7.4 Funcţii elementare de variabilă complexă

Funcţia putere are forma:

$$w = z^n \quad , \; n \in \mathbb{N} \tag{7.58}$$

Aceasta este analitică pe întreg planul complex şi derivata sa este:

$$\frac{dw}{dz} = nz^{n-1} \quad \text{pentru } n > 1 \tag{7.59}$$

şi este nenulă $\forall z \neq 0$.

Dacă în relaţia (7.58) reprezentăm *z* în formă exponenţială:

$$z = re^{i\theta} \quad \Rightarrow \quad z^n = r^n e^{in\theta}$$

Fie două numere complexe diferite z_1 şi z_2 astfel încât:

$$r_1 = r_2 \qquad \theta_2 = \theta_1 + \frac{2\pi}{n}k \;, \qquad k \in \mathbb{Z} \tag{7.60}$$

$$z_2^n = r_2^n e^{in\theta_2} = r_1^n e^{in\left(\theta_1 + \frac{2\pi}{n}k\right)} = r_1^n e^{in\theta_1} e^{i2\pi k} = r_1^n e^{in\theta_1}\left(\cos 2\pi k + i \sin 2\pi k\right) = r_1^n e^{in\theta_1} = z_1^n$$

z_1 si z_2 sunt transformate în acelaşi număr imagine *w* de către funcţia putere. Acest lucru ne arată că pentru $n > 1$ functia putere nu este injectivă în planul *z*.

Cel mai simplu exemplu de domeniu pe care transformarea $w = z^n$ este injectivă este sectorul:

$$\alpha < \arg z < \alpha + \frac{2\pi}{n} \;, \; \forall \alpha \in \mathbb{R} \tag{7.61}$$

Pe domeniul (7.61) (figura 7.15) transformarea (7.58) este conformă.

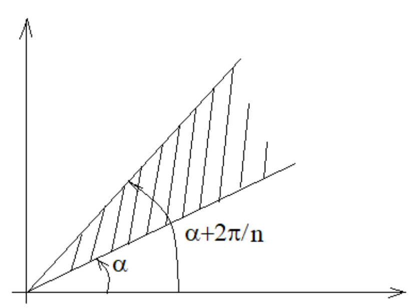

Figura 7.15

Exemplu: Transformarea $w = z^n$, $n > 1$, transformă sectorul $0 < \arg z < \pi / n$ din planul complex *z* în semiplanul superior complex *w* (figura 7.16). Transformarea măreşte unghiul sectorului de *n* ori.

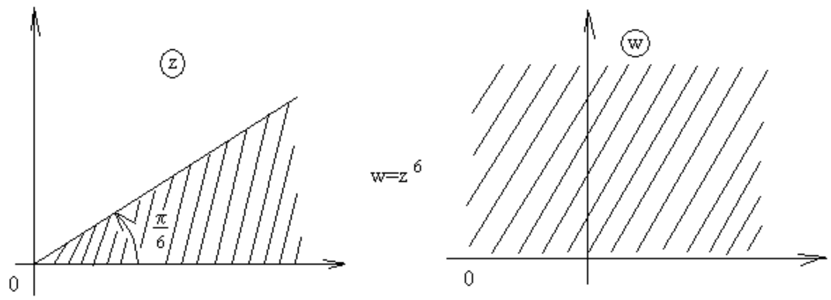

Figura 7.16

Funcţia rădăcină de ordinul n este:

$$w = \sqrt[n]{z} \tag{7.62}$$

Aceasta este o functie *multivaloare,* care asociază la fiecare număr complex $z = re^{i\theta} \neq 0$, *n* numere complexe diferite:

$$w_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0,1,2,\cdots,n-1 \tag{7.63}$$

astfel încât a *n*-a putere a acestora este *z*, adică $w_k^n = z$.

Manipularea functiilor complexe multivaloare este mai pretentioasa. In cazul acestora trebuie sa identificam asa numitele *branch points*. Daca *z* variaza in diagrama Argand pe o curba inchisa care ocoleste un *branch point*, in general $f(z)$ nu se va intoarce la valoarea sa originala. Drept exemplu, sa consideram functia multivaloare $f(z) = z^{1/2}$ si exprimam *z* in forma $z = re^{i\theta}$. Pentru orice contur *C* care ocoleste originea, dupa un circuit $\theta \to \theta + 2\pi$. Pentru functia $f(z) = z^{1/2}$, dupa un circuit obtinem:

$$r^{1/2}e^{i\theta/2} \to r^{1/2}e^{i(\theta+2\pi)/2} = r^{1/2}e^{i\theta/2}e^{i\pi} = -r^{1/2}e^{i\theta/2}$$

Valoarea functiei $f(z)$ se modifica dupa parcurgerea oricarei curbe inchise care ocoleste originea. In exemplul ales $f(z) \to -f(z)$. Deci $z = 0$ este un *branch point* pentru $f(z) = z^{1/2}$.

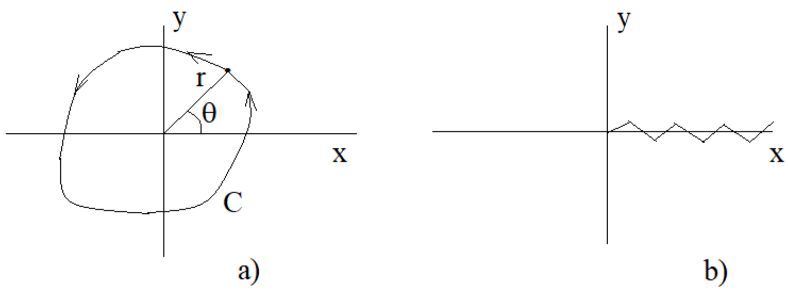

Figura 7.17

Observam ca daca orice contur inchis care ocoleste originea este parcurs de doua ori atunci functia $f(z)=z^{1/2}$ revine la valoarea originala. Numarul de bucle in jurul unui *branch point* necesare pentru functia $f(z)$ pentru a reveni la valoarea initiala depinde de functie, si pentru unele functii (ex. Lnz care are un branch point in origine) valoarea initiala nu se mai atinge. Pentru a trata functia $f(z)$ ca pe o functie univaloare, se poate defini un *branch cut* in diagrama Argand. Un *branch cut* este o linie sau o curba in planul complex si poate fi privita ca o bariera artificiala care nu trebuie sa o trecem. Aceste linii *branch cuts* sunt pozitionate astfel incat sa fim impiedicati sa facem un circuit complet in jurul oricarui *branch point*, si astfel functia ramane univaloare.

Pentru functia $f(z)=z^{1/2}$ putem alege ca branch cut orice curba care incepe la originea $z=0$ si se intinde pana la $|z|=\infty$ in orice directie, deoarece orice astfel de curba va preveni un circuit complet in jurul *branch point*-ului din origine. Se obisnuieste alegerea unui branch point pe axa reala sau imaginara. In figura 7.17 (b) *branch cut* este pe axa reala. Cu aceasta alegere restrictionam θ la intervalul $0 \le \theta < 2\pi$ si pastram $f(z)$ univaloare.

Funcţia exponenţială

Pentru o mai buna intelegere a functiei exponentiale, vom discuta mai intai despre *serii de puteri in variabila complexa*.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{7.64}$$

unde z este o variabila complexa si coeficientii c_n sunt in general numere complexe.

Seria de puteri complexe (7.64) este o dezvoltare in jurul originii $z_0 = 0$. O dezvoltare in serie de puteri in jurul unui alt punct $z_0 \neq 0$, poate fi obtinuta prin inlocuirea lui z cu $z - z_0$. Daca scriem z in forma exponentiala $z = re^{i\theta}$, expresia (7.64) devine

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{in\theta} \tag{7.65}$$

Aceasta serie este *absolut convergenta* daca suma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| c_n r^n e^{in\theta} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| |r^n| \left| e^{in\theta} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n \tag{7.66}$$

care este o serie cu termeni reali pozitivi, este convergenta. Cu tehnicile de la serii de puteri reale determinam raza de convergenta a seriei, *R*. Seria complexa (7.64) va fi absolut convergenta daca $|z| < R$ si divergenta daca $|z| > R$. Daca $|z| = R$ nu se poate trage nici o concluzie, cazul trebuie analizat separat.

Un cerc cu raza *R* centrat in origine se numeste *cerc de convergenta* pentru seria $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. Cazul $R = 0$ corespunde la convergenta doar in origine, iar cazul $R = \infty$ corespunde la convergenta peste tot. Pentru cazul *R* finit convergenta apare intr-o parte restrictionata a planului *z* (diagrama Argand). Pentru o serie de puteri in jurul lui z_0 cercul de convergenta este centrat in z_0.

Exemple: Determinati multimile din planul complex in care seriile urmatoare sunt convergente.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

Scriem *z* in forma exponentiala $z = re^{i\theta}$, seria devine: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n e^{in\theta}}{n!}$

Aceasta este absolut convergenta daca $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{r^n e^{in\theta}}{n!} \right|$ este convergenta. Adica studiem convergenta seriei: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n!}$ care este serie de puteri reala!

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$$

Seria este convergenta $\forall z\in\mathbb{C}$.

2. $\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n$

Scriem z in forma exponentiala $z=re^{i\theta}$, seria devine: $\sum_{n=0}^{\infty} n!r^n e^{in\theta}$

Aceasta este absolut convergenta daca $\sum_{n=0}^{\infty}\left|n!r^n e^{in\theta}\right|$ este convergenta. Adica studiem convergenta seriei reale: $\sum_{n=0}^{\infty} n!r^n$

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

Seria este convergenta numai in $z=0$

3. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n}$

Scriem z in forma exponentiala $z=re^{i\theta}$, seria devine: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n e^{in\theta}}{n}$

Aceasta este absolut convergenta daca $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{r^n e^{in\theta}}{n}\right|$ este convergenta. Adica studiem convergenta seriei reale: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{n}$

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$$

Seria este absolut convergenta daca $|z|<1$.

Rezultat important: Seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ are suma o functie *analitica* de z in interiorul cercului de convergenta! Daca $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ atunci in interiorul cercului de convergenta al seriei exista derivata si derivatele de orice ordin.

$$f'(z)=\sum_{n=0}^{\infty} n c_n z^{n-1} \tag{7.67}$$

Functia exponentala e^z se defineste cu seria:

$$e^z \overset{def}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{7.68}$$

In primul exemplu, am aratat ca aceasta serie este *convergenta* pe tot planul complex si conform ultimului rezultat enuntat mai sus, este *functie analitica* pe intreg planul complex. Ca si partenera sa reala, se numeste functie exponentiala si este egala cu propria sa derivata: $\left(e^z\right)'=e^z$.

Produsul a doua exponentiale este tot o exponentiala:

$$e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{z_1+z_2} \tag{7.69}$$

Demonstratie:

$$e^{z_1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_1^n}{n!} \qquad e^{z_2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_2^n}{n!} \quad \Rightarrow \text{ coeficientul lui } z_1^r\cdot z_2^s \text{ este } \frac{1}{r!s!}$$

$$e^{z_1+z_2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(z_1+z_2\right)^n}{n!}$$

Din aceasta suma, termenul $\frac{\left(z_1+z_2\right)^{r+s}}{(r+s)!}$ se scrie:

$$\frac{\left(z_1+z_2\right)^{r+s}}{(r+s)!}=\frac{1}{(r+s)!}\left(C_{r+s}^{0}z_1^{r+s}+C_{r+s}^{1}z_1^{r+s-1}z_2+\ldots+C_{r+s}^{s}z_1^{r}z_2^{s}+\ldots+C_{r+s}^{r+s}z_2^{r+s}\right)$$

$$\text{coeficientul lui } z_1^r\cdot z_2^s \text{ este } \frac{1}{(r+s)!}\frac{(r+s)!}{r!s!}=\frac{1}{r!s!}$$

In concluzie, coeficientii termenilor corespunzatori din cele doua parti ale relatiei (7.69) sunt egali.

Putem extinde definitia exponentialei e^z pentru *a* real, $a>0$ astfel:

$$a^z = e^{z\ln a} \tag{7.70}$$

Daca in $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ consideram $z = iy$, obtinem formula Euler:

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y \tag{7.71}$$

Cum $z = x + iy$ obtinem imediat relaţia:

$$w = e^z \overset{def}{=} e^{x+iy} = e^x\left(\cos y + i\sin y\right) \tag{7.72}$$

Funcţia exponenţială are următoarele proprietăţi:

1. Pentru *z* real definiţia de mai sus coincide cu exponenţiala obişnuită.
2. Funcţia este analitică pe tot planul complex şi se derivează cu formula:

$$\left(e^z\right)' = e^z$$

3. Funcţia verifică regula de inmultire: $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$
4. Funcţia este *periodică* şi are perioadă imaginară $2\pi i$.

Într-adevăr, $\forall k$ întreg

$$e^{z+2\pi ki} = e^z \cdot e^{i2\pi k} = e^z\,,$$

deoarece $e^{i2\pi k} = \cos 2\pi k + i\sin 2\pi k = 1$.

Banda $0 < y < 2\pi$ din planul complex nu conţine nici o pereche de puncte z_1, z_2 care difera prin $2\pi ki$, ceea ce ne sugerează că transformarea $w = e^z$ este *injectivă* în această bandă. Şi deoarece derivata funcţiei este nenulă, $\left|\left(e^z\right)'\right| = e^x > 0$, atunci transformarea este şi *conformă*. Este de remarcat că funcţia $w = e^z$ este injectiva în orice bandă $\alpha \le y < \alpha + 2\pi$.

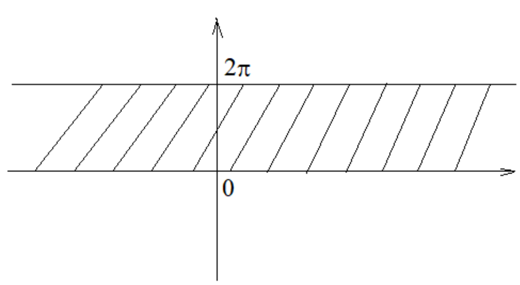

Figura 7.18

Funcţia logaritmică

$$w = Lnz \qquad (7.73)$$

Daca $z = re^{i\theta}$ unde *r* este real, modulul numarului, si θ este argumentul sau principal $-\pi < \theta \le \pi$. Atunci,

$$w = Lnz = \ln r + i(\theta + 2k\pi) \qquad (7.74)$$

$$w = \ln|z| + i\ Arg\ z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k),\ k \in \mathbb{Z} \qquad (7.75)$$

Funcţia *logaritmică* este multivaloare, asociază la un *z* mai multe numere complexe. Notaţie:

$$Ln\ \mathrm{z} \overset{not}{=} \ln|z| + iA\mathrm{rg}\, z \qquad (7.76)$$

Cantitatea $\ln|z| + i\arg z$ se numeşte *valoare principală* a logaritmului. Notaţie:

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z \qquad (7.77)$$

Atunci,

$$Ln\ z = \ln z + i2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \qquad (7.78)$$

Acum ca am definit logaritmul complex putem calcula:

$$t^z = e^{zLnt} \qquad (7.79)$$

cu *t* $(t \ne 0)$ si *z* ambele complexe.

Exerciţii: Calculaţi logaritmul următoarelor numere complexe.

1) $Ln\ e$ $\qquad z = e \quad |z| = e \quad \arg z = 0$

$$\ln e = \ln|z| + i\arg z = \ln e + i \cdot 0 = 1$$

$$Ln\ \mathrm{e} = \ln z + i2\pi k = 1 + i2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

2) $Ln(-i)$ $\qquad z = -i \quad |z| = 1 \quad \arg z = -\frac{\pi}{2}$

$$\ln(-i) = \ln|z| + i\arg z = \ln 1 + i \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i\frac{\pi}{2}$$

$$Ln(-i)=\ln z+i2\pi k=-i\frac{\pi}{2}+i2\pi k=i\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi\ ,\quad k\in\mathbb{Z}$$

3) $Ln(i)$ $\quad z=i \quad |z|=1 \quad \arg z=\frac{\pi}{2}$

$$\ln(i)=\ln|z|+i\arg z=\ln 1+i\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)=i\frac{\pi}{2}$$

$$Ln(i)=\ln z+i2\pi k=i\frac{\pi}{2}+i2\pi k=i\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi\ ,\quad k\in\mathbb{Z}$$

4) $Ln(-1-i)$ $\quad z=-1-i \quad |z|=\sqrt{2}$

$$\arg z=-\pi+arctg\frac{y}{x}=-\pi+arctg1=-\pi+\frac{\pi}{4}=-\frac{3\pi}{4}$$

$$\ln(-1-i)=\ln|z|+i\arg z=\ln\sqrt{2}+i\cdot\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=\ln\sqrt{2}-i\frac{3\pi}{4}$$

$$Ln(-1-i)=\ln z+i2\pi k=\ln\sqrt{2}-i\frac{3\pi}{4}+i2\pi k=\ln\sqrt{2}+i\left(2k-\frac{3}{4}\right)\pi$$

Simplificati expresia: $z=i^{-2i}$

$$z=i^{-2i}=e^{-2iLni}=e^{-2i\left(\ln 1+i\frac{\pi}{2}+i2k\pi\right)}=e^{-2i\cdot i\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}=e^{2\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}=e^{(4k+1)\pi},\ k\in\mathbb{Z}$$

Funcţii trigonometrice şi hiperbolice

Din formula Euler avem:

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y \qquad e^{-iy}=\cos y-i\sin y$$

$$\Rightarrow \qquad \sin y=\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i} \qquad \cos y=\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}$$

Definim funcţiile trigonometrice $\sin z$ şi $\cos z$ pentru orice argument complex z cu:

$$\sin z\overset{def}{=}\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z\overset{def}{=}\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \qquad (7.80)$$

Proprietăţi ale funcţiilor $\sin z$ şi $\cos z$:

1. Pentru $z = x$ real cele două funcţii coincid cu sinusul şi cosinusul obişnuit.
2. Funcţiile sunt analitice pe întreg planul complex.
3. Formulele de derivare sunt cele cunoscute:

$$(\sin z)' = \cos z \qquad (\cos z)' = -\sin z \qquad (7.81)$$

4. Sunt funcţii periodice cu perioada 2π .
5. $\sin z$ este funcţie impară şi $\cos z$ este funcţie pară.
6. Verifică relaţiile trigonometrice obişnuite.

Funcţiile $tg\ z$ şi $ctg\ z$ în planul complex se definesc cu formulele:

$$tg\ z \overset{def}{=} \frac{\sin z}{\cos z} \qquad ctg\ z \overset{def}{=} \frac{\cos z}{\sin z} \qquad (7.82)$$

Funcţiile hiperbolice în planul complex se definesc cu formulele:

$$sh\ z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad ch\ z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad (7.83)$$

$$th\ z \overset{def}{=} \frac{sh\ z}{ch\ z} \qquad cth\ z \overset{def}{=} \frac{ch\ z}{sh\ z} \qquad (7.84)$$

Funcţiile hiperbolice sunt strâns legate de funcţiile trigonometrice. Conexiunea este dată de următoarele relaţii:

$$ch\ z = \cos(iz) \qquad sh\ z = -i\sin(iz) \qquad (7.85)$$

$$\cos z = ch(iz) \qquad \sin z = -i\, sh(iz) \qquad (7.86)$$

Precizare: Modulul funcţiilor $\sin z$ şi $\cos z$ în planul complex ia valori arbitrar de mari.

Exerciţii:

1) Arătaţi că: $\cos\left(i\ln\left(5\pm 2\sqrt{6}\right)\right) = 5$

$$\cos\left(i\ln\left(5\pm 2\sqrt{6}\right)\right) = ch\left(\ln\left(5\pm 2\sqrt{6}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\ln\left(5\pm2\sqrt{6}\right)} + e^{-\ln\left(5\pm2\sqrt{6}\right)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{\ln\left(5\pm2\sqrt{6}\right)} + e^{\ln\left(5\mp2\sqrt{6}\right)}\right) = \frac{1}{2}\left(5\pm 2\sqrt{6} + 5\mp 2\sqrt{6}\right) = 5$$

2) Determinaţi modulul şi argumentul principal al funcţiei date în punctul z_0 .

a) $w = \cos z$, $z_0 = \frac{\pi}{2} + i\ln 2$

$$w = \cos z \stackrel{def}{=} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\cos z_0 = \frac{1}{2}\left(e^{i\left(\frac{\pi}{2}+i\ln 2\right)} + e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+i\ln 2\right)}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{i\frac{\pi}{2}}e^{-\ln 2} + e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{\ln 2}\right)$$

$$\cos z_0 = \frac{1}{2}\left(e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{2} + e^{-i\frac{\pi}{2}} \cdot 2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) + 2\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\cos z_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}i - 2i\right) = \left(\frac{1}{4} - 1\right)i = -\frac{3}{4}i$$

$$|\cos z_0| = \frac{3}{4} \qquad \arg(\cos z_0) = -\frac{\pi}{2}$$

b) $w = sh\, z$, $z_0 = 1 + i\frac{\pi}{2}$

$$w = shz = \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right)$$

$$sh\, z_0 = \frac{1}{2}\left(e^{1+i\frac{\pi}{2}} - e^{-1-i\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(e \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{e}e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$sh\, z_0 = \frac{e}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2e}\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$sh\, z_0 = \frac{e}{2}i + \frac{1}{2e}i = \frac{i}{2}\left(e + \frac{1}{e}\right)$$

$$|sh\, z_0| = \frac{1}{2}\left(e + \frac{1}{e}\right) \qquad arg(sh\, z_0) = \frac{\pi}{2}$$

7.4 Integrarea funcţiilor complexe. Teorema Cauchy

Integrarea unei funcţii de variabilă complexă

O curbă în planul complex este o transformare de forma:

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}\,,\ \gamma(t) = x(t) + iy(t)\,,\, t \in [a,b] \tag{7.87}$$

$\gamma(a)$ reprezintă punctul iniţial al curbei şi $\gamma(b)$ punctul final. Curba γ este netedă dacă

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt} \tag{7.88}$$

există şi este nenulă $\forall t \in [a,b]$.

Fie o curbă orientată γ netedă pe porţiuni, în planul complex. Presupunem că o funcţie $f(z)$ de variabilă complexă este definită pe curba γ sau pe un domeniu care include curba γ. Împărţim curba în *n* arce parţiale cu ajutorul punctelor:

$$z_0 = \gamma(a),\ z_1,\ z_2,\ ...,\ z_n = \gamma(b) \tag{7.89}$$

alese arbitrar, cu $\gamma(a)$ şi $\gamma(b)$ extremităţile curbei.

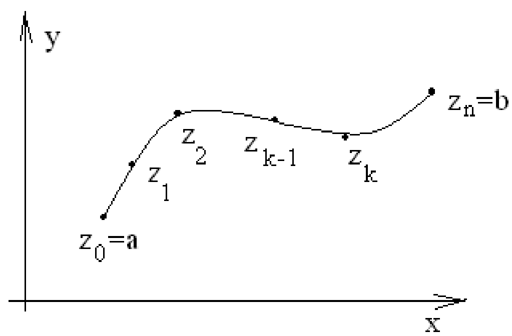

Figura 7.19

Pe fiecare arc partial, care se intinde de la z_{k-1} la z_k ($k = 1,\dots,n$), alegem un punct arbitrar ζ_k si notam:

$$\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$$

Formăm suma:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k \tag{7.90}$$

numită *sumă integrală complexă*, unde ζ_k este un punct arbitrar din arcul parţial $[z_{k-1}, z_k]$. Dacă pentru $\max_k |\Delta z_k| \to 0$ există limita sumei (7.90) independent de partiţia curbei în arce parţiale şi de alegerea punctelor ζ_k, atunci această limită se numeşte *integrala* lui $f(z)$ pe curba γ.

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz \overset{def}{=} \lim_{\max|\Delta z_k|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k \qquad (7.91)$$

O functie $f(z)$ care are integrala complexa pe curba se numeste *integrabila pe curba*. Daca $f(z)$ este *analitica* pe curba, atunci $f(z)$ este sigur integrabila pe curba.

Exista o conexiune intre integrala functiei complexe pe o curba si integralele unor functii reale pe curba. Astfel, daca considerăm:

$$f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y) \text{ si } dz = dx + idy \qquad (7.92)$$

si dacă curba γ este netedă pe porţiuni şi $f(z)$ este funcţie mărginită şi continuă pe porţiuni pe γ, atunci integrala (7.91) există şi are loc formula:

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\gamma} (u+iv)(dx+idy) \qquad (7.93)$$

$$= \int_{\gamma} udx - \int_{\gamma} vdy + i\int_{\gamma} udy + i\int_{\gamma} vdx$$

Cum $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, integralele functiilor reale se calculeaza:

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\alpha}^{\beta} u(t)\frac{dx}{dt}dt - \int_{\alpha}^{\beta} v(t)\frac{dy}{dt}dt + i\int_{\alpha}^{\beta} u(t)\frac{dy}{dt}dt + i\int_{\alpha}^{\beta} v(t)\frac{dx}{dt}dt \qquad (7.94)$$

Integralele funcţiilor de variabilă complexă păstrează proprietăţile de bază ale integralelor functiilor reale:

1) $\int_{\gamma} (f_1(z) + f_2(z))\,dz = \int_{\gamma} f_1(z)\,dz + \int_{\gamma} f_2(z)\,dz$

2) $\int_{\gamma} cf(z)\,dz = c\int_{\gamma} f(z)\,dz$ unde c este o constantă complexă.

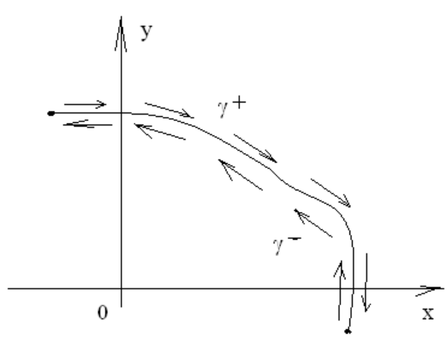

Figura 7.20

3) $\int\limits_{\gamma^-} f(z)dz = -\int\limits_{\gamma^+} f(z)dz$, unde γ^- şi γ^+ au orientări opuse.

4) $\int\limits_{\gamma^1} f(z)dz + \int\limits_{\gamma^2} f(z)dz = \int\limits_{\gamma^1\cup\gamma^2} f(z)dz$

5) Fie $M = \max\limits_{z\in\gamma}|f(z)|$ şi *l* lungimea curbei γ. Atunci,

$$\left|\int\limits_{\gamma} f(z)dz\right| \le \int\limits_{\gamma}|f(z)||dz| \le M\int\limits_{\gamma}|dz| = Ml \tag{7.95}$$

Calcularea integralei unei funcţii de variabilă complexă

Exemplu: Calculati integrala complexa a functiei $f(z)=1/z$ pe cercul $|z|=R$, incepand si sfarsind cu punctul $z=R$.

Cercul parametrizat este:

$$\text{C: } z(t) = R\cos t + iR\sin t,\quad 0\le t\le 2\pi \tag{7.96}$$

Si functia:

$$f(z) = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

Partea reala si partea imaginara sunt:

$$u = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{R\cos t}{R^2} \qquad v = \frac{-y}{x^2+y^2} = -\frac{R\sin t}{R^2}$$

Cu (7.94) calculam:

$$\int\limits_C \frac{1}{z}dz = \int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos t}{R}(-R\sin t)dt - \int\limits_0^{2\pi}\frac{-\sin t}{R}R\cos t dt +$$

$$+i\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos t}{R}R\cos t dt + i\int\limits_0^{2\pi}\frac{-\sin t}{R}(-R\sin t)dt =$$

$$= 0+0+i\pi+i\pi = 2\pi i$$

Integrala poate fi evaluata si direct:

Considerăm curba netedă γ în reprezentare parametrică:

$$z = z(t) = x(t) + iy(t),\quad t\in[\alpha,\beta]$$

Atunci:

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f[z(t)]z'(t)dt \tag{7.96}$$

Reluam integrala din exemplu:

$$\int_C \frac{1}{z}dz = \int_0^{2\pi} \frac{-R\sin t + iR\cos t}{R\cos t + iR\sin t}dt = \int_0^{2\pi} idt = 2\pi i$$

Observatie: Rezultatul integralei este independent de *R*.

Exemple:

1. $I_1 = \int_{\gamma_1} z\ dz$ unde γ_1 este dreapta ce uneşte $z=0$ cu punctul $z=1+2i$

O astfel de dreaptă are ecuaţia $y=2x$ şi dacă considerăm $x=t$ parametrul curbei, atunci ecuaţia parametrică a curbei γ_1 este:

$$\gamma_1(t) = t + i2t\,,\quad t\in[0,1]$$

$$\gamma_1'(t) = 1+2i$$

$$I_1 = \int_{\gamma_1} z\ dz = \int_0^1 (t+i2t)(dt+2idt) = \int_0^1 t(1+2i)(1+2i)dt = (1+2i)^2\int_0^1 tdt$$

$$= (1+2i)^2 \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}(1+4i-4) = -\frac{3}{2}+2i$$

2. $I_2 = \int_{\gamma_2} z\ dz$ unde γ_2 este parabola ce uneşte $z=0$ cu punctul $1+2i$

O astfel de parabolă are ecuaţia $y=2x^2$ şi dacă considerăm $x=t$ parametrul curbei, atunci ecuaţia parametrică a curbei γ_2 este:

$$\gamma_2(t) = t + i2t^2\,,\quad t\in[0,1]$$

$$\gamma_2'(t) = 1+4it$$

$$I_2 = \int_{\gamma_2} z\ dz = \int_0^1 \left(t+i2t^2\right)(dt+4itdt) = \int_0^1 t(1+2it)(1+4it)dt =$$

$$= \int_0^1 t\left(1+4it+2it-8t^2\right)dt = \int_0^1 t\left(1+6it-8t^2\right)dt = \int_0^1 \left(t+6it^2-8t^3\right)dt$$

$$= \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1 + 6i\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1 - 8\left.\frac{t^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{2}+2i-2 = -\frac{3}{2}+2i$$

Observatie: Rezultatul integralei funcţiei $f(z)=z$ pare să nu depindă de forma curbei γ ci numai de punctul iniţial şi final al acesteia.

3. $I_3 = \int_{\gamma_1} z^2 \, dz$ unde γ_1 este dreapta ce uneşte $z=0$ cu punctul $1+2i$

O astfel de dreaptă are ecuaţia $y=2x$ şi dacă considerăm $x=t$ parametrul curbei, atunci ecuaţia parametrică a curbei γ_1 este:

$$\gamma_1(t) = t + i2t\,, \quad t\in[0,1]$$

$$\gamma_1'(t) = 1+2i$$

$$I_3 = \int_{\gamma_1} z^2 \, dz = \int_0^1 (t+i2t)^2 (dt + 2idt) = \int_0^1 t^2 (1+2i)^2 (1+2i)\, dt = (1+2i)^3 \int_0^1 t^2 dt$$

$$= (1+2i)^3 \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}\left(1+6i+12i^2+8i^3\right) = \frac{1}{3}(1+6i-12-8i) = -\frac{11}{3} - \frac{2}{3}i$$

4. $I_4 = \int_{\gamma_2} z^2 \, dz$ unde γ_2 este parabola ce uneşte $z=0$ cu punctul $1+2i$

O astfel de parabolă are ecuaţia $y=2x^2$ şi dacă considerăm $x=t$ parametrul curbei, atunci ecuaţia parametrică a curbei γ_2 este:

$$\gamma_2(t) = t + i2t^2\,, \quad t\in[0,1]$$

$$\gamma_2'(t) = 1+4it$$

$$I_4 = \int_{\gamma_2} z^2 \, dz = \int_0^1 \left(t+i2t^2\right)^2 (dt + 4itdt) = \int_0^1 t^2 (1+2it)^2 (1+4it)\, dt =$$

$$= \int_0^1 t^2 \left(1+4it-4t^2\right)(1+4it)\, dt = \int_0^1 t^2 \left(1+4it+4it-16t^2-4t^2-16it^3\right) dt =$$

$$= \int_0^1 t^2 \left(1+8it-20t^2-16it^3\right) dt = \int_0^1 \left(t^2+8it^3-20t^4-16it^5\right) dt =$$

$$= \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1 + 8i\left.\frac{t^4}{4}\right|_0^1 - 20\left.\frac{t^5}{5}\right|_0^1 - 16i\left.\frac{t^6}{6}\right|_0^1 = \frac{1}{3} + 2i - 4 - \frac{8}{3}i = -\frac{11}{3} - \frac{2}{3}i$$

Observatie: Rezultatul integralei funcţiei $f(z) = z^2$ pare să nu depindă de forma curbei γ ci numai de punctul iniţial şi final al acesteia.

5. Integraţi funcţia $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ $f(z)=\bar{z}^2$ pe dreapta care uneşte punctul $z=0$ cu $z=1+i$

Parametrizarea acestei curbe este: $\gamma(t)=t+it$, $t\in[0,1]$

$$\gamma'(t)=1+i$$

$$\int_\gamma \bar{z}^2dz=\int_0^1(t-it)^2(1+i)dt=(1+i)\int_0^1(t-it)^2\,dt$$

$$=(1+i)\int_0^1 t^2(1-i)^2\,dt=-2i(1+i)\int_0^1 t^2dt$$

$$=-2i(1+i)\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1=-2i(1+i)\frac{1}{3}=\frac{2}{3}(1-i)$$

6. Integraţi aceeaşi funcţie $f(z)=\bar{z}^2$, pe parabola $y=x^2$ care uneşte aceleaşi două puncte $z=0$, $z=1+i$

Parametrizarea acestei curbe este: $\gamma(t)=t+it^2$, $t\in[0,1]$

$$\gamma'(t)=1+2it$$

$$\int_\gamma \bar{z}^2dz=\int_0^1\left(t-it^2\right)^2(1+2it)dt=\int_0^1\left(t^2-2it^3-t^4\right)(1+2it)dt$$

$$=\int_0^1\left(t^2+2it^3-2it^3+4t^4-t^4-2it^5\right)dt=\int_0^1\left(t^2+3t^4-2it^5\right)dt=$$

$$=\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1+3\left.\frac{t^5}{5}\right|_0^1-2i\left.\frac{t^6}{6}\right|_0^1=\frac{14}{15}-\frac{1}{3}i$$

7. Integraţi aceeaşi funcţie $f(z)=\bar{z}^2$, pe reuniunea a două segmente de dreaptă γ_1 pe axa *Ox* şi γ_2 paralel cu *Oy* care unesc aceleaşi două puncte $z=0$, $z=1+i$

Parametrizarea acestor curbe: $\gamma_1(t)=t$, $t\in[0,1]$

$$\gamma_1'(t)=1$$

$$\gamma_2(t)=1+it,\ t\in[0,1]$$

$$\gamma'(t)=i$$

$$\int_\gamma \bar{z}^2dz=\int_{\gamma_1}\bar{z}^2dz+\int_{\gamma_2}\bar{z}^2dz=\int_0^1 t^2dt+\int_0^1(1-it)^2\,idt$$

$$=\int_0^1 t^2 dt + i\int_0^1 \left(1-2it-t^2\right)dt$$

$$=\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1 + i\left(\left.t\right|_0^1 - 2i\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1 - \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1\right) = \frac{1}{3} + i\left(1-i-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}+\frac{2}{3}i$$

Observatie: Integrarea functiei $f(z)=\bar{z}^2$ intre aceleasi doua puncte pe trei curbe diferite a condus la trei rezultate diferite.

8. $\int\limits_{\gamma_r} \frac{dz}{z-z_0}$

unde γ_r este un cerc de rază *r* cu centrul în punctul z_0 şi este parcurs în sens invers acelor de ceas.

Cercul poate fi reprezentat parametric:

$$z = z_0 + re^{it} \ , \quad t \in [0, 2\pi) \qquad (7.97)$$

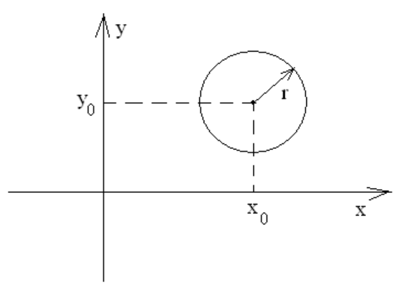

Figura 7.21

Într-adevăr,

$$x = x_0 + r\cos t$$
$$y = y_0 + r\sin t \quad |\times i \quad \text{şi adunare}$$
$$x + iy = x_0 + iy_0 + r(\cos t + i\sin t) = z_0 + re^{it}$$

Rezultă că, $z(t) = z_0 + re^{it} \ , \ t \in [0, 2\pi]$

$$z'(t) = ire^{it}$$

$$\int\limits_{\gamma_r} \frac{dz}{z-z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

9. $I_n = \int\limits_{\gamma_r} \left(z - z_0\right)^n dz$ unde γ_r este un cerc de rază *r* cu centrul în punctul z_0

$$z = z_0 + re^{it} \quad z'(t) = ire^{it}$$

$$I_n = \int\limits_0^{2\pi} \left(re^{it}\right)^n rie^{it} dt = ir^{n+1} \int\limits_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = ir^{n+1} \left. \frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)} \right|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{r^{n+1}}{n+1}\left(e^{i2\pi(n+1)} - e^0\right) = \frac{r^{n+1}}{n+1}\left(\cos 2\pi(n+1) + i\sin 2\pi(n+1) - 1\right) = 0$$

Teorema 1 (Cauchy): Fie $f(z)$ o funcţie analitică pe un domeniu *D* simplu conex şi fie γ un contur în *D* neted pe porţiuni, închis. Atunci:

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = 0 \tag{7.98}$$

Observaţie: Dacă $f(z)$ este o funcţie analitică pe un domeniu *D* simplu conex, atunci valoarea integralei $\int\limits_{\gamma} f(z)dz$ pe o curbă arbitrară γ netedă pe porţiuni din *D* este independentă de alegerea curbei γ. Valoarea integralei este determinată numai de punctul iniţial şi final al curbei. Punctăm acest lucru notând integrala astfel:

$$\int\limits_{z_0}^{z_1} f(z)dz$$