Cap IX Ecuaţii cu derivate parţiale

Bibliografie: Krasnov et al.(1989), Riley et al.(2006), Pain (2005)

9.1 Definiţii. Exemple

Forma generală a unei ecuaţii cu derivate parţiale este:

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n}}\right) = 0 \qquad (9.1)$$

Această ecuaţie pune în relaţie variabilele independente $x_1, x_2, \ldots, x_n$, funcţia necunoscută $u = u\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ şi una sau mai multe derivate parţiale ale sale. Aici, $k_1, k_2, \ldots, k_n$, sunt numere naturale nenule, astfel încât $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = m$ şi *F* este o funcţie specificată de argumentele sale.
Ordinul ecuaţiei diferenţiale este egal cu ordinul cel mai mare al derivatelor parţiale prezente în ecuaţie.

Exemple: Dacă *x* şi *y* sunt variabile independente şi $u = u\left(x, y\right)$ este funcţia necunoscută, atunci:

$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ este ecuaţie diferenţială de ordinul întâi

şi $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^u$

sunt ecuaţii deferenţiale de ordinul doi.
Alte notaţii:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \ \ldots$$

Definiţie: O soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale de ordinul *m* (9.1) pe un domeniu *D,* cu variabilele independente $x_1, x_2, \ldots, x_n$ este orice funcţie $u = u\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \in C^m\left(D\right)$, astfel încât prin substituţia funcţiei şi a derivatelor sale în ecuaţia (9.1), aceasta se transformă într-o identitate în $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pe *D*.

Exemple:

1. Determinaţi soluţia $u = u(x, y)$ a ecuaţiei:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{9.2}$$

Această ecuaţie ne arată că funcţia necunoscută *u* este independentă de *x*, dar poate fi orice funcţie de *y*, adică:

$$u = \varphi(y) \tag{9.3}$$

Soluţia (9.3) conţine o funcţie arbitrară şi este soluţia generală a ecuaţiei (9.2).

2. Determinaţi soluţia $u = u(x, y)$ a ecuaţiei:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \tag{9.4}$$

Considerăm $\frac{\partial u}{\partial y} = v$. Atunci ecuaţia (9.4) devine $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$. Soluţia sa generală va fi o funcţie arbitrară $v = \omega(y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \omega(y)$$

Integrăm această ecuaţie în raport cu *y* şi considerăm *x* parametru:

$$u(x, y) = \int \omega(y) dy + g(x)$$

unde $g(x)$ este o funcţie arbitrară. Cum $\omega(y)$ este funcţie arbitrară şi integrala sa este funcţie arbitrară şi o notăm cu $f(y)$. Soluţia ecuaţiei (9.4) are forma:

$$u(x, y) = f(y) + g(x) \tag{9.5}$$

$f(y)$ şi $g(x)$ sunt funcţii arbitrare. Soluţia (9.5) a ecuaţiei cu derivate parţiale de ordinul doi (9.4) conţine două funcţii arbitrare. Aceasta este soluţia generală a ecuaţiei (9.4) şi orice soluţie a ecuaţiei (9.4) se obţine din (9.5) prin alegerea potrivită a funcţiilor $f(y)$ şi $g(x)$.

9.2 Ecuaţii cu derivate parţiale liniare. Proprietăţile soluţiilor

O ecuaţie cu derivate parţiale se numeşte *liniară* dacă este liniară în raport cu funcţia necunoscută şi cu derivatele acesteia care intră în ecuaţie. În caz contrar ecuaţia se numeşte *neliniară*. De exemplu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + e^{-x^2}$$

este ecuaţie liniară. În schimb, următoarele ecuaţii:

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} + u^2 = 0, \qquad u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 y$$

sunt neliniare.

În general, o *ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul doi liniară* pentru o funcţie de două variabile independente $u = u(x, y)$ are forma:

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = f(x,y) \tag{9.6}$$

unde $A(x,y), B(x,y), \ldots, c(x,y), f(x,y)$ sunt funcţii de x şi y definite pe un domeniu *D* din planul *xy*.

Dacă $f(x,y)=0$ pe *D*, atunci ecuaţia este una *omogenă*, iar în caz contrar este *neomogenă*.

Dacă notăm partea stângă a ecuaţiei (9.6) cu $L[u]$, putem rescrie (9.6) în forma scurta:

$$L[u] = f(x,y) \tag{9.7}$$

Ecuaţia omogenă corespunzătoare este:

$$L[u] = 0 \tag{9.8}$$

În aceste ecuaţii *L* este un operator diferenţial liniar definit pe spaţiul liniar al functiilor $C^2(D)$. Folosind proprietatea de liniaritate a operatorului *L* obţinem următoarele teoreme care exprimă proprietăţile soluţiilor ecuaţiilor cu derivate parţiale liniare şi omogene.

Teorema 1: Dacă $u(x,y)$ este o soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale *liniara* şi *omogena* $L[u]=0$, atunci şi $c \cdot u(x,y)$ cu c constantă, este o soluţie a ecuaţiei.

Teorema 2: Dacă $u_1(x,y)$ şi $u_2(x,y)$ sunt soluţii ale ecuaţiei cu derivate parţiale *liniară* şi *omogenă* $L[u]=0$, atunci şi suma $u_1(x,y)+u_2(x,y)$ este o soluţie a ecuaţiei.

Corolar: Dacă funcţiile $u_1(x,y)$, $u_2(x,y)$, $\ldots$, $u_k(x,y)$ sunt soluţii ale ecuaţiei cu derivate parţiale *liniară* şi *omogenă* $L[u]=0$, atunci şi combinaţia liniară:

$$c_1u_1(x,y)+c_2u_2(x,y)+\ldots+c_ku_k(x,y)$$

cu $c_1,c_2,\ldots,c_k$ constante arbitrare, este o soluţie a ecuaţiei.

Aceste proprietăţi sunt specifice şi soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale *ordinare* liniare şi omogene. O ecuaţie diferenţială ordinară liniară şi omogenă de ordinul *n* are exact *n* soluţii particulare liniar independente a căror combinaţie liniara ne dă soluţia generală a ecuaţiei.

Ecuaţiile cu derivate parţiale pot avea o mulţime infinită de soluţii particulare liniar independente, adică o mulţime de soluţii astfel încât orice număr finit din ele considerăm acestea vor fi funcţii liniar independente.

Exemplu: Ecuaţia $\frac{\partial u}{\partial y}=0$ are soluţia generală $u=\varphi(x)$, astfel soluţiile sale vor fi, de exemplu, funcţiile: $1,x,x^2,\ldots,x^n,\ldots$ liniar independente. In problemele liniare care implică ecuaţii cu derivate parţiale vom avea de a face nu numai cu combinaţii liniare ale unui număr finit de soluţii dar şi cu serii de solutii $\sum_{n=1}^{\infty}c_nu_n(x,y)$ în care c_n sunt constante şi $u_n(x,y)$ sunt soluţii ale ecuaţiei diferenţiale.

Teorema 3: Dacă $u(x,y)$ este o soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale *liniară* şi *neomogenă* $L[u]=f$ şi $v(x,y)$ este o soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale *liniară* şi *omogenă* corespunzătoare $L[u]=0$, atunci suma $u+v$ este o soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale *liniară* şi *neomogenă* $L[u]=f$.

Teorema 4: Dacă $u_1(x,y)$ este o soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale *liniară* şi *neomogenă* $L[u]=f_1$ şi $u_2(x,y)$ este o soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale *liniară* şi *neomogenă* $L[u]=f_2$, atunci u_1+u_2 este o soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale *liniară* şi *neomogenă* $L[u]=f_1+f_2$.

9.3 Clasificarea ecuaţiilor cu derivate parţiale liniare de ordinul doi cu două variabile independente

Definiţie: Ecuaţia cu derivate parţiale *liniară* de ordinul doi

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u=f(x,y) \tag{9.9}$$

într-o regiune Ω din planul *xy* este:

1. *hiperbolică* pe Ω dacă $\Delta=B^2-AC>0$ pe Ω
2. *parabolică* pe Ω dacă $\Delta=B^2-AC=0$ pe Ω
3. *eliptică* pe Ω dacă $\Delta=B^2-AC<0$ pe Ω

Folosind această definiţie putem verifica faptul că ecuaţiile:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$$

sunt hiperbolice $\forall x,y$.

Ecuaţia: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ este parabolică $\forall x,y$.

Ecuaţia: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ este eliptică $\forall x,y$.

Ecuaţia:

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

$$A=y\ ,\ B=0\ \text{ si } C=1,\ \Delta=B^2-AC=-y$$

este eliptică pentru $y>0$, parabolică pe dreapta $y=0$ şi hiperbolică în semiplanul $y<0$.

O ecuatie cu derivate partiale liniara, de ordinul doi, poate fi redusa la o forma mai simpla, forma *canonica* cu o schimbare a variabilelor independente:

$$\xi=\varphi(x,y)$$

$$\eta=\psi(x,y)\ \text{ cu }\ \varphi,\psi\in C^2$$

Jacobianul transformarii trebuie sa fie nenul: $J=\begin{vmatrix}\frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial y}\\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial y}\end{vmatrix}\neq 0$

Forma *canonică* este specifică fiecărui tip de ecuaţie.

1) Dacă ecuaţia (9.9) este <u>hiperbolică</u> ($\Delta>0$), atunci aceasta se transformă în:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=F\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)$$

sau

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=\Phi\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)$$

Acestea sunt două forme canonice pentru ecuaţia hiperbolică.

2) Dacă ecuaţia este <u>parabolică</u> ($\Delta=0$), atunci aceasta se transformă în:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=\Phi\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)$$

Aceasta este forma canonică pentru ecuaţia parabolică.

3) Dacă ecuaţia este <u>eliptică</u> ($\Delta<0$), atunci aceasta se transformă în:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=\Phi\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)$$

Aceasta este forma canonică pentru ecuaţia eliptică.

Forma funcţiilor F şi Φ este determinată de ecuaţia originală (9.9). În unele cazuri forma canonică a unei ecuaţii ne ajută să găsim soluţia generală a ecuaţiei originale.

Dacă numărul variabilelor independente este mai mare ca doi, ecuaţiile mai pot fi hiperbolice, parabolice şi eliptice. Dacă $n=4$, cele mai simple forme canonice ale ecuaţiilor sunt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \quad \text{hiperbolică}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \quad \text{parabolică}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \quad \text{eliptică}$$

În aceste ecuaţii funcţia necunoscută este $u(x,y,z,t)$.

Procesele oscilatorii ca vibraţii în coarde, propagarea undelor acustice, undelor electromagnetice sunt descrise de ecuaţii hiperbolice. Cea mai simplă astfel de ecuaţie este ecuaţia undelor unidimensională:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{9.10}$$

cu necunoscuta $u=u(x,t)$. Aici x este o coordonată spaţială, t este timpul, iar $a^2=T/\rho$ cu T tensiunea din coardă şi ρ densitatea liniară.

Conducţia termică şi difuzia sunt descrise de ecuaţii de tip parabolic. În caz unidimensional, cea mai simplă ecuaţie pentru transferul de căldură are forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{9.11}$$

cu necunoscuta $u=u(x,t)$. Aici, $a^2=k/c\rho$ cu ρ densitatea mediului, c căldura specifică şi k conductivitatea termică.

Procesele staţionare, adică acelea care necesită funcţii independente de timp, sunt descrise de ecuaţii eliptice. Un exemplu tipic este ecuaţia Laplace:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (9.12)$$

cu necunoscuta $u = u(x, y)$.

Prin simplă verificare se poate arăta că o soluţie a ecuaţiei hiperbolice (9.10), $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ este orice funcţie de forma:

$$u(x,t) = \varphi(x - at) + \psi(x + at) \qquad (9.13)$$

unde $\varphi(\xi)$, $\psi(\eta) \in C^2$ sunt arbitrare.

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \varphi'(x - at)(-a) + \psi'(x + at)a$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) = \varphi''(x - at)(-a)^2 + \psi''(x + at)a^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x,t) = \varphi'(x - at) + \psi'(x + at)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) = \varphi''(x - at) + \psi''(x + at)$$

Inlocuirea derivatelor in (9.10) ne conduce la o identitate.

Tot prin simpla verificare, se poate arăta că soluţiile ecuaţiei (9.11), $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ au forma:

$$u(x,t;\lambda) = Ae^{-a^2\lambda^2 t} \sin(\lambda x + \alpha) \qquad (9.14)$$

cu A şi α constante arbitrare şi λ parametru numeric.

Funcţiile reale $P_n(x, y)$ şi $Q_n(x, y)$ definite de relaţia:

$$(x + iy)^n = P_n(x, y) + iQ_n(x, y) \qquad (9.15)$$

sunt soluţii pentru ecuaţia Laplace (9.12), $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ pentru $n = 0,1,2,\ldots$

Acest rezultat este un caz particular al proprietăţii: partea reală şi partea imaginară a funcţiei analitice $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ de variabilă complexă $z = x + iy$ sunt soluţii ale ecuaţiei Laplace. Ecuaţia fiind liniară şi omogenă, atunci şi seriile:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n P_n(x,y) \qquad\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n Q_n(x,y)$$

vor fi soluţii pentru ecuaţia Laplace.

Precizări asupra problemelor cu ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul doi
Pentru o descriere completă a unui proces fizic nu este suficientă o ecuaţie diferenţială. Avem nevoie să cunoaştem starea iniţială a procesului (condiţiile iniţiale) şi condiţiile pe frontiera *S* a domeniului $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ pe care se desfăşoară procesul (condiţiile pe frontieră).

De exemplu, soluţia generală a ecuaţiei $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ are forma:

$$u(x,y) = f(x) + g(y),$$

unde f şi g sunt funcţii difernţiabile arbitrare. Pentru a selecta soluţia care descrie procesul fizic considerat trebuie să adăugăm condiţii adiţionale.

Se disting trei tipuri de probleme ce implică ecuaţii cu derivate parţiale:

a) *Problema Cauchy* pentru ecuaţii hiperbolice şi parabolice: sunt date condiţiile iniţiale, domeniul Ω coincide cu întreg spaţiul $\mathbb{R}^n$. Fără condiţii pe frontieră.
b) *Problema cu frontiere* pentru ecuaţii eliptice: sunt date condiţii pe frontiera *S* a domeniul Ω. Fără condiţii iniţiale.
c) *Problema mixtă* pentru ecuaţii hiperbolice şi parabolice: sunt date condiţii iniţiale şi la limită, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$.

Cap X Ecuaţii hiperbolice

Bibliografie: Krasnov et al.(1989), Riley et al.(2006), Pain (2005)

Ecuaţiile hiperbolice apar în probleme asociate cu procese oscilatorii. Începem studiul cu ecuaţia undelor unidimensională, pentru vibraţii într-o coardă:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (10.1)$$

Prin definiţie, o coardă este un fir flexibil ideal subţire care este elastic când este întins şi rezistă la extensii. Presupunem că coarda vibrează în planul *xy* şi că deplasarea *u* este perpendiculară în orice moment de timp pe axa *x*. Vibraţiile procesului pot fi descrise de o funcţie $u(x,t)$ ce caracterizează deplasarea verticală a coardei.

10.1 Soluţia problemei Cauchy (Problema iniţială) pentru coarda infinită

Soluţia D'Alembert

Vrem să integrăm ecuaţia vibraţiilor libere într-o coardă omogenă:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (10.2)$$

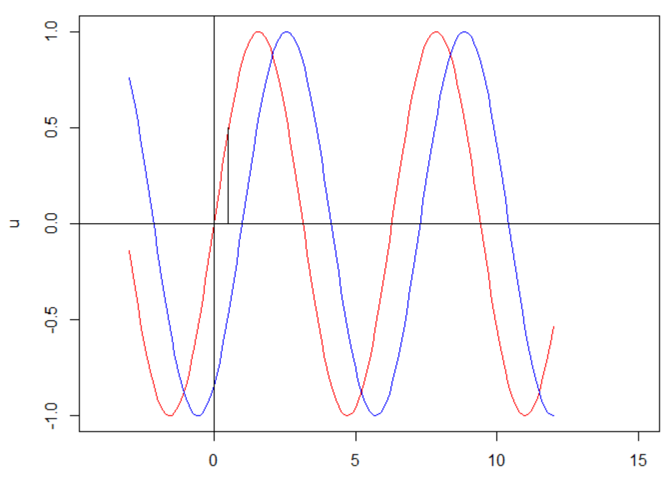

Figura 10.1 Forma coardei la doua momente de timp.

În această ecuaţie $u(x,t)$ este deplasarea unui punct al coardei la momentul *t* relativ la poziţia de echilibru. Pentru fiecare valoare a lui *t* graficul funcţiei $u=u(x,t)$ ne indică forma coardei la momentul *t* (vezi figura 10.1).

Introducem două noi variabile independente:

$$\xi = x - at$$
$$\eta = x + at \qquad (10.3)$$

Facem aceste schimbări de variabile în ecuaţia (10.2):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$
$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$
$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \qquad (10.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = a\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = a\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi}\right)$$
$$= a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)$$
$$= a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \qquad (10.5)$$

Substituind expresiile pentru $\partial^2 u / \partial x^2$ şi $\partial^2 u / \partial t^2$, (10.4-5), în ecuatia (10.2), $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ obţinem:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \qquad (10.6)$$

Această ecuaţie este simplu de integrat. Rescriem ecuaţia astfel:

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)=0 \qquad (10.7)$$

$\Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial \xi}=\omega(\xi)$ unde $\omega(\xi)$ este funcţie arbitrară.

Integrăm această ecuaţie în raport cu ξ tratând pe η ca un parametru. Astfel,

$$u=\int \omega(\xi)\,d\xi+\theta_2(\eta) \qquad (10.8)$$

unde $\theta_2(\eta)$ este o funcţie arbitrară de η. Considerând $\int \omega(\xi)\,d\xi=\theta_1(\xi)$ o functie arbitrara, avem:

$$u=\theta_1(\xi)+\theta_2(\eta) \qquad (10.9)$$

Ne întoarcem la vechile variabile *x* şi *t* şi avem:

$$u(x,t)=\theta_1(x-at)+\theta_2(x+at) \qquad (10.10)$$

Prin testare directă se observă că funcţia $u(x,t)$ definită de (10.10) cu θ_1 şi θ_2 arbitrare, şi continuu diferenţiabile de ordinul doi este soluţie a ecuaţiei undelor (10.2), $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Aceasta este *soluţia generală* a ecuaţiei (10.2), orice soluţie a ecuaţiei (10.2) putând fi reprezentată în această formă cu alegeri potrivite pentru θ_1 şi θ_2. Această soluţie se numeşte *soluţie D'Alembert*.

Fiecare termen din (10.10) este soluţie pentru (10.2).

Soluţia:

$$u(x,t)=\theta_1(x-at) \qquad (10.11)$$

are următoarea interpretare fizică: $u(x,t)=\theta_1(x-at)$ reprezinta deplasarea coardei la momentul *t* si pozitia *x*. Toate pozitiile *x* si timpii *t* pentru care $x-at=const$ vor avea aceeasi deplasare instantanee. La $t=0$ această soluţie are forma $u=\theta_1(x)$ ca în figura 10.2. Ne imaginăm un observator care la $t=0$ porneşte din punctul $x=c$ de pe axa *x* şi se mişcă în sens pozitiv al axei *x* cu viteza *a* a.î. pentru el $dx/dt=a$, de unde $x=at+c$ şi $x-at=c$.

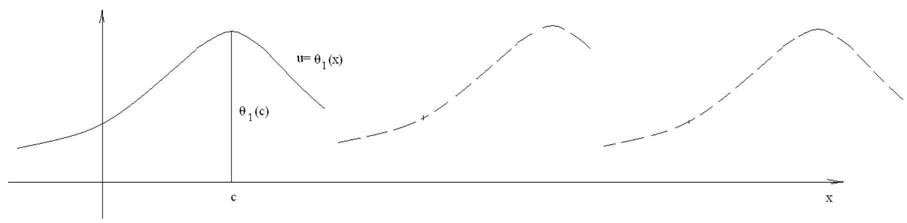

Figura 10.2

În consecinţă, pentru observatorul calator $u=\theta_1(x-at)=\theta_1(c)=const.$ Deci pentru acesta deplasarea *u* a coardei va fi aceeaşi la orice moment de timp adică va fi $\theta_1(c)$. Pentru un observator stationar, profilul initial $u(x,0)=\theta_1(x)$ se misca cu viteza *a* de-a lungul axei *Ox* ca si cum ar fi un sistem rigid. Soluţia (10.11) se numeşta *undă progresivă*, undă care se propagă în sens pozitiv al axei *x* cu viteza *a*. Functia θ_1 stabileste forma perturbatiei ce se propaga in coarda. Dacă alegem $\theta_1(\xi)=\sin\xi$, atunci vom avea o undă sinusoidală sau armonica.

Soluţia $u(x,t)=\theta_2(x+at)$ este *unda regresivă* care se propagă în sens negativ pe axa *x* cu viteza *a*.

Soluţia (10.10) este suma undelor progresivă şi regresivă. Acest fapt ne conduce la următoarea metodă grafică de construcţie a formei coardei la orice moment de timp: construim curbele $u=\theta_1(x)$ şi $u=\theta_2(x)$ reprezentând undele progresivă şi regresivă la momentul iniţial $t=0$ şi apoi fără să le schimbăm forma le deplasăm simultan cu $at>0$ în direcţii opuse, curba $u=\theta_1(x)$ spre dreapta şi $u=\theta_2(x)$ spre stânga.

Pentru a obţine reprezentarea grafică a coardei este suficient să construim suma algebrică a ordonatelor curbelor deplasate.

Exemple:

1. Aratati ca functia $u(x,t)=A\sin(kx)\cos(kat)$ satisface ecuatia undelor si exprimati aceasta unda ca o suma de doua unde, una care se deplaseaza spre stanga si una spre dreapta. R: $\frac{A}{2}\left(\sin k(x+at)+\sin k(x-at)\right)$

2. Stabiliti daca functia $\psi(x,t)=\exp\left(-4ax^2-bt^2+4\sqrt{ab}xt\right)$ cu a, b constante, descrie o unda. In caz afirmativ, care este viteza si directia de propagare. R: $\psi(x,t)=\exp\left[-4a\left(x-\sqrt{\frac{b}{a}}\frac{t}{2}\right)^2\right]$

Soluţia problemei Cauchy pentru o coardă infinită

Problema Cauchy constă în determinarea funcţiei $u(x,t)\in C^2$ care verifică ecuaţia undelor pentru $t>0$, $-\infty<x<\infty$ şi condiţiile iniţiale:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{10.12}$$

$$u\big|_{t=0}=\varphi_0(x),\ -\infty<x<\infty \tag{10.13}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi_1(x),\quad -\infty<x<\infty \tag{10.14}$$

unde $\varphi_0(x)\in C^2(\mathbb{R})$, $\varphi_1(x)\in C^1(\mathbb{R})$. Aici funcţia $\varphi_0(x)$ defineşte forma coardei la $t=0$ şi $\varphi_1(x)$ ne dă distribuţia vitezelor $\partial u/\partial t$ pe coardă la $t=0$.

Presupunem că soluţia problemei există, atunci aceasta este dată de (10.10) $u(x,t)=\theta_1(x-at)+\theta_2(x+at)$ Definim θ_1 şi θ_2 astfel încât să verifice condiţiile iniţiale (10.13) şi (10.14), adică:

$$u(x,0)=\theta_1(x)+\theta_2(x)=\varphi_0(x) \tag{10.15}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=-a\left[\theta_1'(x)-\theta_2'(x)\right]=\varphi_1(x) \tag{10.16}$$

Integrăm ultima relaţie:

$$\theta_1(x)-\theta_2(x)=-\frac{1}{a}\int_0^x\varphi_1(\alpha)\,d\alpha+C \tag{10.17}$$

cu C constantă arbitrară.

Din sistemul: $$\theta_1(x)+\theta_2(x)=\varphi_0(x)$$

$$\theta_1(x)-\theta_2(x)=-\frac{1}{a}\int_0^x\varphi_1(\alpha)\,d\alpha+C$$

găsim:

$$\theta_1(x) = \frac{1}{2}\varphi_0(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x \varphi_1(\alpha)\,d\alpha + \frac{C}{2} \qquad (10.18)$$

$$\theta_2(x) = \frac{1}{2}\varphi_0(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x \varphi_1(\alpha)\,d\alpha - \frac{C}{2} \qquad (10.19)$$

Substituim în solutia D’Alembert (10.10):

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\varphi_0(x-at) - \frac{1}{2a}\int_0^{x-at} \varphi_1(\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{2}\varphi_0(x+at) + \frac{1}{2a}\int_0^{x+at} \varphi_1(\alpha)\,d\alpha \qquad (10.20)$$

$$u(x,t) = \frac{\varphi_0(x-at)+\varphi_0(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \varphi_1(\alpha)\,d\alpha \qquad (10.21)$$

Aceasta este *formula lui D’Alembert*. Dacă $\varphi_0(x) \in C^2(\mathbb{R})$, $\varphi_1(x) \in C^1(\mathbb{R})$, atunci funcţia $u(x,t)$ dată de (10.21) verifică ecuatia undelor (10.12) şi condiţiile iniţiale (10.13-14) adică rezolvă problema. Mai mult, această soluţie este unică.

Regiune de dependenţă

Se vede din formula D’Alembert (10.21) că valoarea soluţiei *u* într-un punct *P* cu coordonatele (x,t) depinde numai de valorile lui φ_0 şi φ_1 pe segmentul $[x-at, x+at]$ pe axa *x*. De fapt, soluţia include valorile lui φ_1 pe întreg segmentul şi valorile lui φ_0 numai la capetele segmentului. Segmentul $[x-at, x+at]$ se numeşte *regiune de dependenţă* pentru *P*. (figura 10.3)

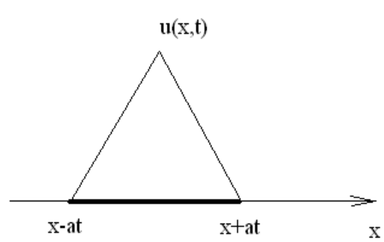

Figura 10.3

10.2 Formula lui D'Alembert

Considerăm două cazuri particulare care ne dau o idee despre comportamentul soluţiei problemei:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{10.22}$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi_0(x), \qquad -\infty < x < \infty \tag{10.23}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x), \qquad -\infty < x < \infty \tag{10.24}$$

Soluţia este formula D'Alembert:

$$u(x,t) = \frac{\varphi_0(x-at) + \varphi_0(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \varphi_1(\alpha)\,d\alpha \tag{10.25}$$

1. Fie $\varphi_1(x) = 0$ şi graficul funcţiei $\varphi_0(x)$ are forma din figura 4a. Considerăm $a = 1$. Atunci formula D'Alembert devine

$$u(x,t) = \frac{\varphi_0(x-t) + \varphi_0(x+t)}{2} \tag{10.26}$$

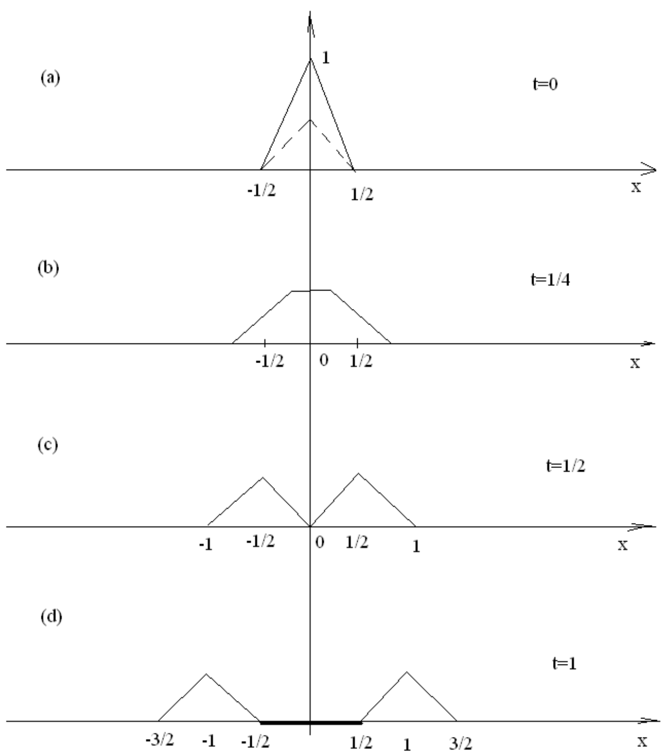

Figura 10.4

Pentru a obţine graficul lui $u(x,t)$ ca funcţie de x la un t fixat, procedăm astfel: desenăm două grafice identice, fiecare derivată din graficul lui $\varphi_0(x)$ înjumătăţind ordonatele (linia punctată). Apoi deplasăm un grafic cu t spre dreapta pe axa x pozitivă şi celălalt grafic cu t spre stânga. Apoi construim graficul $u(x,t)$ astfel încât ordonata fiecărui x este suma ordonatelor celor două grafice deplasate. În această manieră, construim grafice pentru $u(x,0)$, $u\left(x,\frac{1}{4}\right)$, $u\left(x,\frac{1}{2}\right)$, $u(x,1)$ în figura 10.4. Se observă că, în fiecare punct al coardei după ce trec ambele unde, punctele revin la pozitia de echilibru.

2.

$$\text{Fie } \varphi_0(x)=0 \text{ şi } \varphi_1(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1/2\\ 0, & |x|>1/2\end{cases} \tag{10.27}$$

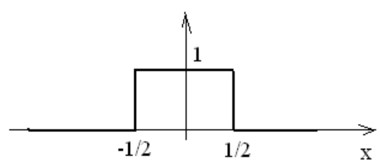

Figura 10.5

În acest caz coarda are doar impuls iniţial. Considerăm $a=1$ în formula D'Alembert:

$$u(x,t)=+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\varphi_1(\alpha)\,d\alpha \tag{10.28}$$

Pentru fiecare x fixat, soluţia $u(x,t)$ va fi nulă dacă intersecţia intervalului $(x-t,x+t)$ cu intervalul $(-1/2,1/2)$ unde $\varphi_1(x)\neq 0$ este vidă. $u(x,t)$ depinde de timp, pe măsură ce intervalul $(x-t,x+t)$ creşte, acesta cuprinde intervalul $(-1/2,\ 1/2)$. După ce intervalul $(x-t,x+t)$ cuprinde întreg intervalul $(-1/2,\ 1/2)$, $u(x,t)$ va ramane stationara: $\frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2}\varphi_1(\alpha)\,d\alpha=\frac{1}{2}$ (10.29)

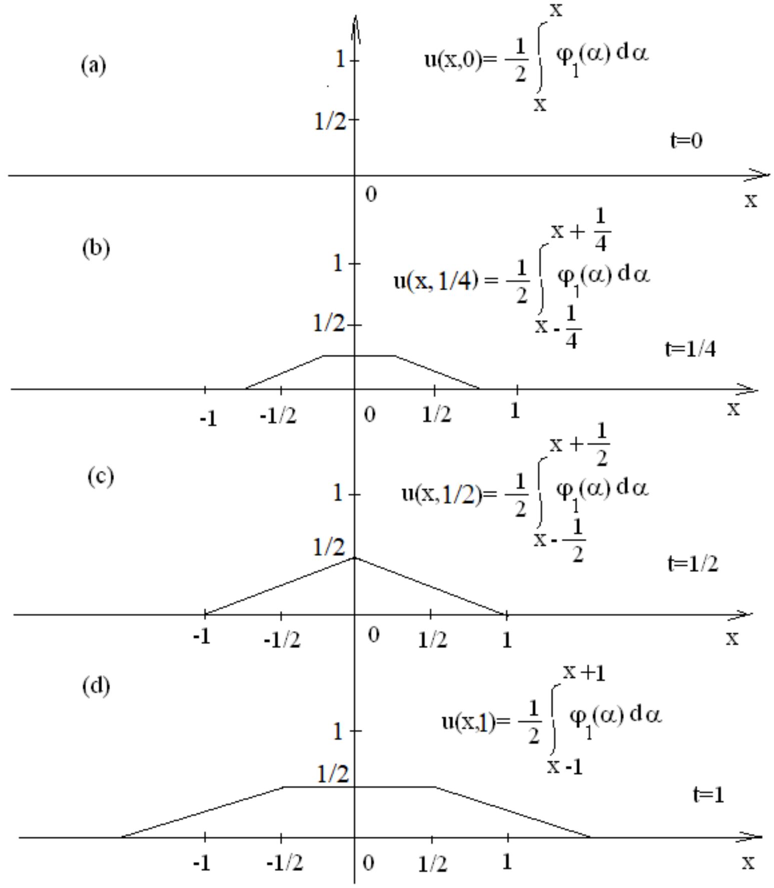

Figura 10.6

Exemplu: Rezolvaţi problema Cauchy:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad t>0, \quad -\infty<x<\infty$$

$$u\big|_{t=0}=\sin x, \qquad -\infty<x<\infty$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\cos x, \qquad -\infty<x<\infty$$

Soluţie:

$$u(x,t)=\frac{\varphi_0(x-at)+\varphi_0(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi_1(\alpha)\,d\alpha$$

$$u(x,t)=\frac{\sin(x-3t)+\sin(x+3t)}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}\int_{x-3t}^{x+3t}\cos\alpha\ d\alpha$$

$$=\frac{1}{2}(\sin x\cos 3t-\sin 3t\cos x+\sin x\cos 3t+\sin 3t\cos x)+\frac{1}{6}\sin\alpha\Big|_{x-3t}^{x+3t}$$

$$=\frac{1}{2}\left(2\sin x\cos 3t\right)+\frac{1}{6}\left(\sin\left(x+3t\right)-\sin\left(x-3t\right)\right)$$

$$=\sin x\cos 3t+\frac{1}{6}\left(\sin x\cos 3t+\sin 3t\cos x-\sin x\cos 3t+\sin 3t\cos x\right)$$

$$u\left(x,t\right)=\sin x\cos 3t+\frac{1}{3}\sin 3t\cos x$$

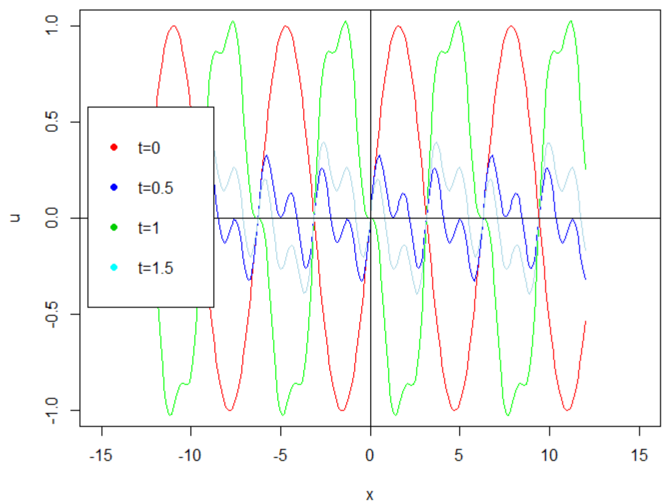

Figura 10.7 Solutia problemei la momente de timp diferite

10.3 Vibraţii libere ale unei coarde fixată la capete. Metoda Fourier

Metoda Fourier sau metoda separării variabilelor este una din cele mai comune metode de rezolvare a ecuaţiilor cu derivate parţiale. Considerăm problema vibraţiilor libere ale unei coarde omogene de lungime l fixată la capete.

Problema constă în rezolvarea ecuaţiei:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ t>0,\ 0<x<l \tag{10.30}$$

cu condiţiile la limită:

$$u\big|_{x=0}=u\big|_{x=l}=0,\ t\geq 0 \tag{10.31}$$

şi cu condiţiile iniţiale:

$$u\big|_{t=0}=\varphi_0\left(x\right),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi_1\left(x\right),\ 0\leq x\leq l \tag{10.32}$$

Problema (10.30-32) este o *problemă mixtă* deoarece conţine condiţii iniţiale şi la limită.

Vom căuta soluţii ale ecuaţiei (10.30) netriviale şi care îndeplinesc condiţiile la limită (10.31) în forma:

$$u(x,t) = T(t) \cdot X(x) \tag{10.33}$$

Substituim $u(x,t)$ în (10.30):

$$T''(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x)$$

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Partea stângă a acestei ecuaţii este dependentă numai de *t*, iar partea dreaptă numai de *x*. Acest lucru este posibil numai dacă cele două părţi nu depind nici de *t* nici de *x* adică ambele părţi sunt egale cu aceeaşi constantă. Notăm constanta cu -λ şi o numim *constantă de separare*. Astfel, avem:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \tag{10.34}$$

Observatie: Daca ecuatia cu derivate partiale are *n* variabile independente, numarul constantelor de separare este $n-1$.

Obţinem două ecuaţii diferenţiale ordinare:

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \tag{10.35}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \tag{10.36}$$

Condiţiile la limită (10.31), $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$ ne dau:

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0$$

$$u(l,t) = X(l)T(t) = 0$$

Deoarece $T(t) \neq 0$, deducem că $X(x)$ trebuie să verifice condiţiile la limită:

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \tag{10.37}$$

Problema (10.36-37) are soluţia evidentă $X(x) = 0$. Pentru a obţine soluţia netrivială $u(x,t)$ de forma (10.33) , $u(x,t) = T(t) \cdot X(x)$ care verifică condiţiile la limită (10.31) este necesar să găsim soluţiile netriviale ale ecuaţiei (10.36) cu condiţiile la limită (10.37).

Astfel, am ajuns la problema găsirii valorilor lui λ pentru care există soluţii netriviale ale problemei (10.36-37) şi apoi găsirea soluţiilor respective. Astfel de valori pentru λ se numesc *valori proprii* iar soluţiile netriviale corespunzătoare se numesc *funcţii proprii* ale problemei. Această problemă se numeşte *problemă Sturm-Louville*.

În continuare, determinăm valorile proprii şi funcţiile proprii ale problemei (10.36-37). Vom considera în detaliu trei cazuri: $\lambda<0$, $\lambda=0$, $\lambda>0$.

1. $\lambda<0$ Soluţia generală a ecuaţiei (10.36) $X''(x)+\lambda X(x)=0$, este:

$$X(x)=C_1e^{-\sqrt{-\lambda}x}+C_2e^{\sqrt{-\lambda}x}$$

Cu condiţiile la limită (10.37):

$$\begin{cases} C_1+C_2=0 \\ C_1e^{-\sqrt{-\lambda}\,l}+C_2e^{\sqrt{-\lambda}\,l}=0 \end{cases} \qquad (10.38)$$

Deteminantul sistemului:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\sqrt{-\lambda}l} & e^{\sqrt{-\lambda}l} \end{vmatrix} \neq 0$$

$\Rightarrow$ sistemul (10.38) are numai soluţia trivială $C_1=C_2=0 \Rightarrow X(x)=0$. Adică pentru $\lambda<0$ nu există soluţii netriviale.

2. $\lambda=0$ Soluţia generală a ecuaţiei (10.36) este:

$$X(x)=C_1x+C_2$$

Cu condiţiile la limită (10.37):

$$\begin{cases} C_1\cdot 0+C_2=0 \\ C_1\cdot l+C_2=0 \end{cases} \qquad (10.39)$$

Deteminantul sistemului:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ l & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$\Rightarrow$ sistemul (10.39) are numai soluţia trivială $C_1=C_2=0 \Rightarrow X(x)=0$. Adică pentru $\lambda=0$ nu există soluţii netriviale.

3. $\lambda>0$ Soluţia generală a ecuaţiei (10.36), $X''(x)+\lambda X(x)=0$, este:

$$X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x$$

Cu condiţiile la limită (10.37):

$$\begin{cases} C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0 \\ C_1 \cos\sqrt{\lambda} l + C_2 \sin\sqrt{\lambda} l = 0 \end{cases} \tag{10.40}$$

Sistemul (10.40) are soluţii netriviale $\Leftrightarrow$ deteminantul sistemului este nul.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos\sqrt{\lambda} l & \sin\sqrt{\lambda} l \end{vmatrix} = 0$$

$$\sin\sqrt{\lambda} l = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\lambda} l = k\pi, \; k \text{ întreg}$$

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \; k = \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{10.41}$$

Soluţiile netriviale ale problemei sunt posibile numai pentru valorile (10.41) a lui λ, şi acestea sunt valorile proprii ale problemei (10.36-37).

Din prima ecuaţie a sistemului (10.40) avem $C_1 = 0$. Atunci funcţiile:

$$X_k(x) = \sin\frac{k\pi}{l} x \tag{10.42}$$

vor fi funcţiile proprii ale problemei, determinate până la un factor, pe care l-am ales unu.

Corespunzător valorilor pozitive şi negative a lui *k* funcţiile proprii diferă doar print-o constantă. Atunci este suficient să considerăm numai valorile pozitive a lui *k* adică $1, 2, 3, \ldots$

Pentru $\lambda = \lambda_k$ soluţia generală a ecuaţiei (10.35), $T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$ este:

$$T_k(t) = A_k \cos\frac{k\pi a}{l} t + B_k \sin\frac{k\pi a}{l} t \tag{10.43}$$

Astfel funcţiile:

$$u_k(x,t) = X_k(x) T_k(t) = \left(A_k \cos\frac{k\pi a}{l} t + B_k \sin\frac{k\pi a}{l} t\right) \sin\frac{k\pi}{l} x \tag{10.44}$$

verifică ecuaţia (10.30) şi condiţiile la limită (10.31) $\forall A_k, B_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

Cum ecuaţia (10.30) este liniară şi omogenă, orice sumă de soluţii este soluţie.

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos\frac{k\pi a}{l} t + B_k \sin\frac{k\pi a}{l} t\right) \sin\frac{k\pi}{l} x \tag{10.45}$$

Rămâne să determinăm constantele A_k, B_k astfel încât (10.45) să satisfacă şi condiţiile iniţiale (10.32).

Diferenţiem formal seria (10.45) în raport cu *t*:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi a}{l}\left(-A_k\sin\frac{k\pi a}{l}t+B_k\cos\frac{k\pi a}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x \qquad (10.46)$$

Cosiderăm $t=0$ în (10.45) şi (10.46) şi cu condiţiile iniţiale (10.32) obţinem:

$$\varphi_0(x)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin\frac{k\pi}{l}x \qquad (10.47)$$

$$\varphi_1(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi a}{l}B_k\sin\frac{k\pi}{l}x \qquad (10.48)$$

Formulele (10.47-48) sunt dezvoltări în serie Fourier de sinusuri pe intervalul $(0,\, l)$ ale funcţiilor $\varphi_0(x)$ şi $\varphi_1(x)$. Coeficienţii dezvoltărilor (10.47-48) se calculează cu formulele cunoscute:

$$A_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi_0(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx \qquad (10.49)$$

$$B_k=\frac{2}{k\pi a}\int_0^l\varphi_1(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx \quad , \quad k=1,2,3,\ldots \qquad (10.50)$$