor, fiecare termen nu depinde de variabila sa independenta ci este egala cu o constanta numita *constanta de separare*.

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \tag{10.56}$$

$\Rightarrow$ două ecuaţii diferenţiale ordinare separate, ce sunt conectate prin intermediul constantei de separare:

$$T''(t)+\lambda a^2 T(t)=0 \qquad (10.57)$$

$$X''(x)+\lambda X(x)=0 \qquad (10.58)$$

Cu condiţiile la limită (10.52) $u|_{x=0}=u|_{x=l}=0$, obtinem conditiile pentru $X(x)$:

$$X(0)=0 \qquad X(l)=0 \qquad (10.59)$$

Am stabilit deja că valorile proprii ale problemei (10.58-59) sunt:

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n=1,2,\ldots \qquad (10.60)$$

Cu funcţiile proprii corespunzătoare (solutia ecuatiei diferentiale liniare, omogena cu coeficienti constanti (10.58)):

$$X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x, \quad n=1,2,\ldots \qquad (10.61)$$

Pentru $\lambda=\lambda_n$ soluţia generală a ecuaţiei (10.57), $T''(t)+\lambda a^2 T(t)=0$ este:

$$T_n(t)=A_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+B_n\sin\frac{n\pi a}{l}t \qquad (10.62)$$

O solutie a ecuatiei (10.51) va fi:

$$u_n(x,t)=T_n(t)X_n(x)=\left(A_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+B_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

Cum ecuatia cu derivate partiale este liniara, solutia poate fi formata prin suprapunerea solutiilor corespunzatoare tuturor valorilor constantei de separare λ permise.

Aceasta suprapunere duce la soluţia problemei originale în forma seriei:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+B_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad (10.63)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a}{l}\left(-A_n\sin\frac{n\pi a}{l}t+B_n\cos\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad (10.64)$$

Pentru a determina coeficienţii A_n şi B_n vom folosi condiţiile iniţiale (10.53):

$$u|_{t=0}=hx(l-x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0, \quad 0\le x\le l$$

$$u|_{t=0}=hx(l-x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi}{l}x, \ 0\le x\le l \qquad (10.65)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a}{l}B_n\sin\frac{n\pi}{l}x, \ 0\le x\le l \qquad (10.66)$$

Din (10.66) rezultă că $B_n = 0$, $\forall n$, iar din (10.65) rezultă:

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l hx(l-x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \qquad (10.67)$$

Pentru determinarea rezultatului integrăm de două ori prin părţi:

$$A_n = \frac{2h}{l}\int_0^l (lx-x^2)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx = \frac{2h}{l}\int_0^l (lx-x^2)\,d\left(-\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$= \frac{2h}{l}\left(-\frac{l}{n\pi}(lx-x^2)\cos\frac{n\pi}{l}x\Big|_0^l + \frac{l}{n\pi}\int_0^l (l-2x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx\right)$$

$$= \frac{2h}{n\pi}\int_0^l (l-2x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx = \frac{2h}{n\pi}\int_0^l (l-2x)\,d\left(\frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$= \frac{2h}{n\pi}\left((l-2x)\frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{l}x\Big|_0^l + \frac{l}{n\pi}\int_0^l 2\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx\right)$$

$$= \frac{2h}{n\pi}\frac{2l}{n\pi}\int_0^l \sin\frac{n\pi}{l}x\,dx = \frac{4hl}{n^2\pi^2}\left(-\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{l}x\right)\Big|_0^l$$

$$= -\frac{4hl^2}{n^3\pi^3}\left(\cos\frac{n\pi}{l}x\right)\Big|_0^l = -\frac{4hl^2}{n^3\pi^3}(\cos n\pi - 1) = -\frac{4hl^2}{n^3\pi^3}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$\Rightarrow \quad A_{2m+1} = \frac{8hl^2}{\pi^3(2m+1)^3}\ , \quad m = 0,1,2,\ldots \qquad (10.68)$$

Substituim valorile determinate pentru coeficienţii A_n şi B_n în (10.63) şi obţinem soluţia problemei:

$$u(x,t) = \frac{8l^2h}{\pi^3}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^3}\cos\frac{(2m+1)\pi a}{l}t \times \sin\frac{(2m+1)\pi}{l}x \qquad (10.69)$$

Cap XI Ecuaţii parabolice

Bibliografie: Krasnov et al.(1989), Riley et al.(2006)

11.1 Ecuatia caldurii

Ecuatiile cu derivate partiale parabolice de ordinul doi modeleaza transferul de caldura si difuzia.

Vom deduce ecuatia care guverneaza distributia de temperatura intr-un material conductor de caldura. Notam cu $u(x,y,z,t)$ temperatura in mediu in punctul $M(x,y,z)$ la momentul *t*. Considerand mediul izotrop, notam cu $\rho(M)$ densitatea sa, cu $c(M)$ caldura specifica si cu $k(M)$ conductivitatea termica in *M*. In interiorul corpului caldura poate fi produsa sau absorbita (de exemplu prin reactii chimice). Notam cu $F(M,t)$ densitatea de surse de caldura in punctul *M* la momentul *t*.

Calculam bilantul caldurii intr-un volum arbitrar *V*, intr-un interval de timp $(t,\ t+dt)$. Fie *S* frontiera lui *V* si $\vec{n}$ normala exterioara la *S*. Daca temperatura corpului nu este uniform distribuita, atunci iau nastere fluxuri de caldura. In acord cu legea Fourier pentru fluxul de caldura, prin suprafata *S* intra in volumul *V* urmatoarea cantitate de caldura:

$$Q_1 = \iint_S k\frac{\partial u}{\partial n}dsdt = \iint_S \left(k\ grad\ u, \vec{n}^0\right)dsdt \tag{11.1}$$

unde $\vec{n}^0$ este vectorul unitate al normalei exterioare la *S*.
In ultima integrala aplicam teorema Gauss si transformam integrala de suprafata in integrala de volum:

$$Q_1 = \iiint_V div\left(k\ grad\ u\right)dvdt \tag{11.2}$$

Inputul surselor de caldura in interiorul lui *V* este:

$$Q_2 = \iiint_V F\left(x,y,z,t\right)dvdt \tag{11.3}$$

Presupunem ca in intervalul de timp $(t,\ t+dt)$ temperatura in *V* se modifica cu:

$$\Delta u = u\left(M,t+dt\right)-u\left(M,t\right) \simeq \frac{\partial u}{\partial t}dt \tag{11.4}$$

Fizica procesului spune ca pentru aparitia acestei modificari este necesar sa avem un input de caldura:

$$Q_3 = \iiint_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dvdt \qquad (11.5)$$

Din conservarea de energie avem:

$$Q_3 = Q_1 + Q_2 \,,$$

$$\iiint_V \left[div\left(k \; grad \; u\right) + F - c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \right] dvdt = 0 \qquad (11.6)$$

Cum volumul *V* este arbitrar, obtinem ecuatia:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = div\left(k \; grad \; u\right) + F\left(M, t\right) \qquad (11.7)$$

Daca mediul este omogen, adica daca *c*, ρ si *k* sunt constante, atunci ecuatia (11.7) devine:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f \qquad (11.8)$$

unde,

$$a^2 = \frac{k}{c\rho} \;, \qquad f = \frac{F}{c\rho} \;, \qquad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Ecuatia (11.8) se numeste *ecuatia caldurii*. Similar se deriveaza si ecuatia difuziei.

Pentru ca procesul de transfer de caldura sa fie descris complet, sunt necesare distributia initiala de temperatura (conditia initiala) si conditiile pe frontiera (conditiile la limita).

In cazul unidimensional ecuatia transferului de caldura este:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f\left(x, t\right) \qquad (11.9)$$

11.2 Problema Cauchy pentru ecuaţia căldurii

Considerăm ecuaţia unidimensională *omogena* a căldurii:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (11.10)$$

ce corespunde cazului *fără surse* de caldura deoarece $f(x,t)=0$. Formulăm *problema Cauchy* în modul următor: determinaţi funcţia $u(x,t)$ care verifică ecuaţia:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ ,\quad t>0, -\infty<x<\infty \tag{11.11}$$

şi condiţia iniţială:

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x),\quad -\infty<x<\infty \tag{11.12}$$

Din punct de vedere fizic, problema constă în determinarea temperaturii unei bare infinite, omogene, la orice moment de timp $t>0$, când se cunoaşte temperatura sa $\varphi(x)$ la $t=0$. Se presupune bara izolata termic si caldura nu paraseste bara.

Cum variabila spaţială *x* variază de la $-\infty$ la $+\infty$, vom supune ecuaţia şi condiţia iniţială la transformare Fourier în *x*.

Ipoteze:

1. $u(x,t)$ şi $\varphi(x)$ sunt suficient de netede şi pentru $x^2+t^2\to\infty$ acestea descresc atât de repede la zero încât să existe transformatele Fourier:

$$v(\omega,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{-i\omega x}dx \tag{11.13}$$

$$\tilde{\varphi}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{-i\omega x}dx \tag{11.14}$$

2. Se pot face diferenţieri, astfel încat:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u}{\partial t}e^{-i\omega x}dx=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{-i\omega x}dx\right)=\frac{dv(\omega,t)}{dt} \tag{11.15}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}e^{-i\omega x}dx=(i\omega)^2 v(\omega,t)=-\omega^2 v(\omega,t) \tag{11.16}$$

În relaţia (11.16) transformata Fourier *înlocuieşte diferenţierea cu operaţia de înmulţire.* Transformata Fourier a derivatei funcţiei este egală cu produsul dintre $i\omega$ şi transformata Fourier a funcţiei.

$$\mathrm{F}\left[f^{(k)}(x)\right]=(i\omega)^k\,\mathrm{F}\left[f(x)\right],\quad k=0,1,2,\ldots,m \tag{11.17}$$

Multiplicăm ambele părţi ale ecuaţiei (11.11) $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ cu $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\omega x}$ şi integrăm în raport cu x la $-\infty$ la $+\infty$, şi apoi cu (11.15-16) obţinem:

$$\frac{dv}{dt}+\omega^2 a^2 v=0 \tag{11.18}$$

Din condiţia iniţială (11.12) $u\big|_{t=0}=\varphi(x)$ obţinem:

$$v\big|_{t=0}=\tilde{\varphi}(\omega) \tag{11.19}$$

Observăm că, dacă aplicăm problemei (11.11-12) transformarea Fourier, obţinem problema Cauchy (11.18-19) pentru o ecuaţie diferenţială ordinară în care ω joacă rolul unui parametru.
Soluţia problemei (11.18-19) se obtine separând variabilele:

$$\frac{dv}{v}=-\omega^2a^2dt \qquad \ln|v|=-\omega^2a^2t+\ln|C|$$

$$\ln\left|\frac{v}{C}\right|=-\omega^2a^2t \qquad v(t)=Ce^{-\omega^2a^2t}$$

Şi, cu condiţia iniţială (11.19), solutia are forma:

$$v(\omega,t)=\tilde{\varphi}(\omega)e^{-\omega^2a^2t} \tag{11.20}$$

Din capitolut *VIII Transformări integrale, transformări Fourier*, primul exemplu de transformată Fourier, ştim că transformata Fourier a Gaussienei este tot o Gaussiana si putem arăta că şi al doilea factor din solutia (11.20) este tot o transformată Fourier.
Într-adevăr,

$$F\left[\frac{1}{a\sqrt{2t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\right]=\frac{1}{a\sqrt{2t}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}e^{-i\omega x}dx$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}-i\omega x+\omega^2a^2t}e^{-\omega^2a^2t}dx$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\omega^2a^2t}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}+i\omega a\sqrt{t}\right)^2}dx$$

Cu schimbarea de variabila $\psi=\frac{x}{2a\sqrt{t}}+i\omega a\sqrt{t} \quad d\psi=\frac{1}{2a\sqrt{t}}dx$

$$F\left[\frac{1}{a\sqrt{2t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\right]=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\omega^2a^2t}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\psi^2}d\psi=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\omega^2a^2t}\sqrt{\pi}=e^{-\omega^2a^2t} \qquad (11.21)$$

În concluzie, partea dreaptă a soluţiei (11.20) este produsul dintre transformatele Fourier ale funcţiilor $\varphi(x)$ şi $\frac{1}{a\sqrt{2t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$.

Folosim acum *teorema de convoluţie* în acord cu care:

$$\mathrm{F}[f_1 * f_2]=\sqrt{2\pi}\,\mathrm{F}[f_1]\mathrm{F}[f_2] \qquad (11.22)$$

Cu această teoremă putem reprezenta soluţia (11.20) $v(\omega,t)=\tilde{\varphi}(\omega)e^{-\omega^2a^2t}$ a problemei (11.18-19) $\frac{dv}{dt}+\omega^2a^2v=0$, $v\big|_{t=0}=\tilde{\varphi}(\omega)$ astfel:

$$v(\omega,t)=\tilde{\varphi}(\omega)e^{-\omega^2a^2t}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}F\left[\varphi(x)*\frac{1}{a\sqrt{2t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\right] \qquad (11.23)$$

Partea stângă a ecuaţiei (11.23) este transformata Fourier a funcţiei necunoscute $u(x,t)$, şi putem rescrie relaţia precedentă:

$$\mathrm{F}\left[u(x,t)\right]=\frac{1}{a\sqrt{2t}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{F}\left[\varphi(x)*e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\right]$$

Folosind expresia de definiţie pentru convoluţia funcţiilor $\varphi(x)$ şi $e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$, obţinem:

$$\mathrm{F}\left[u(x,t)\right]=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\lambda)e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4a^2t}}d\lambda\right]$$

$$(f_1 * f_2)(\tau)=\varphi(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x)f_2(\tau-x)dx$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\lambda)e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4a^2t}}d\lambda,\ t>0 \qquad (11.24)$$

Aceasta este soluţia problemei originale (11.11-12) şi se numeşte *integrala Poisson*.

Funcţia $G(x,t;\lambda)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4a^2t}}$ din formula Poisson se numeşte *soluţie fundamentală* pentru ecuaţia căldurii. Văzută ca funcţie de x şi t, $G(x,t;\lambda)$ verifică ecuaţia $u_t=a^2u_{xx}$. Soluţia fundamentală are semnificaţie fizică ce rezultă din considerentele următoare. Presupunem că distribuţia iniţială de temperatură este:

$$\varphi(x)=\varphi_\varepsilon(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\varepsilon}, & \text{daca } |x-x_0|<\varepsilon\\ 0, & \text{daca } |x-x_0|>\varepsilon\end{cases} \qquad (11.25)$$

Cu formula Poisson:

$$u(x,t)=\frac{1}{2\varepsilon}\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4a^2t}}d\lambda$$

Cu teorema de medie:

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4a^2t}}d\lambda=2\varepsilon e^{-\frac{(x-\tilde{\lambda})^2}{4a^2t}} \quad \text{cu } \tilde{\lambda}\in[x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon]$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\tilde{\lambda})^2}{4a^2t}} \qquad (11.26)$$

Trecând la limită $\varepsilon\to 0$, găsim:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}}=G(x,t;x_0) \qquad (11.27)$$

Aceasta înseamnă că funcţia $G(x,t;x_0)$ reprezintă distribuţia de temperatură în bară pentru $t>0$, dacă la $t=0$ şi $x=x_0$ a fost un vârf infinit de temperatură (cu $\varepsilon\to 0$ funcţia $\varphi_\varepsilon(x_0)\to+\infty$) şi în rest temperatura a fost nulă pe bară. O astfel de distribuţie iniţială de temperatură poată fi realizată aproximativ astfel: la $t=0$ aducem pentru un moment de timp în punctul $x=x_0$ al barei o flacără îngustă la temperatură excesiv de mare, adică un puls de temperatură. Această distribuţie iniţială de temperatură este descrisă de funcţia δ Dirac, notată $\delta(x-x_0)$.

Funcţia δ *Dirac* nu este o funcţie în sens clasic, şi se defineşte formal cu:

$$\delta(x-x_0)=\begin{cases}0, & \text{daca } x\neq x_0\\ +\infty, & \text{daca } x=x_0\end{cases} \tag{11.28}$$

Cele mai importante proprietăţi ale funcţiei δ Dirac sunt:

(a) $\int_\alpha^\beta \delta(x-x_0)dx=1$ pe orice interval (α,β) care conţine punctul x_0.

(b) $\int_\alpha^\beta f(x)\delta(x-x_0)dx=\begin{cases}f(x_0), & \text{daca } x_0\in(\alpha,\beta)\\ 0, & \text{daca } x_0\notin(\alpha,\beta)\end{cases}$ $\forall$ funcţia continuă $f(x)$.

Astfel, soluţia fundamentală $G(x,t;x_0)$ este o soluţie a ecuaţiei căldurii pentru bara infinită cu distribuţia iniţială de temperatură $\varphi(x)=\delta(x-x_0)$. Graficele lui $G(x,t;x_0)$ pentru diverse valori $t>0$ sunt redate în figură pentru $a=1$, $x_0=3$. Curbele 1, 2, 3 corespund la momente de timp $0<t_1<t_2<t_3$.

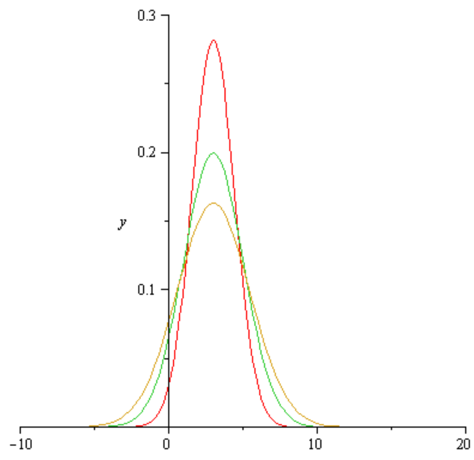

Figura 11.1

Exemplu: Determinaţi soluţia *problemei Cauchy*:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad t>0,\ -\infty<x<\infty$$

$$u|_{t=0}=e^{-x^2/2}, \qquad -\infty<x<\infty$$

Cu *formula Poisson* (11.24) $u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\lambda)e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4a^2t}}d\lambda$

pentru $\varphi(x)=e^{-x^2/2}$ şi $a=1$, obţinem:

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\lambda^2}{2}}e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4t}}d\lambda, \qquad t>0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\lambda^2}{2}}e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4t}}d\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\lambda^2}{2}-\frac{x^2}{4t}+\frac{x\lambda}{2t}-\frac{\lambda^2}{4t}}d\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\left(\lambda^2+\frac{x^2}{2t}-\frac{x\lambda}{t}+\frac{\lambda^2}{2t}\right)}d\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\left(\lambda^2\frac{1+2t}{2t}+\frac{x^2}{2t}-\frac{x\lambda}{t}\right)}d\lambda$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\frac{1+2t}{2t}\left(\lambda^2+\frac{x^2}{1+2t}-\frac{2x\lambda}{1+2t}\right)}d\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\frac{1+2t}{2t}\left(\lambda^2-\frac{2x\lambda}{1+2t}+\frac{x^2}{(1+2t)^2}-\frac{x^2}{(1+2t)^2}+\frac{x^2}{1+2t}\right)}d\lambda=$$

$$e^{-\frac{1}{2}\frac{1+2t}{2t}\left(-\frac{x^2}{(1+2t)^2}+\frac{x^2}{1+2t}\right)}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\frac{1+2t}{2t}\left(\lambda^2-\frac{2x\lambda}{1+2t}+\frac{x^2}{(1+2t)^2}\right)}d\lambda=e^{-\frac{x^2}{2(1+2t)}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\frac{1+2t}{2t}\left(\lambda-\frac{x}{1+2t}\right)^2}d\lambda$$

Facem schimbarea de variabilă:

$$\xi=\frac{\sqrt{1+2t}}{\sqrt{2t}}\left(\lambda-\frac{x}{1+2t}\right) \qquad d\xi=\frac{\sqrt{1+2t}}{\sqrt{2t}}d\lambda$$

Cu care integrala de mai sus devine:

$$=e^{-\frac{x^2}{2(1+2t)}}\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt{1+2t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\xi^2}d\xi=e^{-\frac{x^2}{2(1+2t)}}\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt{1+2t}}\sqrt{2\pi}=\frac{2\sqrt{\pi t}}{\sqrt{1+2t}}e^{-\frac{x^2}{2(1+2t)}}$$

Soluţia $u(x,t)$ a problemei date va fi:

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\frac{2\sqrt{\pi t}}{\sqrt{1+2t}}e^{-\frac{x^2}{2(1+2t)}}=\frac{1}{\sqrt{1+2t}}e^{-\frac{x^2}{2(1+2t)}}, \quad t>0$$

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{1+2t}}e^{-\frac{x^2}{2(1+2t)}}, \ t>0$$

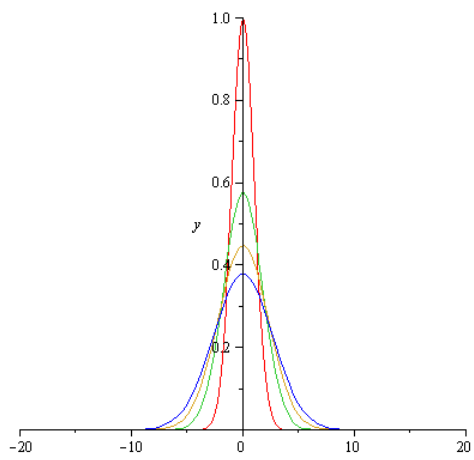

Figura 11.2

11.3 Propagarea căldurii în bara finită

Dacă o bară are lungimea *l* şi ocupă segmentul $0 \le x \le l$ pe axa *x*, atunci pentru a formula problema de propagare a căldurii într-o astfel de bară, în plus faţă de ecuaţia transferului de caldura:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad (11.29)$$

şi condiţia iniţială:

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x) \qquad (11.30)$$

este necesar să cunoaştem condiţiile de temperatură la capetele barei $x = 0$ şi $x = l$, adică să specificăm *condiţiile la limită*. Condiţiile la limită pot fi diferite depinzând de condiţiile de temperatură la capetele barei. Vom considera cele mai importante trei tipuri de condiţii la limită.

1. La capetele barei cunoaştem temperaturile (conditii Dirichlet):

$$u(0,t) = \mu_1(t), \qquad u(l,t) = \mu_2(t) \qquad (11.31)$$

unde $\mu_1(t)$ şi $\mu_2(t)$ sunt funcţii definite pe $0 \le t \le T$ intervalul de timp pe care se studiază procesul.

2. La capetele barei cunoaştem valorile derivatelor (conditii Neumann):

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \nu_1(t), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = \nu_2(t) \qquad (11.32)$$

Aceste condiţii apar atunci când cunoaştem fluxul de căldură prin capetele barei.

3. La capetele barei avem relaţii liniare între funcţie şi derivatele sale:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \lambda\big(u(0,t) - \theta(t)\big), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = -\lambda\big(u(l,t) - \theta(t)\big), \qquad (11.33)$$

unde, $\theta(t)$ este o funcţie cunoscută, temperatura mediului, iar λ este coeficientul de schimb termic.

Dintre problemele de mai sus ne vom referi la prima *problema mixta* pentru ecuatia transferului de caldura.

Formularea problemei: Determinati solutia $u(x,t)$ a ecuatiei (11.29) in domeniul $0<x<l$, $t>0$, $u(x,t)\in C^2\{0<x<l,t>0\}$, care verifica conditia initiala (11.30) pentru $0\le x\le l$ si conditiile la limita:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t) \qquad (11.29)$$

$$u|_{t=0}=\varphi(x) \qquad (11.30)$$

$$u|_{x=0}=\mu_1(t)\ ,\quad u|_{x=l}=\mu_2(t),\qquad t\ge 0 \qquad (11.34)$$

Consideram ca functia $u(x,t)$ este continua in domeniul inchis:
$\bar{D}=\{0\le x\le l,0\le t\le T\}$ care necesita ca functiile $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ sa fie continue si sa fie indeplinite si conditiile $\varphi(0)=\mu_1(0)$, $\varphi(l)=\mu_2(0)$.

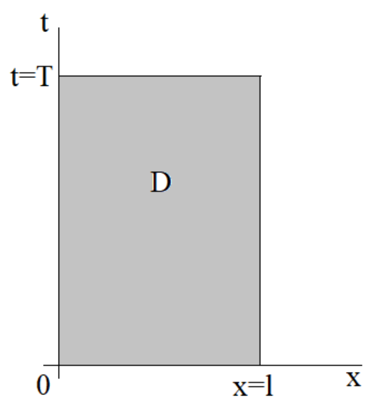

Figura 11.3

Teorema 1 (principiul maximului): Daca functia $u(x,t)\in C(\bar{D})$ verifica ecuatia caldurii $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ in domeniul $D\{0<x<l,0<t\le T\}$, atunci valorile maxime si minime pentru $u(x,t)$ se ating fie la $t=0$ fie pe frontierele $x=0$ sau $x=l$.

Interpretare fizica: daca temperatura unui corp pe suprafata sau la $t=0$ nu depaseste o valoare *M*, atunci in interiorul corpului (fara surse) nu va exista temperatura mai mare decat *M*.

Teorema 2 (de unicitate): Solutia problemei (11.29-30-31) in dreptunghiul $D\{0<x<l,0<t\le T\}$ este unica.

Teorema 3: Solutia problemei (11.29-30-31) depinde in mod continuu de conditiile initiale si la limita.

Metoda Fourier pentru ecuaţia căldurii

Considerăm *problema mixtă* ce implică ecuaţia căldurii cu primele condiţii la limită. Determinaţi soluţia $u(x,t)$ a ecuaţiei:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad t > 0, \ \ 0 < x < l \qquad (11.35)$$

care verifică condiţia iniţială:

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad 0 \le x \le l \qquad (11.36\ )$$

şi condiţiile la limită:

$$u(0,t) = \mu_1(t), \qquad u(l,t) = \mu_2(t)\ , \qquad t \ge 0 \qquad (11.37)$$

1. Cea mai simplă astfel de problemă este cea cu ecuaţia *omogenă*:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ t > 0, \ 0 < x < l \qquad (11.38)$$

cu condiţia iniţială:

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \ \ 0 \le x \le l \qquad (11.39)$$

şi condiţiile la limită *omogene*:

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \ge 0 \qquad (11.40)$$

Folosim metoda Fourier si căutăm soluţiile netriviale ale ecuaţiei (11.38) care verifică condiţiile la limită (11.40), în forma unui produs:

$$u(x,t) = T(t) \cdot X(x) \qquad (11.41)$$

Substituim $u(x,t)$ în ecuaţia $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$:

$$T'(t)\,X(x) = a^2 T(t)\,X''(x) \qquad (11.42)$$

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \qquad (11.43)$$

Partea stanga a ecuatiei (11.43) este o functie numai de timp, iar partea dreapta este o functie numai de coordonata si totusi sunt conectate prin ecuatie. Aceasta egalitate poate sa aiba loc numai daca, in ciuda aparentelor, fiecare termen nu depinde de variabila sa independenta ci este egal cu o constanta numita *constanta de separare*.

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda \qquad (11.44)$$

$\Rightarrow$ două ecuaţii diferenţiale ordinare:

$$T'(t)+\lambda a^2T(t)=0 \qquad (11.45)$$

$$X''(x)+\lambda X(x)=0 \qquad (11.46)$$

Pentru a obţine soluţiile netriviale de forma (11.41) $u(x,t)=T(t)\cdot X(x)$ cu condiţiile la limită $u(0,t)=0$, $u(l,t)=0$, este necesar să obţinem soluţiile netriviale ale ecuaţiei (11.46) cu condiţiile:

$$X(0)=0 \qquad X(l)=0 \qquad (11.47)$$

Trebuie să rezolvăm o problemă de valori proprii, adică să găsim λ pentru care problema (11.46-47) are soluţii netriviale. S-a arătat la ecuaţia undelor că doar pentru valorile $\lambda>0$ problema are solutii netriviale. Radacinile ecuatiei caracteristice asociate ecuatiei (11.46) $X''(x)+\lambda X(x)=0$, sunt $\pm i\sqrt{\lambda}$ si solutia generala a ecuatiei diferentiale (11.46) este:

$$X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x \qquad (11.48)$$

Cu conditiile la limita $X(0)=0$, $X(l)=0$ avem:

$$\begin{cases} C_1\cdot 1+C_2\cdot 0=0 \\ C_1\cos\sqrt{\lambda}l+C_2\sin\sqrt{\lambda}l=0 \end{cases}$$

Sistemul are solutii netriviale daca $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos\sqrt{\lambda}l & \sin\sqrt{\lambda}l \end{vmatrix}=0$, $\sin\sqrt{\lambda}l=0$ $\Rightarrow$ $\sqrt{\lambda}l=n\pi$,

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, n=1,2,\dots \qquad (11.49)$$

Cum $C_1=0$ din sistem, funcţiile proprii sunt:

$$X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x, n=1,2,\dots \qquad (11.50)$$

Pentru $\lambda=\lambda_n$ soluţia generală a ecuaţiei (11.45) $T'(t)+\lambda a^2T(t)=0$ se obtine cu separarea variabilelor:

$$\frac{dT}{dt}+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2T=0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dT}{T}=-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2dt$$

$$\ln T = -\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t + \ln a \quad \Rightarrow \qquad \ln\frac{T}{a} = -\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t$$

$$T_n(t) = a_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \tag{11.51}$$

cu a_n constante arbitrare.

Funcţia:

$$u_n(x,t) = T_n(t)\, X_n(x) = a_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi}{l} x, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{11.52}$$

este o solutie a ecuaţiei (11.38) $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Cum ecuatia este liniara, prin suprapunerea solutiilor corespunzatoare fiecarui n formam seria:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi}{l} x \tag{11.53}$$

Cerem ca această funcţie să verifice si condiţia iniţială $u\big|_{t=0} = \varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi}{l} x \tag{11.54}$$

Această serie este dezvoltarea în serie Fourier a funcţiei $\varphi(x)$ pe $(0,l)$. In consecinta putem calcula si ultimii coeficienti necunoscuti din solutia problemei (11.53):

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \sin\frac{n\pi}{l} x\, dx, \; n = 1, 2, \ldots \tag{11.55}$$

Exemplu: Determinaţi distribuţia temperaturii într-o bară uniformă cu lungimea π, dacă temperatura iniţială a barei este $u\big|_{t=0} = \sin x$, $0 \le x \le \pi$ şi la capetele barei temperatura este nulă.

Considerăm ecuaţia:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi \tag{11.56}$$

cu condiţia inţială:

$$u\big|_{t=0} = \sin x, \quad 0 \le x \le \pi \tag{11.57}$$

şi condiţiile la limită:

$$u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=\pi} = 0, \; t \ge 0 \tag{11.58}$$

Folosim metoda Fourier si căutăm soluţiile netriviale pentru ecuaţia (11.56), care îndeplinesc condiţiile la limită (11.58), în forma de produs:

$$u(x,t) = T(t) \cdot X(x) \tag{11.59}$$

Substituim $u(x,t)$ în ecuaţia (11.56), şi separam variabilele:

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \tag{11.60}$$

$\Rightarrow$ două ecuaţii diferenţiale ordinare:

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \tag{11.61}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \tag{11.62}$$

$$X(0) = X(\pi) = 0 \tag{11.63}$$

Valorile proprii ale problemei (11.62-63) sunt $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \Rightarrow \lambda_n = n^2$, $n = 1, 2, \ldots$, iar funcţiile proprii sunt $X_n(x) = \sin nx$. Pentru $\lambda = \lambda_n$ soluţia generală a ecuaţiei (11.61) este $T_n(t) = a_n e^{-a^2 n^2 t}$ şi astfel o solutie a ecuatiei (11.56) $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ este:

$$u_n(x,t) = a_n e^{-a^2 n^2 t} \sin nx \tag{11.64}$$

Cum ecuatia este *liniara*, căutam soluţia problemei (11.56-57-58) sub forma seriei:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-a^2 n^2 t} \sin nx \tag{11.65}$$

Dacă impunem condiţia iniţială (11.57) $u\big|_{t=0} = \sin x$, avem:

$$u(x,0) = \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$$

De aici, $a_1 = 1$, $a_k = 0$, $k = 2, 3, \ldots$ Atunci, soluţia problemei originale va fi:

$$u(x,t) = e^{-a^2 t} \sin x \tag{11.66}$$

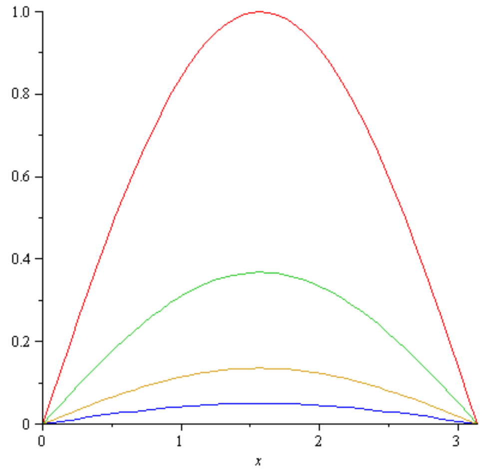

Figura 11.4 Condiţia iniţială (11.57) cu rosu; soluţii $u(x,t)$ pentru $0 < t_1 < t_2 < t_3$ şi $a = 1$.