7.5 Integrarea funcţiilor complexe. Teorema Cauchy (continuare)

Teorema 1 (Cauchy): Fie $f(z)$ o funcţie *analitică* pe un domeniu *D* simplu conex şi fie γ un contur în *D* neted pe porţiuni, închis. Atunci:

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 0 \tag{7.98}$$

Observaţie: Dacă $f(z)$ este o funcţie *analitică* pe un domeniu *D* simplu conex, atunci valoarea integralei $\int_{\gamma} f(z)\,dz$ pe o curbă arbitrară γ netedă pe porţiuni din *D* este independentă de alegerea curbei γ. Valoarea integralei este determinată numai de punctul iniţial şi final al curbei. Punctăm acest lucru notând integrala astfel:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz \tag{7.99}$$

Teorema 2: Fie $f(z)$ o funcţie *analitică* pe un domeniu *D* simplu conex şi fie z_0 şi *z* puncte în *D*. Atunci, funcţia:

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta \tag{7.100}$$

este analitică pe *D* şi $F'(z) = f(z)$.

O funcţie $\Phi(z)$ este *primitivă* pentru $f(z)$ pe domeniul *D* dacă în fiecare punct al domeniului are loc:

$$\frac{d\Phi(z)}{dz} = f(z) \tag{7.101}$$

Orice primitivă $\Phi(z)$ pentru $f(z)$ se poate scrie:

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta + C \tag{7.102}$$

unde *C* este constantă şi $z_0, z \in D$.

Dacă $f(z)$ este o funcţie *analitică* pe un domeniu D simplu conex cu $z_0, z \in D$ si $\Phi(z)$ este o primitiva pentru $f(z)$, atunci are loc formula lui Leibniz-Newton:

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = \Phi(z) - \Phi(z_0) \tag{7.103}$$

Exemple:

1) Calculaţi integrala $I = \int_{1-i}^{2+i} \left(3z^2 + 2z\right)dz$

Integrandul $f(z) = 3z^2 + 2z$ este analitică peste tot, primitiva sa este $\Phi(z) = z^3 + z^2$. Cu formula Leibniz-Newton, găsim:

$$I = \left(z^3 + z^2\right)\Big|_{1-i}^{2+i} = (2+i)^3 + (2+i)^2 - (1-i)^3 - (1-i)^2 = 7 + 19i$$

2) Calculaţi integrala $\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$, unde $z = re^{i\theta} \neq 0$

Alegem un contur de integrare neted pe porţiuni, curba $A\widehat{B}C$ figura 7.22, ce conţine un segment AB pe axa reală cu capetele în 1 şi $|z|$ şi un arc $B\widehat{C}$ pe cercul $|\zeta| = r$ cu capetele în punctele $r = |z|$ şi z. Atunci:

$$\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_{AB} \frac{d\zeta}{\zeta} + \int_{BC} \frac{d\zeta}{\zeta}$$

Deoarece AB: $\zeta(t) = t$, $t \in [1, r]$

$\zeta'(t) = 1$ prima integrală va fi:

$$\int_{AB} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_1^r \frac{dt}{t} = \ln r = \ln|z|$$

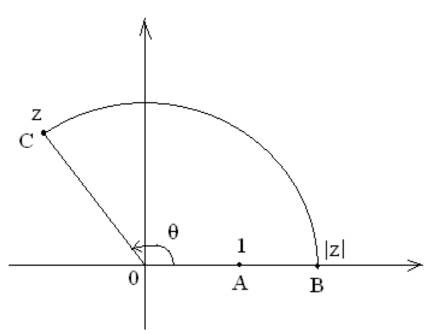

Figura 7.22

Pentru a calcula a doua integrală observăm că pe arcul $\widehat{BC}$, $\zeta(t) = re^{it}$ cu $t \in (0,\theta)$ si $\zeta'(t) = ire^{it}$. Atunci,

$$\int_{BC} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_0^\theta \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt = i\int_0^\theta dt = i\theta = i\arg z$$

$$\Rightarrow \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \ln|z| + i\arg z = \ln z$$

Deoarece $\frac{1}{\zeta}$ este analitică, cu teorema 2 avem $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ analitică şi:

$$\frac{dF}{dz} = f(z), \text{ adică } \frac{d\ln z}{dz} = \frac{1}{z}.$$

3) Calculaţi integrala $\int_\gamma z^n dz$ cu $n \in \mathbb{Z}$ după diverse curbe.

A) Un segment de dreaptă I pe axa reală de la -1 la 1. Parametrizarea curbei este:

I: $z(t) = t$, unde $-1 \le t \le +1$

$$\int_I z^n dz = \int_{-1}^{+1} t^n dt = \left.\frac{t^{n+1}}{n+1}\right|_{-1}^{+1} = \frac{1}{n+1}\left(1^{n+1} - (-1)^{n+1}\right) = \begin{cases} 0, & n = 2k+1 \\ \dfrac{2}{n+1}, & n = 2k \end{cases}$$

Pentru $n \le -1$ în $z = 0$ funcţia are singularitate şi integrala nu e definită.

B) O parabolă P între punctele $z = -1$ şi $z = +1$ cu parametrizarea:

P: $z(t) = t + i(t^2 - 1)$, unde $-1 \le t \le +1$

$z'(t) = 1 + i2t$

$$\int_P z^n dz = \int_{-1}^{+1} \left[t + i(t^2-1)\right]^n (1+2ti)\,dt = \left.\frac{\left[t + i(t^2-1)\right]^{n+1}}{n+1}\right|_{-1}^{+1} =$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[\left(1 + i(1^2-1)\right)^{n+1} - \left((-1) + i\left((-1)^2 - 1\right)\right)^{n+1}\right] = \frac{1}{n+1}\left(1 - (-1)^{n+1}\right) =$$

$$= \begin{cases} 0, & n = 2k+1 \\ \dfrac{2}{n+1}, & n = 2k \end{cases}$$

C) Integrăm pe semicercul superior C^+ cu aceleaşi capete $z=+1$ şi $z=-1$. Parametrizarea semicercului este:

$$C^+ : z(t)=e^{it}\text{, unde } 0\le t\le\pi$$

$$\int_{C^+} z^n dz = \int_0^\pi \left(e^{it}\right)^n ie^{it}dt = i\int_0^\pi e^{i(n+1)t}dt = i\left.\frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)}\right|_0^\pi =$$

$$=\frac{1}{n+1}\left(e^{i(n+1)\pi}-e^{i(n+1)0}\right)=\frac{1}{n+1}\left(\cos(n+1)\pi+i\sin(n+1)\pi-1\right)=\begin{cases}0, & n=2k+1\\ -\dfrac{2}{n+1}, & n=2k\end{cases}$$

Acest rezultat are semn schimbat, ceea ce se explică prin orientarea semicercului de la 1 la -1, în timp ce segmentul de dreaptă I şi parabola P erau orientate de la -1 la 1.

Integrarea funcţiilor multivaloare

Exemplu: Funcţia $w=\sqrt[n]{z}$ pune în corespondenţă *n* puncte w la fiecare *z*. Dacă $z=\rho e^{i\varphi}$, cele *n* numere w sunt:

$$w_k=\sqrt[n]{\rho}e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}},\quad -\pi<\varphi\le\pi,\quad k=0,1,\ldots,n-1$$

La diferite valori a lui *k* corespund diferite *ramuri* ale funcţiei $w=\sqrt[n]{z}$.

Când integrăm o funcţie multivaloare trebuie să precizăm o ramură. Acest lucru se realizează precizând valoarea funcţiei într-un punct de pe curba pe care se integrează.

Exemplu:

1) Calculaţi integrala $I=\int_\gamma \frac{dz}{\sqrt{z}}$, unde γ este semicercul superior cu $|z|=1$. Pentru $\sqrt{z}$ consideraţi ramura pentru care $\sqrt{1}=-1$ figura 7.23.

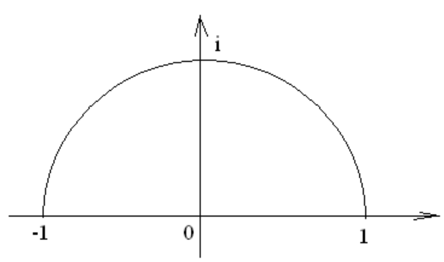

Figura 7.23

Considerăm parametrizarea semicercului: $z=re^{i\theta}$, unde $r=1$ şi θ variază de la 0 la π. Din condiţia $\sqrt{1}=-1$ rezultă:

$$\sqrt{e^{i\theta}} = e^{i\frac{\theta+2k\pi}{2}} \qquad \Rightarrow \theta = 0,\ k = 1 \quad \text{şi} \quad \sqrt{e^{i\theta}} = e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}$$

Atunci,

$$I = \int_0^{\pi} \frac{ie^{i\theta}}{\sqrt{e^{i\theta}}} d\theta = \int_0^{\pi} \frac{ie^{i\theta}}{e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}} d\theta = \int_0^{\pi} ie^{i\left(\frac{\theta}{2}-\pi\right)} d\theta$$

$$= 2e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\pi\right)}\Bigg|_0^{\pi} = 2\left(e^{-i\frac{\pi}{2}} - e^{-i\pi}\right) = 2(1-i)$$

Teorema Cauchy pentru un domeniu multiplu conex

Teorema Cauchy se referă la un contur care în întregime se află într-un domeniu în care funcţia este analitică. Dar teorema este valabilă şi pentru conturul frontieră al domeniului în care funcţia este analitică, dacă funcţia este continuă pe închiderea domeniului.

Teorema 3: Fie $f(z)$ o funcţie *analitică* pe un domeniu D simplu conex şi continuă pe domeniul închis $\bar{D}$ şi ∂D este frontiera domeniului. Atunci:

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 0 \tag{7.104}$$

În planul complex, considerăm n contururi netede pe porţiuni închise Γ_0, Γ_1, Γ_2, ..., Γ_{n-1}, astfel încât contururile Γ_1, Γ_2, ..., Γ_{n-1} se află fiecare în afara celorlalte şi toate se află în interiorul lui Γ_0. Mulţimea de puncte interioare lui Γ_0 şi exterioare pentru Γ_1, Γ_2, ..., Γ_{n-1} este un *domeniu multiplu conex D*. Frontiera completă Γ a lui *D* este un formata din curbele Γ_0, Γ_1, Γ_2, ..., Γ_{n-1}.

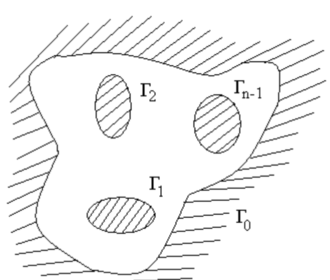

Figura 7.24

Vom orienta frontiera Γ a lui D în următoarea manieră: spunem că frontiera unui domeniu multiplu conex este *parcursa în sens pozitiv* dacă domeniul D rămâne tot timpul la stînga. Conturul extern Γ_0 este atunci parcurs în sens invers acelor de ceas, iar Γ_1, Γ_2, ..., Γ_{n-1} în sensul acelor de ceas.

Teorema 4: Fie $f(z)$ o funcţie *analitică* pe un domeniu multiplu conex D şi continuă pe domeniul închis $\bar{D}$. Atunci:

$$\int_{\Gamma} f(\zeta)d\zeta = 0 \qquad (7.105)$$

unde, Γ este frontiera completă a lui D alcătuită din contururile Γ_0, Γ_1, Γ_2, ..., Γ_{n-1} şi este parcursă în sens pozitiv.

Teorema 5: (*Formula integrală Cauchy*) Fie $f(z)$ o funcţie *analitică* pe un domeniu D şi continuă pe domeniul închis $\bar{D}$. Atunci, pentru orice punct interior z_0 din D avem:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0}dz \qquad (7.106)$$

unde, Γ este frontiera lui D parcursă în sens pozitiv. Astfel, putem evalua valoarea unei funcţii analitice $f(z_0)$ într-un punct din D calculând numai integrala pe un contur, pe frontieră.

Exemple:

1. $I_1 = \oint_{C_1} \frac{z^2 dz}{\left(z^2+3\right)^2 (z-i)}$ unde C_1 este cercul cu centrul în origine şi raza $r_1 = \frac{3}{2}$

$$f(z) \overset{not}{=} \frac{z^2}{\left(z^2+3\right)^2}$$ analitică în interiorul cercului C_1

$z_0 = i$ punct interior cercului C_1

Din formula integrală Cauchy avem:

$$I_1 = \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-i}dz = 2\pi i\, f(i) = 2\pi i \frac{i^2}{\left(i^2+3\right)^2} = 2\pi i \frac{-1}{4} = -i\frac{\pi}{2}$$

2. $I_2 = \oint_{C_2} \frac{\left(z^2-1\right)dz}{\left(z^2-4\right)^3\left(z-\frac{1}{2}\right)}$ unde *C₂* este cercul cu centrul în origine şi raza $r_2 = 1$

$$f(z) \overset{not}{=} \frac{z^2-1}{\left(z^2-4\right)^3} \text{ analitică în interiorul cercului } C_2$$

$$z_0 = \frac{1}{2} \text{ punct interior cercului } C_2$$

Din formula integrală Cauchy avem:

$$I_2 = \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z-\frac{1}{2}} dz = 2\pi i\, f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\pi i \frac{\frac{1}{4}-1}{\left(\frac{1}{4}-4\right)^3} = 2\pi i \frac{-\frac{3}{4}}{\left(-\frac{15}{4}\right)^3} = 2\pi i \frac{3}{4} \frac{4^3}{15^3} = \frac{32\pi}{1125} i$$

3. $I_3 = \oint_{C_3} \frac{e^{z/2} dz}{\left(z^2-20\right)^4\left(z-i\pi\right)}$ unde *C₃* este cercul cu centrul în origine şi raza $r_3 = 4$

$$f(z) \overset{not}{=} \frac{e^{z/2}}{\left(z^2-20\right)^4} \text{ analitică în interiorul cercului } C_3$$

$$z_0 = i\pi \text{ punct interior cercului } C_3$$

Din formula integrală Cauchy avem:

$$I_3 = \oint_{C_3} \frac{f(z)}{z-i\pi} dz = 2\pi i\, f(i\pi) = 2\pi i \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{\left(\left(i\pi\right)^2-20\right)^4} = 2\pi i \frac{\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}}{\left(-\pi^2-20\right)^4} = \frac{-2\pi}{\left(\pi^2+20\right)^4}$$

4. $$\int_{c(i,1)} \frac{dz}{z^2+1} = \int_{c(i,1)} \frac{dz}{(z+i)(z-i)} = \int_{c(i,1)} \frac{f(z)}{z-i} dz = 2\pi i f(i) = 2\pi i \frac{1}{i+i} = \pi$$

unde $f(z) = \frac{1}{z+i}$ analitica pe $C(i,1)$ deoarece singura singularitate este in $z = -i$ şi i interior lui $C(i,1)$

5. Calculaţi integrala $\oint_{\Gamma} \frac{e^z}{z^2-2z-3} dz$ unde Γ este cercul de rază 2 cu centrul în origine parcurs în sens invers acelor de ceas.

$$\frac{e^z}{z^2-2z-3}=\frac{e^z}{(z+1)(z-3)}=\frac{f(z)}{z+1} \text{ unde } f(z)=\frac{e^z}{z-3}$$

Aceasta este analitică pe discul $|z|\le 2$ deoarece singura singularitate este în $z=3$ şi se află în afara conturului *Γ*. Atunci cu formula integrală Cauchy obţinem:

$$\oint_\Gamma \frac{e^z}{z^2-2z-3}dz=\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z+1}dz=2\pi i\, f(-1)=2\pi i\frac{e^{-1}}{-1-3}=-\frac{\pi i}{2e}$$

6. $$\int_{C(0,3)}\frac{e^z}{z^2-2z}dz=\int_{C(0,3)}\frac{e^z}{z(z-2)}dz=\int_{C(0,3)}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z}\right)e^z dz=$$

$$\frac{1}{2}\int_{C(0,3)}\frac{e^z}{z-2}dz-\frac{1}{2}\int_{C(0,3)}\frac{e^z}{z}dz=\frac{1}{2}2\pi i f(2)-\frac{1}{2}2\pi i f(0)$$

$$=\frac{1}{2}2\pi i e^2-\frac{1}{2}2\pi i e^0=\pi i\left(e^2-1\right)$$

Existenţa derivatelor de orice ordin ale unei funcţii analitice

Teorema 6: Fie $f(z)$ o funcţie *analitică* pe un domeniu *D* şi continuă pe domeniul închis $\bar{D}$. Atunci în orice punct interior a lui *D* funcţia are derivate de orice ordin:

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta \qquad (7.107)$$

unde Γ este frontiera lui *D* şi $n=1,2,...$

Relaţia (7.107) se numeşte *formulă integrală Cauchy generalizată*.

Exemple:

1. În aceste exemple calculăm derivatele pentru trei funcţii simple şi considerăm conturul de integrare cercul *C* de rază *r* cu centrul în *z*.

a) $f(z)=K$ o constantă

$$n=1 \quad f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{K}{(\zeta-z)^2}d\zeta$$

Parametrizam cercul *C* centrat în *z*,

$$\zeta=z+re^{i\theta} \quad d\zeta=rie^{i\theta}d\theta$$

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{Krie^{i\theta}}{\left(re^{i\theta}\right)^2}d\theta=\frac{K}{2\pi r}\int_0^{2\pi}e^{-i\theta}d\theta$$

$$=\frac{K}{2\pi r}\frac{e^{-i\theta}}{-i}\bigg|_0^{2\pi}=-\frac{K}{2\pi ri}\left(\cos 2\pi-i\sin 2\pi-1\right)=0$$

b) $f(z)=z$

$$n=1\quad f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\zeta}{(\zeta-z)^2}d\zeta$$

Parametrizam cercul C centrat în z,

$$\zeta=z+re^{i\theta}\qquad d\zeta=rie^{i\theta}d\theta$$

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{\left(z+re^{i\theta}\right)rie^{i\theta}}{\left(re^{i\theta}\right)^2}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{z+re^{i\theta}}{re^{i\theta}}d\theta=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{z}{r}\int_0^{2\pi}e^{-i\theta}d\theta+\int_0^{2\pi}d\theta\right)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{z}{r}\frac{e^{-i\theta}}{-i}\bigg|_0^{2\pi}+\theta\Big|_0^{2\pi}\right)=\frac{1}{2\pi}\left(0+2\pi\right)=1$$

c) $f(z)=z^2$

$$n=1\quad f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\zeta^2}{(\zeta-z)^2}d\zeta$$

Parametrizam cercul C centrat în z,

$$\zeta-z=re^{i\theta}\qquad d\zeta=rie^{i\theta}d\theta$$

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{\left(z+re^{i\theta}\right)^2rie^{i\theta}}{\left(re^{i\theta}\right)^2}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{z^2+\left(re^{i\theta}\right)^2+2zre^{i\theta}}{re^{i\theta}}d\theta=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{z^2}{r}\int_0^{2\pi}e^{-i\theta}d\theta+r\int_0^{2\pi}e^{i\theta}d\theta+2z\int_0^{2\pi}d\theta\right)=$$

$$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{z^2}{r}\frac{e^{-i\theta}}{-i}\bigg|_0^{2\pi}+r\frac{e^{i\theta}}{i}\bigg|_0^{2\pi}+2z\,\theta\Big|_0^{2\pi}\right)=\frac{1}{2\pi}\left(0+0+2z2\pi\right)=2z$$

Serii Taylor si Laurent

Daca $f(z)$ este analitica pe cercul C de raza R centrat in punctul $z = z_0$ atunci functia este dezvoltabila in serie Taylor pe cerc:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{7.108}$$

unde $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \tag{7.109}$$

Daca $f(z)$ are o singularitate in interiorul lui C, in punctul $z = z_0$, atunci aceasta nu poate fi dezvoltata in serie Taylor. Totusi, presupunem ca $f(z)$ are o singularitate de tip pol in $z = z_0$ dar este analitica in orice alt punct din cercul C. Atunci functia

$$g(z) = (z - z_0)^p f(z) \tag{7.110}$$

este analitica in $z = z_0$, si astfel poate fi dezvoltata in serie Taylor in jurul lui $z = z_0$:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n \tag{7.111}$$

$$(z - z_0)^p f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^{n-p} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-p} (z - z_0)^{n-p}$$

$$f(z) = \frac{a_{-p}}{(z - z_0)^p} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \ldots \tag{7.112}$$

cu $a_{-p} \neq 0$. O astfel de serie este o extensie a dezvoltarii Taylor si se numeste *serie Laurent*. Prin compararea coeficientilor celor doua serii, observam ca $a_n = b_{n+p}$.

Coeficientii b_n din dezvoltarea in serie Taylor a functiei $g(z)$ sunt :

$$b_n = \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{g(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \tag{7.113}$$

Relatie in care am folosit formula integrala Cauchy generalizata.

Pentru coeficientii a_n avem:

$$a_n = b_{n+p} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{g(z)}{(z - z_0)^{n+1+p}} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \tag{7.114}$$

Expresia este valida pentru valori *n* pozitive si negative.

Termenii din seria Laurent cu $n \geq 0$ se numesc toti impreuna *partea analitica*, iar restul seriei care contine termenii cu puteri negative in $z - z_0$, se numesc *partea principala*.

Functie de natura punctului $z = z_0$, partea principala poate avea si un numar infinit de termeni, astfel incat:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{7.115}$$

In aceasta situatie ne asteptam ca partea principala sa fie convergenta doar pentru $\left|(z - z_0)^{-1}\right|$ mai mic decat o constanta, i.e. in exteriorul unui cerc centrat in z_0. Totusi, partea analitica va fi convergenta in interiorul unui cerc centrat in z_0. Daca acest ultim cerc are raza mai mare decat primul cerc, atunci seria Laurent va fi convergenta in regiunea R dintre cele doua cercuri.

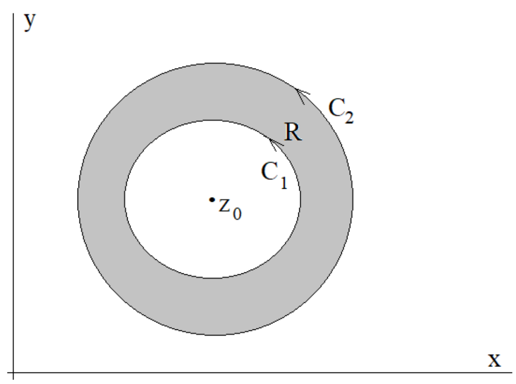

Figura 7.25

Exemplu: Gasiti seria Laurent pentru $f(z) = \dfrac{1}{z(z-2)^3}$ in jurul singularitatilor $z = 0$ si $z = 2$ separat.

Pentru a obtine seria Laurent in jurul lui $z = 0$, scriem factorul din paranteza in forma $(1 - \alpha z)$, unde α este o constanta, si obtinem:

$$f(z) = -\frac{1}{8z(1 - z/2)^3}$$

$$f(z) = -\frac{1}{8z}\left[1 + (-3)\left(-\frac{z}{2}\right) + \frac{(-3)(-4)}{2!}\left(-\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{(-3)(-4)(-5)}{3!}\left(-\frac{z}{2}\right)^3 + \ldots\right]$$

$$f(z)=-\frac{1}{8z}-\frac{3}{16}-\frac{3z}{16}-\frac{5z^2}{32}-\dots$$

Cea mai mica putere a lui z este -1, punctul $z=0$ este pol de ordinul intai. Rezidul lui $f(z)$ in $z=0$ este pur si simplu coeficientul lui z^{-1} in dezvoltarea Laurent in jurul lui $z=0$ si este egal cu -1/8.

Seria Laurent in jurul lui $z=2$ se poate determina considerand $z-2=\xi$ si substituind in $f(z)$ obtinem:

$$f(z)=\frac{1}{(2+\xi)\xi^3}=\frac{1}{2\xi^3(1+\xi/2)}$$

$$f(z)=\frac{1}{2\xi^3}\left[1-\left(\frac{\xi}{2}\right)+\left(\frac{\xi}{2}\right)^2-\left(\frac{\xi}{2}\right)^3+\left(\frac{\xi}{2}\right)^4-\dots\right]$$

$$f(z)=\frac{1}{2\xi^3}-\frac{1}{4\xi^2}+\frac{1}{8\xi}-\frac{1}{16}+\frac{\xi}{32}-\dots$$

$$f(z)=\frac{1}{2(z-2)^3}-\frac{1}{4(z-2)^2}+\frac{1}{8(z-2)}-\frac{1}{16}+\frac{z-2}{32}-\dots$$

Se observa ca $z=2$ este pol de ordinul 3 si rezidul lui $f(z)$ in $z=2$ este coeficientul lui z^{-1} in dezvoltarea Laurent, adica 1/8.

Alte exemple (Formula integrala Cauchy generalizata):

1. $\displaystyle\int_{C(0,1)}\frac{\sin z}{z^2}dz=2\pi i f'(0)=2\pi i\cos 0=2\pi i$

unde am considerat $f(z)=\sin z$ analitică pe cercul $C(0,1)$ şi $f'(z)=\cos z$

2. Calculaţi integrala:

$$\oint_\Gamma\frac{e^z}{z^3-z^2-5z-3}dz=\oint_\Gamma\frac{e^z dz}{(z+1)^2(z-3)}$$

pe cercul de rază 2 cu centrul în origine.

Folosim formula integrala Cauchy generalizata, cu

$$f(z)=\frac{e^z}{z-3} \text{ şi derivata } f'(z)=\frac{e^z(z-3)-e^z}{(z-3)^2}=\frac{(z-4)e^z}{(z-3)^2}$$

Deoarece $f(z)$ este analitică pe discul $|z|\le 2$ (singura singularitate este în $z=3$ şi se află în afara conturului Γ), formula Cauchy generalizata ne duce la:

$$\oint_\Gamma \frac{e^z}{z^3-z^2-5z-3}dz=\oint_\Gamma \frac{f(z)}{(z+1)^2}dz=2\pi i f'(-1)=2\pi i\frac{(-1-4)e^{-1}}{(-1-3)^2}=-\frac{5\pi i}{8e}$$

3. $\displaystyle\int_{C(0,2)}\frac{dz}{z^2(z-1)}=\int_{C(0,2)}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}\right)dz$

Fracţia de sub integrală se descompune astfel:

$$\frac{1}{z^2(z-1)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z^2}+\frac{C}{z-1}$$

$$1=Az(z-1)+B(z-1)+Cz^2$$

$$1=(A+C)z^2+(B-A)z-B$$

$$\begin{cases}A+C=0\\ B-A=0\\ -B=1\end{cases}\qquad A=B=-1\ ,\ C=1$$

$$I=\int_{C(0,2)}\frac{1}{z-1}dz-\int_{C(0,2)}\frac{1}{z}dz-\int_{C(0,2)}\frac{1}{z^2}dz$$

$f(z)=1$ analitică pe cercul $C(0,2)$

$z=1$ şi $z=0$ puncte interioare cercului $C(0,2)$.

$$I=2\pi i f(1)-2\pi i f(0)-2\pi i f'(0)=2\pi i\cdot 1-2\pi i\cdot 1-2\pi i\cdot 0=0$$

Metoda 2

Împărţim conturul de integrare ca în figură, introducând un drum adiţional care separă singularităţile 0 şi 1. Dacă integrăm pe aceste noi contururi închise γ_1,γ_2 în sens invers acelor de ceas, atunci cele două contribuţii la integrală pe noul drum se anulează. Astfel, transformăm integrala iniţială pentru care cele două singularităţi se află în interiorul cercului de integrare într-o sumă de două integrale, fiecare având doar o singularitate în interiorul conturului de integrare.

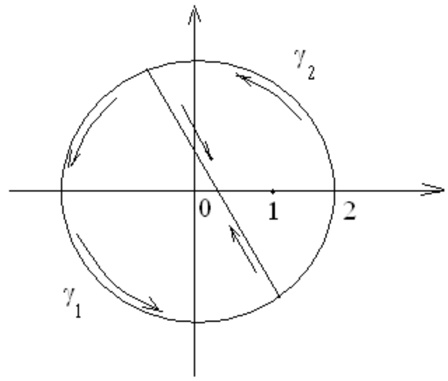

Figura 7.26

$$\int_{C(0,2)} \frac{dz}{z^2(z-1)} = \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z^2(z-1)} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z^2(z-1)}$$

$$= \int_{\gamma_1} \frac{\frac{1}{z-1}}{z^2} dz + \int_{\gamma_2} \frac{\frac{1}{z^2}}{z-1} dz = 2\pi i f'(0) + 2\pi i f(1) = 2\pi i\left(-\frac{1}{(0-1)^2}\right) + 2\pi i \frac{1}{1^2} = 0$$

Pentru prima integrală funcţia analitică pe γ_1 este:

$$f(z) = \frac{1}{z-1} \qquad \text{şi} \qquad f'(z) = -\frac{1}{(z-1)^2}$$

Pentru a doua integrala functia analitica pe γ_2 este $f(z) = \frac{1}{z^2}$

4. $\int_{C(0,1)} \frac{\cos z}{z^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(0) = \pi i(-\cos 0) = -\pi i$

Funcţia analitică pe $C(0,1)$ este $f(z) = \cos z$, $f''(z) = -\cos z$

Definiţie: Un punct z_0 de numeşte *singularitate izolată* a unei funcţii $f(z)$, dacă există o vecinătate a lui z_0, $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ pe care $f(z)$ este injectivă şi analitică dar nu şi în z_0. Singularităţile izolate pot fi:

(1) *înlăturabila* dacă $\lim_{z \to z_0} f(z)$ există şi e finită,

(2) *pol* dacă $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$ şi

(3) *esenţială* dacă $f(z)$ nu are limită pentru $z \to z_0$

Daca $f(z)$ are singularitate de tip pol, de ordinul p in z_0 atunci $(z-z_0)^p f(z)$ este analitica in $z=z_0$ si poate fi dezvoltata in serie Taylor. Si, $f(z)$ are serie Laurent:

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^p}\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n \tag{7.116}$$

Renotam coeficientii seriei:

$$f(z)=\sum_{n=-p}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \tag{7.117}$$

Seria are termeni cu puteri negative. Reziduul functiei in z_0 este a_{-1}. Partea principala a seriei Laurent este $\sum_{n=-p}^{-1} a_n (z-z_0)^n$.

Determinarea reziduului unei functii intr-un punct de singularitate este de importanta cruciala in evaluarea integralelor complexe. Exista formule de calcul pentru reziduul unei functii intr-o singularitate $z=z_0$ fara sa fim nevoiti sa dezvoltam explicit functia in serie Laurent in z_0 si sa identificam coeficientul termenului $(z-z_0)^{-1}$. Tipul formulei depinde de natura singularitatii.

Daca $f(z)$ are singularitate de tip pol de ordinul m in z_0 atunci:

$$\text{Rez}(f,z_0)=a_{-1}=\lim_{z\to z_0}\left[\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-z_0)^m f(z)\right)\right] \tag{7.118}$$

Mai general:

Reziduul funcţiei $f(z)$ într-o singularitate izolată z_0 se defineşte ca fiind numărul complex:

$$\text{Rez}(f,z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta \tag{7.119}$$

unde γ este o circumferinţă suficient de mică pentru z_0, $|z-z_0|=r$, încât pe discul $|z-z_0|\le r$, $f(z)$ să nu aibă alte singularităţi.

Exemplu: $f(z)=\dfrac{1}{z-a}$ are singularitate de tip pol, de ordinul intai in $z=a$

$$\text{Rez}(f,a)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\zeta-a}\,d\zeta=1$$

Verifica rezultatul si cu ajutorul formulei (7.118)!

Observatie: Dacă $f(z)=\dfrac{h(z)}{z-a}$ are singularitate pol de ordinul unu, sau simpla, în $z=a$, atunci $\text{Rez}(f,a)=h(a)$. Într-adevăr, cu formula integrală Cauchy:

$$\text{Rez}(f,a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{h(z)}{z-a}dz=h(a) \qquad (7.120)$$

Exemplu:
Considerăm funcţia:

$$f(z)=\frac{e^z}{z^2-2z-3}=\frac{e^z}{(z+1)(z-3)}$$

$f(z)$ are singularităţi pol în $z=-1$ şi $z=3$. Reziduurile respective sunt:

$$\text{Rez}(f,-1)=\left.\frac{e^z}{z-3}\right|_{z=-1}=-\frac{1}{4e}, \qquad \text{Rez}(f,3)=\left.\frac{e^z}{z+1}\right|_{z=3}=\frac{e^3}{4}$$

Deoarece $f(z)$ este analitică în rest, reziduul său în orice alt punct este zero.

Reziduurile sunt esenţiale în calcularea integralelor funcţiilor analitice pe contururi închise. Teorema reziduurilor spune că valoarea integralei unei funcţii complexe pe un contur închis depinde numai de reziduurile sale în singularităţile din interiorul conturului de integrare.

Teorema 7: Fie $f(z)$ o funcţie analitică pe un domeniu *D*, mai puţin într-un număr finit de singularităţi izolate $z_1,z_2,\ldots,z_n$. Atunci pentru orice domeniu închis *G* din *D* care conţine punctele $z_1,z_2,\ldots,z_n$ avem:

$$\oint_{\partial G} f(\zeta)d\zeta=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\text{Re}\,z(f,z_k) \qquad (7.121)$$

Exemple:

1. Folosind teorema reziduurilor evaluăm următoarea integrală pe un contur închis:

$$\oint_\Gamma \frac{e^z}{z^2-2z-3}dz$$

unde Γ este un cerc cu raza *r* centrat în origine. În acord cu un exemplu anterior funcţia de sub integrală are două singularităţi în -1 şi 3 cu reziduurile $-1/(4e)$ respectiv $e^3/4$.

Dacă raza cercului este $r>3$ atunci cuprinde ambele singularităţi şi cu formula reziduurilor (7.121)

$$\oint_{\Gamma}\frac{e^z}{z^2-2z-3}dz=2\pi i\left(-\frac{1}{4e}+\frac{e^3}{4}\right)=\frac{\left(e^4-1\right)\pi i}{2e}, \quad r>3$$

Dacă cercul are raza $1<r<3$, atunci acesta cuprinde numai singularitatea -1, şi:

$$\oint_{\Gamma}\frac{e^z}{z^2-2z-3}dz=2\pi i\left(-\frac{1}{4e}\right)=-\frac{\pi i}{2e}, \quad 1<r<3$$

Dacă $0<r<1$, funcţia nu are singularităţi în interiorul cercului şi astfel integrala este nulă. În final dacă $r=1$ sau $r=3$, conturul de integrare trece prin singularitate şi integrala nu converge.

2.Folosind teorema reziduurilor evaluăm următoarea integrală pe un cerc $C:|z|=2$

$$\oint_C\frac{2z-3}{z(z-1)}dz$$

Funcţia de sub integrală are două singularităţi în 0 şi 1 cu reziduurile:

$$\operatorname{Rez}(f,0)=\left.\frac{2z-3}{z-1}\right|_{z=0}=+3, \qquad \operatorname{Rez}(f,1)=\left.\frac{2z-3}{z}\right|_{z=1}=-1$$

$$\oint_C\frac{2z-3}{z(z-1)}dz=2\pi i\left(\operatorname{Re}z(f,0)+\operatorname{Re}z(f,1)\right)=2\pi i\left(3+(-1)\right)=4\pi i$$

2. $\displaystyle\oint_C\frac{z+1}{z\left(z^2+1\right)}dz$, $C:|z|=2$

$$\oint_C\frac{z+1}{z\left(z^2-i^2\right)}dz=\oint_C\frac{z+1}{z(z-i)(z+i)}dz$$

Funcţia de sub integrală are singularităţi în 0, *i* şi -*i* cu reziduurile:

$$\operatorname{Rez}(f,0)=\left.\frac{z+1}{z^2+1}\right|_{z=0}=+1 \qquad \operatorname{Rez}(f,i)=\left.\frac{z+1}{z(z+i)}\right|_{z=i}=\frac{i+1}{i\cdot 2i}=-\frac{i+1}{2}$$

$$\operatorname{Rez}(f,-i)=\left.\frac{z+1}{z(z-i)}\right|_{z=-i}=\frac{-i+1}{i\cdot 2i}=\frac{i-1}{2}$$

$$\oint_C\frac{z+1}{z\left(z^2+1\right)}dz=2\pi i\left(\operatorname{Re}z(f,0)+\operatorname{Re}z(f,i)+\operatorname{Re}z(f,-i)\right)=$$

$$2\pi i\left(1-\frac{i+1}{2}+\frac{i-1}{2}\right)=0$$

Cap. VIII Transformări integrale. Transformări Fourier

Bibliografie: Krasnov et al.(1989), Riley et al.(2006), Pain (2005)

8.1 Integrala Fourier

Aproape toate functiile periodice de interes in fizica pot fi reprezentate cu ajutorul seriilor Fourier:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1\cos x + b_1\sin x + a_2\cos 2x + b_2\sin 2x + \dots \qquad (8.1)$$

adica o constanta $1/2a_0$ plus termeni de sinusuri si cosinusuri cu diferite amplitudini, avand frecvente care cresc in pasi discreti. Convergenta acestor serii ridica anumite probleme numai in punctele de discontinuitate ale functiei. Sa luam exemplul undei patrate:

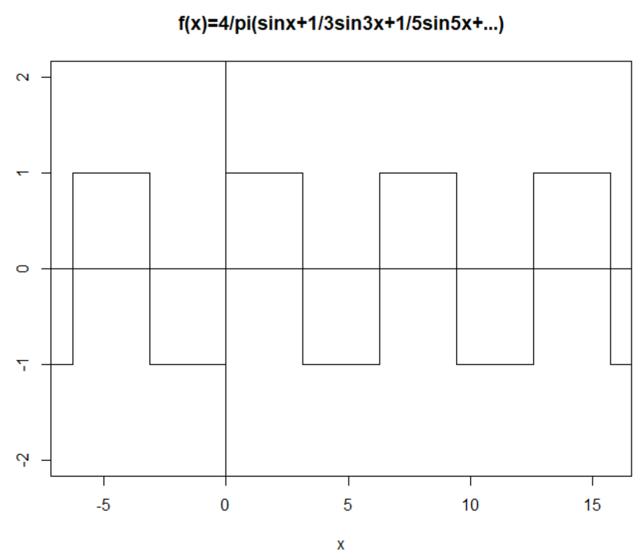

Figura 8.1 Unda patrata de inaltime unu si seria sa Fourier de sinusuri.

In punctele de discontinuitate seria reprezinta media aritmetica a limitelor laterale ale functiei in punctul de discontinuitate.

Putem scrie seria Fourier in cateva forme echivalente:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right) \tag{8.2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx \qquad\qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n^2+b_n^2}\left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\cos nx+\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\sin nx\right) \tag{8.3}$$

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left(nx-\varphi_n\right) \tag{8.4}$$

Unde, $A_n^2=a_n^2+b_n^2$ si $tg\varphi_n=\frac{b_n}{a_n}$

Sau, in forma complexa:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_ne^{inx} \tag{8.5}$$

Unde,
$$\frac{a_n-ib_n}{2}=c_n \quad ,\ n\geq 0$$

$$\frac{a_n+ib_n}{2}=c_n \quad ,\ n<0$$

Primul termen $a_0/2=1/2\pi\int_0^{2\pi}f(x)dx$ este tocmai valoarea medie a functiei pe un interval egal cu o perioada. Acesta este nivelul stationar constant peste care se suprapun componentele alternative de sinusuri si cosinusuri. Constanta poate fi modificata prin translatia functiei in raport cu axa *x*. Cand o functie periodica este simetrica in raport cu axa x, valoarea sa medie si deci nivelul sau stationar de baza $a_0/2$ este zero ca si in cazul undei patrate. Daca ridicam unda patrata pe verticala, valoarea medie si nivelul stationar creste. a_n reprezinta dublul valorii medii a produsului $f(x)\cos nx$ pe o perioada.

Orice functie poate fi scrisa in forma:

$$f(x)=\frac{1}{2}\left[f(x)+f(-x)\right]+\frac{1}{2}\left[f(x)-f(-x)\right] \tag{8.6}$$

Prima paranteza dreapta este o functie para si a doua paranteza este o functie impara. Astfel, partea de cosinusuri din seria Fourier reprezinta partea para a functiei iar partea de sinusuri a seriei reprezinta partea impara a functiei. O functie para va fi reprezentata cu o serie Fourier partiala de cosinusuri si o functie impara cu o serie Fourier de sinusuri. „Unda patrata” din figura 1 este impara $f(-x)=-f(x)$, nu are constanta si este o serie de sinusuri:

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\frac{1}{7}\sin 7x+\ldots\right) \qquad (8.7)$$

Daca translatam axa y cu $\pi/2$ spre dreapta atunci $f(-x)=f(x)$ si functia unda patrata devine para.

Daca luam primii trei termeni din seria de sinusuri (8.7) care reprezinta unda patrata si ii adunam, rezultatul arata ca in figura 8.3. Prima armonica sau armonica fundamentala are frecventa undei patrate iar armonicele cu frecvente mai mari construiesc unda patrata.

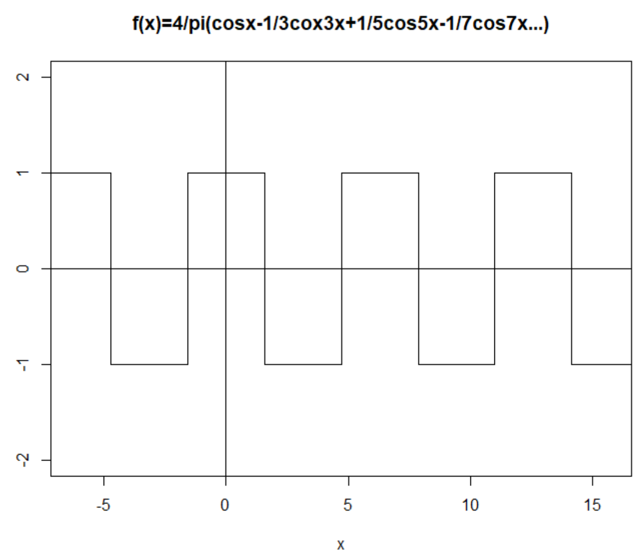

Figura 8.2 Unda patrata din figura 8.1 este acum simetrica fata de axa y si devine o serie Fourier de cosinusuri (functii pare)

Seriile Fourier pot fi reprezentate ca un spectru de frecvente. In figura 8.4 sunt reprezentate amplitudinile frecventelor componente din unda patrata din figura 8.1. Fiecare termen sinus este reprezentat printr-o singura linie spectrala.

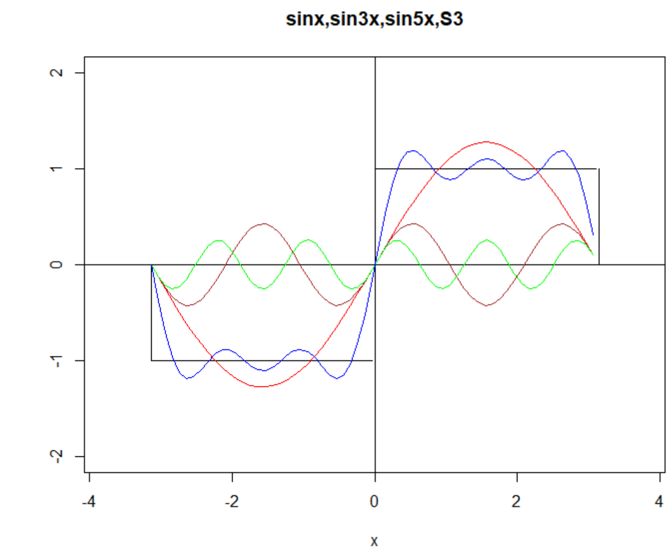

Figura 8.3 Primii trei termeni din din seria undei patrate.

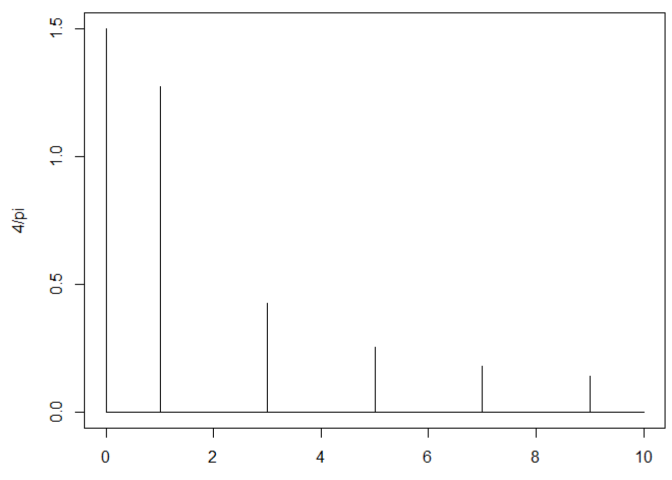

Figura 8.4 Seria Fourier de sinusuri reprezentata ca un spectru de frecvente

Pana in acest moment functiile dezvoltate in serie Fourier erau periodice, sau macar prelungite prin periodicitate. Acum ne propunem sa abordam functiile neperiodice.

Fie $f(x)$ o funcţie definită pe $\mathbb{R}$ şi neperiodică. Funcţia nu poate fi dezvoltată în serie Fourier. În schimb, în anumite condiţii $f(x)$ poate fi reprezentată printr-o integrală dublă improprie care prezintă o oarecare analogie cu seria Fourier.

Orice funcţie $f(x)$ care pe un interval $[-l,l]$ îndeplineşte condiţiile pentru dezvoltarea în serie Fourier, poate fi reprezentată pe interval ca o serie trigonometrică:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right) \tag{8.8}$$

Coeficienţii a_n şi b_n din seria (8.8) sunt daţi de formulele:

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\tau)\cos\frac{n\pi\tau}{l}d\tau \qquad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\tau)\sin\frac{n\pi\tau}{l}d\tau \tag{8.9}$$

Seria din partea dreaptă a relaţiei (8.8) poate fi scrisă în altă formă. Introducem în serie coeficienţii a_n şi b_n cu formele (8.9), apoi aducem sub semnul integralei factorii $\cos(n\pi x/l)$ şi $\sin(n\pi x/l)$, lucru posibil deoarece variabila de integrare este τ şi apoi folosim formula pentru cosinusul diferenţei. Vom obţine:

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(\tau)d\tau+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\tau)\left(\cos\frac{n\pi\tau}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}+\sin\frac{n\pi\tau}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\right)d\tau$$

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(\tau)d\tau+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\tau)\cos\frac{n\pi(x-\tau)}{l}d\tau \tag{8.10}$$

Dacă o funcţie este definită pe un interval mai mare decât $[-l,l]$, de exemplu pe toată axa reală, atunci dezvoltarea (8.10) va reproduce valorile funcţiei numai pe intervalul $[-l,l]$ şi va continua pe întreaga axă ca o funcţie periodică cu perioada $2l$. Dacă $f(x)$ este o funcţie *neperiodică* şi este definită pe toată axa, în (8.10) putem încerca să mergem la limita $l\to+\infty$. Este natural să cerem ca următoarele condiţii să fie îndeplinite:

1) $f(x)$ să îndeplinească condiţiile de dezvoltare în serie Fourier (mărginire şi monotonie pe porţiuni) pe orice segment finit al axei Ox.

2) $f(x)$ să fie *absolut integrabilă* pe întreaga axă reală, adică integrala improprie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = K < +\infty \qquad (8.11)$$

să fie convergentă.

Dacă condiţia (8.11) este îndeplinită, atunci primul termen din (8.10) tinde la zero pentru $l \to +\infty$. Într-adevăr,

$$\left| \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(\tau) d\tau \right| \le \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} |f(\tau)| d\tau \le \frac{1}{2l} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)| d\tau = \frac{K}{2l} \underset{l\to\infty}{\to} 0 \qquad (8.12)$$

În continuare, ne ocupăm de cel de-al doilea termen, adică de limita sumei din (8.10) pentru $l \to +\infty$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(\tau) \cos \frac{n\pi(x-\tau)}{l} d\tau \qquad (8.13)$$

În acest sens, considerăm mulţimea discretă de frecvenţe după care are loc sumarea (ω va fi o nouă variabilă):

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l} = \frac{2\pi}{T}, \ \ \omega_2 = \frac{2\pi}{l}, \ \omega_3 = \frac{3\pi}{l}, \dots , \ \ \omega_n = \frac{n\pi}{l}, \ \dots \qquad (8.14)$$

ω_1 fiind frecventa fundamentala.

Distanta interfrecvenţe este $\Delta\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n = \dfrac{\pi}{l}$ astfel încât $\dfrac{1}{l} = \dfrac{\Delta\omega_n}{\pi}$.

Suma din relaţia (8.13) devine:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Delta\omega_n \frac{1}{\pi} \int_{-l}^{l} f(\tau) \cos \omega_n (x-\tau) d\tau \qquad (8.15)$$

Integrala este absolut convergentă şi astfel această sumă pentru *l* suficient de mare va fi puţin diferită de expresia:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Delta\omega_n \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos \omega_n (x-\tau) d\tau \qquad (8.16)$$

Această expresie arată ca o sumă integrală Riemann pentru funcţia de variabilă ω:

$$\psi(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\omega(x-\tau)\,d\tau \quad \text{pe } (0,\infty) \tag{8.17}$$

Pentru $l\to+\infty$, distanta dintre frecvente $\Delta\omega_n=\frac{\pi}{l}\to 0$, frecvenţele relevante devin un pachet dens pe $(0,\infty)$. La limită anticipăm că toate frecvenţele posibile vor fi prezente şi suma (8.16) devine definitia integralei:

$$\int_0^{\infty}\psi(\omega)\,d\omega=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\omega(x-\tau)\,d\tau \tag{8.18}$$

Deci, pentru $l\to+\infty$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\omega(x-\tau)\,d\tau \tag{8.19}$$

Teorema: Dacă funcţia $f(x)$ este *absolut integrabilă* pe $\mathbb{R}$ şi are un număr finit de discontinuităţi de prima speţă pe orice interval finit $[a,b]$, atunci:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\omega(x-\tau)\,d\tau \tag{8.20}$$

În orice punct x_0 care este o discontinuitate de speţa întâi pentru $f(x)$, integrala din (8.20) este egală cu $\frac{1}{2}\left[f(x_0-0)+f(x_0+0)\right]$. Formula (8.20) se numeşte *integrala Fourier*.

Incercam o interpretare, o analogie pentru integala Fourier.

Dacă folosim formula pentru cosinusul diferenţei, integrala Fourier poate fi rescrisă:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)(\cos\omega x\cos\omega\tau+\sin\omega x\sin\omega\tau)\,d\tau$$

$$f(x)=\int_0^{\infty}\left[a(\omega)\cos\omega x+b(\omega)\sin\omega x\right]d\omega \tag{8.21}$$

unde

$$a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\omega\tau\ d\tau$$

$$b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\sin\omega\tau\ d\tau$$

Funcţiile $a(\omega)$ şi $b(\omega)$ sunt copii ale coeficienţilor Fourier a_n şi b_n ai unei funcţii periodice, dar coeficienţii Fourier sunt definiţi pentru valori discrete a lui *n*, iar funcţiile $a(\omega)$ şi $b(\omega)$ sunt funcţii de ω pe $\mathbb{R}$.

Forma complexă a integralei Fourier

Presupunând $f(x)$ absolut integrabilă pe $\mathbb{R}$, considerăm integrala:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\sin\omega(x-\tau)d\tau\ ,\ \omega\in\mathbb{R} \tag{8.22}$$

Această integrală este convergentă pentru $\omega\in\mathbb{R}$ deoarece $\left|f(\tau)\sin\omega(x-\tau)\right|\le\left|f(\tau)\right|$. Mai mult, aceasta este o funcţie continuă impară de ω. Dar integrala unei funcţii impare pe interval simetric este nulă:

$$\lim_{l\to\infty}\int_{-l}^{l} d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\sin\omega(x-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\sin\omega(x-\tau)d\tau=0$$

Pe de altă parte, integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\omega(x-\tau)d\tau,\quad \omega\in\mathbb{R} \tag{8.23}$$

este funcţie pară de ω, şi:

$$\int_{0}^{\infty} d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\omega(x-\tau)d\tau=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\omega(x-\tau)d\tau$$

Cu acestea, formula integrală Fourier poate fi scrisă:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\omega(x-\tau)d\tau \tag{8.24}$$

Facem un truc, înmulţim:

$$0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\sin\omega(x-\tau)\,d\tau$$

cu unitatea imaginară *i* şi adunăm cu (8.24), obţinem astfel:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\left[\cos\omega(x-\tau)+i\sin\omega(x-\tau)\right]d\tau$$

Folosind formula Euler $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$, vom avea:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{i\omega(x-\tau)}d\tau=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \tag{8.25}$$

Aceasta este *forma complexă a integralei Fourier*.

Incercam o interpretare a formei complexe a integralei Fourier. Rescriem integrala:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right]e^{i\omega x}d\omega \tag{8.26}$$

Putem scrie integrala Fourier:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega x}d\omega \tag{8.27}$$

Unde,

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \tag{8.28}$$

se numeste *transformata Fourier* a lui $f(x)$. Vom discuta mai tarziu despre transformata Fourier.

In acest moment stim ca daca perioada $T=2l$ este finita si $f(x)$ este periodica, seria Fourier in forma complexa

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n e^{in\omega x} \tag{8.29}$$

ne spune ca reprezentarea functiei este in functie de un numar infinit de frecvente diferite $\ldots,-2\omega,\omega,2\omega,\ldots$ ($\omega=\pi/l=2\pi/T$), fiecare frecventa fiind separata printr-un interval finit de frecventele vecine. Pentru o functie periodica amplitudinea unei frecvente este coeficientul

$$c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l}f(x)e^{-in\omega x}dx \tag{8.30}$$

Daca functia $f(x)$ nu este periodica si are o perioada infinita, atunci

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega x}d\omega \tag{8.31}$$

Aceasta expresie este integrala (nu suma) unui numar infinit de componente, frecvente care sunt foarte apropiate unele de altele si au amplitudinile $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}F(\omega)d\omega$, deoarece ω variaza continuu in loc de o variatie in pasi discreti.

Exemple:

1) Să se reprezinte printr-o integrală Fourier funcţia:

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 1/2, & x=\pm1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\cos\omega(x-\tau)d\tau=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\omega\int_{-1}^{1}\cos\omega(x-\tau)d\tau$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\omega\left(-\frac{\sin\omega(x-\tau)}{\omega}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(-\frac{\sin\omega(x-1)}{\omega}+\frac{\sin\omega(x+1)}{\omega}\right)d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{\omega}(-\sin\omega x\cos\omega+\sin\omega\cos\omega x+\sin\omega x\cos\omega+\sin\omega\cos\omega x)d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{\omega}(2\sin\omega\cos\omega x)d\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\cos\omega x\,d\omega$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\cos\omega x\,d\omega$$

2) Să se reprezinte printr-o integrală Fourier funcţia:

$$f(x)=\begin{cases}1-x^2, & x\in[-1,1]\\ 0, & \text{in rest}\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\cos\omega(x-\tau)\,d\tau=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\omega\int_{-1}^{1}\left(1-\tau^2\right)\cos\omega(x-\tau)\,d\tau$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\omega\int_{-1}^{1}\left(1-\tau^2\right)d\left(\frac{\sin\omega(x-\tau)}{-\omega}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\omega\left(-\left(1-\tau^2\right)\frac{\sin\omega(x-\tau)}{\omega}\Bigg|_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}2\tau\frac{\sin\omega(x-\tau)}{-\omega}d\tau\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\omega\left(-\frac{2}{\omega}\right)\int_{-1}^{1}\tau d\left(\frac{\cos\omega(x-\tau)}{\omega}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\omega\left(-\frac{2}{\omega}\right)\left(\tau\frac{\cos\omega(x-\tau)}{\omega}\Bigg|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{\cos\omega(x-\tau)}{\omega}d\tau\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\omega\left(-\frac{2}{\omega}\right)\left(\frac{\cos\omega(x-1)}{\omega}+\frac{\cos\omega(x+1)}{\omega}-\frac{1}{\omega}\frac{\sin\omega(x-\tau)}{-\omega}\Bigg|_{-1}^{1}\right)$$

$$=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}d\omega\frac{1}{\omega^2}\left(\cos\omega x\cos\omega+\sin\omega x\sin\omega+\cos\omega x\cos\omega-\sin\omega x\sin\omega+\frac{1}{\omega}\left(\sin\omega(x-1)-\sin\omega(x+1)\right)\right)$$

$$=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}d\omega\frac{1}{\omega^2}\left(2\cos\omega x\cos\omega+\frac{1}{\omega}\left(\sin\omega x\cos\omega-\sin\omega\cos\omega x-\sin\omega x\cos\omega-\cos\omega x\sin\omega\right)\right)$$

$$=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}d\omega\frac{1}{\omega^2}\left(2\cos\omega x\cos\omega-\frac{1}{\omega}2\cos\omega x\sin\omega\right)$$

$$=-\frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{\omega^2}\cos\omega x\left(\cos\omega-\frac{1}{\omega}\sin\omega\right)d\omega$$

$$f(x)=-\frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\omega\cos\omega-\sin\omega}{\omega^3}\cos\omega x\,d\omega$$

8.2 Transformata Fourier

Transformările integrale sunt o unealtă puternică în problemele de fizică.

Fie $f(x)$ o funcţie definită pe un interval (a,b) finit sau infinit. *Transformarea integrală* a lui $f(x)$ este funcţia:

$$F(\omega)=\int_a^b K(x,\omega)\,f(x)dx \qquad (8.32)$$

unde funcţia $K(x,\omega)$ este fixată de transformare şi se numeşte *nucleul transformării*.

Fie $f(x)$ o funcţie *netedă* (de clasă C^1) pe porţiuni pe orice interval finit de pe dreapta reală şi absolut integrabilă pe dreaptă.

Definiţie: O funcţie:

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \qquad (8.33)$$

se numeşte *transformata Fourier* a funcţiei $f(x)$ sau *funcţia spectrală*. Aceasta este o transformare integrală a lui $f(x)$ pe $\mathbb{R}$ cu nucleul $K(x,\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\omega x}$.

În forma complexă a formulei integrală Fourier putem identifica transformata Fourier:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \qquad (8.34)$$

şi obţinem,

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega \qquad (8.35)$$

Aceasta se numeşte *transformata Fourier inversă* şi corelează pe $F(\omega)$ cu $f(x)$.

Uneori transformata Fourier directă este dată în forma:

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x}dx \qquad (8.36)$$

Cu transformata Fourier inversă:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega x} d\omega \qquad (8.37)$$

Am vazut ca *integrala Fourier* care reprezinta o functie neperiodica poate fi scrisa

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega \qquad (8.38)$$

in care *transformata Fourier* a functiei este

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \qquad (8.39)$$

Astfel, integrarea in raport cu o variabila produce o functie de cealalta variabila. Ambele variabile apar ca un produs in argumentul exponentialei, si acest produs trebuie sa fie adimensional. Orice pereche de variabile care satisfac acest criteriu formeaza o pereche Fourier.

Sa consideram variabilele timp si frecventa. O functie de timp poate fi exprimata ca un spectru de frecvente si invers.

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \qquad (8.40)$$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \qquad (8.41)$$

In loc de ω putem folosi ν, daca avem in vedere $\omega = 2\pi\nu$ si $d\omega = 2\pi d\nu$

Observatie: Daca functia $f(t)$ este para transformata Fourier va fi o functie reala.

Exemple de transformate Fourier

Vom calcula transformatele Fourier pentru doua functii de mare importanta in fizica (functia Gaussiana si functia „fanta”). Ambele sunt pare si au transformata Fourier reala.

1. Curba Gaussiana apare in descrierea pachetului de unde asociat particulei in mecanica cuantica. Transformata Fourier a distributiei Gaussiene este tot o distributie Gaussiana.

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \tag{8.42}$$

In figura 8.5 se vede ca functia Gaussiana este simetrica fata de origine, are inaltimea maxima $1/\sigma\sqrt{2\pi}$ in $x=0$ si imprastierea descrisa de deviatia standard σ, in $x=\pm\sigma$ functia coboara la $e^{-1/2}$ din valoarea maxima.

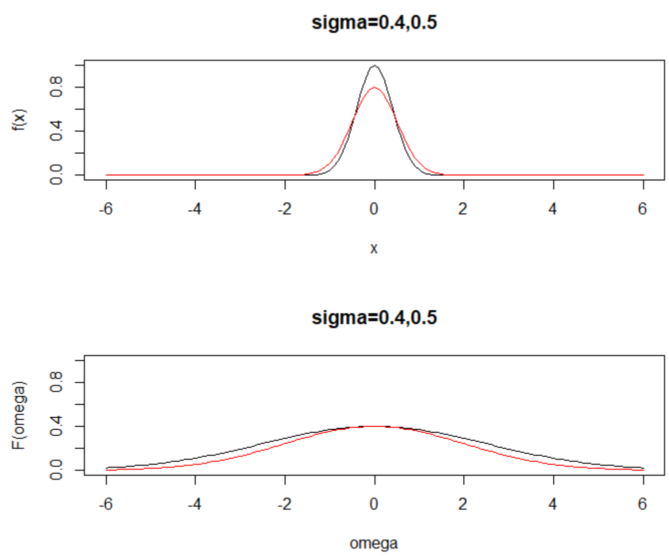

Figura 8.5 Transformata Fourier a unei Gaussiene este tot o Gaussiana

Transformata Fourier este:

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}e^{-i\omega x}dx$$

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}-i\omega x+\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}dx$$

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}+\frac{i\sigma\omega}{\sqrt{2}}\right)^2} e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}dx$$

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi\sigma}e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}+\frac{i\sigma\omega}{\sqrt{2}}\right)^2}dx$$

Este cunoscut că:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$$

Atunci cu substitutia $\varphi=\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}+\frac{i\sigma\omega}{\sqrt{2}}$, $d\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}dx$

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi\sigma}e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}\sqrt{2}\sigma\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varphi^2}d\varphi=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}\sqrt{\pi}$$

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} \tag{8.43}$$

Am obtinut alta gausiana in spatiul frecventelor cu alta inaltime maxima $1/\sqrt{2\pi}$ si alt parametru de imprastiere $\sigma\to 1/\sigma$. Un puls mai ingust (σ mic) in coordonata x conduce la o distributie mai larga de frecvente.

Ipoteza asupra lui $f(x)$ să fie absolut integrabilă pe $\mathbb{R}$ este restrictivă. Aceasta exclude de exemplu funcţii elementare cum ar fi: $f(x)=1$, $f(x)=x^3$, $f(x)=\cos x$, $f(x)=e^x$, pentru care nu există transformată Fourier (forma clasică).

Imagini Fourier pot fi determinate numai pentru funcţii care tind la zero pentru $|x|\to+\infty$ suficient de repede.

2. *pulsul rectangular*

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<\theta \\ 0, & |x|>\theta\end{cases},\quad \theta>0 \text{ const}$$

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\theta}^{\theta} e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left.\frac{e^{-ix\omega}}{-i\omega}\right|_{-\theta}^{\theta}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi} i\omega}\left(e^{-i\theta\omega} - e^{i\theta\omega}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi} i\omega}\left(\cos\theta\omega - i\sin\theta\omega - \cos\theta\omega - i\sin\theta\omega\right)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi} i\omega}\left(-2i\sin\theta\omega\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\theta\omega}{\omega}$$

Transformata Fourier din figură are $\theta = 2$ şi ω este reprezentat pe axa *Ox*.

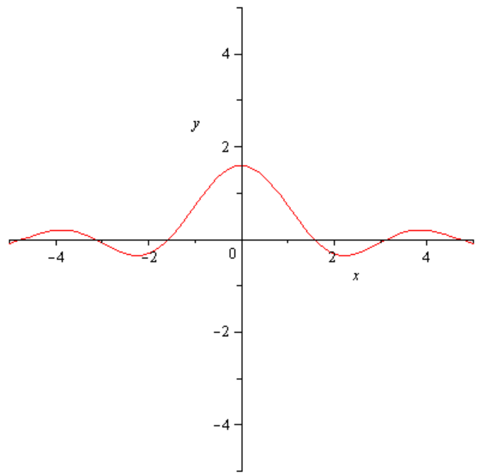

Figura 8.6 Transformata Fourier a pulsului rectangular

Proprietăţile transformărilor Fourier (facultativ)

1) *Liniaritate* Dacă $F(\omega)$ şi $G(\omega)$ sunt transformatele Fourier pentru funcţiile $f(x)$ şi $g(x)$, atunci pentru $\forall \alpha, \beta$ constante, transformata Fourier a funcţiei $\alpha f(x) + \beta g(x)$ va fi $\alpha F(\omega) + \beta G(\omega)$. Transformarea Fourier este un operator liniar $f(x) \xrightarrow{F} F(\omega)$. Într-adevăr,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right)e^{-i\omega x}dx = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx + \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-i\omega x}dx$$

$$= \alpha F(\omega) + \beta G(\omega)$$

Vom nota transformata Fourier a funcţiei $f(x)$: $F\left[f(x)\right] \overset{not}{=} F(\omega)$

2) Dacă $F(\omega)$ este transformata Fourier a funcţiei $f(x)$ absolut integrabilă pe $\mathbb{R}$, atunci $F(\omega)$ este mărginită pe $\mathbb{R}$.

Dacă $f(x)$ este absolut integrabilă pe $\mathbb{R}$, atunci $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx = K < +\infty$. Fie:

$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$ transformata Fourier a lui $f(x)$. Atunci,

$$|F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx\right| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx = \frac{K}{\sqrt{2\pi}}$$

$\Rightarrow$ $F(\omega)$ mărginită.

3) Transformarea Fourier înlocuieşte diferenţierea cu operaţia de înmulţire:

$$F\left[f^{(k)}(x)\right] = (i\omega)^k F\left[f(x)\right], \quad k = 1,\dots,m \tag{8.44}$$

Fie $f(x)$ o funcţie absolut integrabilă cu $f'(x)$ funcţie absolut integrabilă pe $\mathbb{R}$, astfel încât $f(x) \to 0$ pentru $|x| \to \infty$. Presupunând $f'(x)$ funcţie netedă (de clasă C^1), scriem:

$$F[f'] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\omega x}dx \overset{\text{prin parti}}{=}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(f(x)e^{-i\omega x}\Big|_{-\infty}^{\infty} + i\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \right)$$

Primul termen din paranteză se anulează deoarece $f(x) \to 0$ pentru $|x| \to \infty$. Atunci,

$$F[f'] = i\omega F[f] \tag{8.45}$$

Adică, transformata Fourier a derivatei funcţiei este egală cu produsul dintre $i\omega$ şi transformata Fourier a funcţiei.

Dacă $f(x)$ are derivate netede şi absolut integrabile până la ordinul *m,* atunci:

$$F\left[f^{(k)}(x)\right] = (i\omega)^k F\left[f(x)\right], \quad k = 1,\dots,m \tag{8.46}$$

Transformarea Fourier este utilă deoarece înlocuieşte operaţia de diferenţiere cu cea de înmulţire cu cantitatea $i\omega$, simplificând astfel sarcina de a integra unele tipuri de ecuaţii diferenţiale.

4) Corelaţia dintre rata de scădere a lui $f(x)$ pentru $|x| \to \infty$ şi proprietăţile transformatei Fourier (netedă).

Presupunem că $f(x)$ şi $xf(x)$ sunt absolut integrabile pe $\mathbb{R}$. Atunci, diferentiem transformata Fourier a lui $f(x)$, în raport cu ω:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

$$\frac{dF}{d\omega} = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) e^{-i\omega x} dx = -iF\left[xf(x)\right]$$

$$i\frac{dF(\omega)}{d\omega} = F\left[xf(x)\right] \tag{8.47}$$

Dacă împreună cu $f(x)$ şi funcţiile $xf(x)$, ..., $x^m f(x)$ sunt absolut integrabile pe $\mathbb{R}$, atunci procesul de derivare al transformatei Fourier poate continua şi are loc:

$$i^k \frac{d^k F(\omega)}{d\omega^k} = F\left[x^k f(x)\right],\ k = 1,\dots,m \tag{8.48}$$

Cu cât funcţia $f(x)$ descreşte mai repede pentru $|x| \to \infty$ cu atât $F(\omega) = F\left[f(x)\right]$ este mai netedă, adică are derivate de ordin mai mare.

5) <u>Teorema de convoluţie</u>: Fie $F_1(\omega)$ şi $F_2(\omega)$ transformatele Fourier ale funcţiilor $f_1(x)$ şi $f_2(x)$ respectiv. Atunci:

$$F_1(\omega)F_2(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) e^{-i\omega x} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(y) e^{-i\omega y} dy$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(y) e^{-i\omega(x+y)} dxdy$$

unde integrala dublă este absolut convergentă. Schimbăm variabila *y* astfel încât $x + y = \tau$, cu $y = \tau - x$.

$$F_1(\omega)F_2(\omega) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^2} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau - x) e^{-i\omega\tau} d\tau \right\} dx$$

schimbăm ordinea de integrare:

$$F_1(\omega)F_2(\omega)=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega\tau}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x)\,f_2(\tau-x)\,dx\right\}d\tau \qquad (8.49)$$

Funcţia:

$$\varphi(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x)\,f_2(\tau-x)\,dx\,,-\infty<\tau<+\infty \qquad (8.50)$$

se numeşte *convoluţia* lui $f_1(x)$ şi $f_2(x)$ şi se notează cu $(f_1*f_2)(\tau)$, adică:

$$(f_1*f_2)(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x)\,f_2(\tau-x)\,dx \qquad (8.51)$$

Ultima relaţie pentru produsul transformatelor Fourier (8.49) poate fi rescrisă:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega\tau}\varphi(\tau)\,d\tau=\sqrt{2\pi}F_1(\omega)F_2(\omega) \qquad (8.52)$$

Teorema de convolutie: Transformata Fourier a convoluţiei lui $f_1(x)$ şi $f_2(x)$ este egală cu produsul transformatelor Fourier a funcţiilor care participă la convoluţie cu un factor $\sqrt{2\pi}$.

$$F[f_1*f_2]=\sqrt{2\pi}F[f_1]F[f_2] \qquad (8.53)$$

Proprietăţile convoluţiei:

-liniaritate: $f*(\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2)=\alpha_1(f*f_1)+\alpha_2(f*f_2)$

-comutativitate: $f_1*f_2=f_2*f_1$