7.3Definiții. Derivate. Ecuațiile Cauchy-Riemann

Mulțimi în planul complex

Vom nota cu $\mathbb{C}$ mulţimea numerelor complexe. În formă algebrică mulţimea numerelor complexe este:

$$\mathbb{C} = \left\{ z = x + iy \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1 \right\} \quad (7.25)$$

$$x = \operatorname{Re} z \qquad y = \operatorname{Im} z$$

Numerele complexe se reprezintă geometric în planul complex (Diagrama Argand).

Fie $\varepsilon > 0$ un număr pozitiv arbitrar și fie z_0 un număr complex arbitrar fixat. Considerăm mulțimea de puncte z din planul complex, figura 7.4, care satisfac inegalitatea:

$$|z - z_0| < \varepsilon \quad (7.26)$$

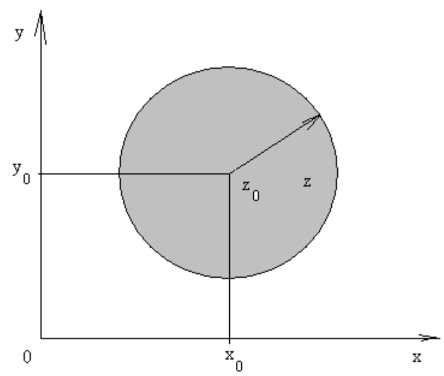

Figura 7.4 O ε-vecinătate a lui z_0.

Considerăm $z_0 = x_0 + iy_0$ și $z = x + iy$ și obținem:

$$z - z_0 = x - x_0 + i(y - y_0)$$

$$|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon \quad (7.27)$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2 \quad (7.28)$$

Mulțimea punctelor z din planul complex ce satisfac (7.26) formează o ε-vecinătate a lui z_0.

Definiții:

- z este punct interior al unei mulțimi din planul complex dacă există o ε-vecinătate a punctului inclusă în mulțime.
- O mulțime D din planul complex se numește domeniu dacă este alcătuită numai din puncte interioare (este deschisă) și oricare două puncte din mulțime pot fi conectate de o curbă conținută în mulțime.
- Un punct este punct frontieră al domeniului D, dacă orice ε-vecinătate a sa are puncte atât în interiorul cât și în exteriorul domeniului.
- Mulțimea tuturor punctelor frontieră, notată ∂D, formează frontiera domeniului D.
- Un domeniu D împreună cu frontiera sa ∂D este un domeniu închis și se notează $\bar{D}$

Exemple: Mulțimea punctelor z care verifică inegalitățile: $1<|z|<2$ este un domeniu deschis, iar mulțimea punctelor z care verifică inegalitățile: $1\le|z|\le 2$ este un domeniu închis (figura 7.5). Frontiera este alcătuită din cercurile: $|z|=1$ și $|z|=2$.

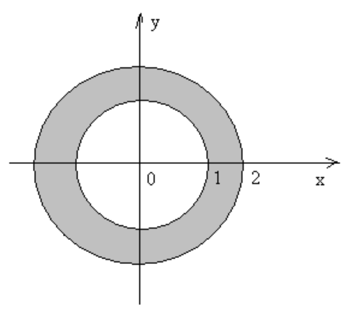

Figura 7.5

O curbă închisă fără autointersecții se numește contur. Orice contur împarte planul complex în două domenii, și este frontieră între acestea. Domeniul interior conturului este mărginit, iar cel exterior este nemărginit. Spunem că un *domeniu D* este simplu conex dacă interiorul oricărui contur din D aparține lui D (practic o multime fara gauri).

Exemple:

1. Mulțimea de numere complexe $z=x+iy$ care verifică condiţiile:

$0 < x < 1,\ \ -1 < y < 1$ formează un domeniu simplu conex, figura 7.6.

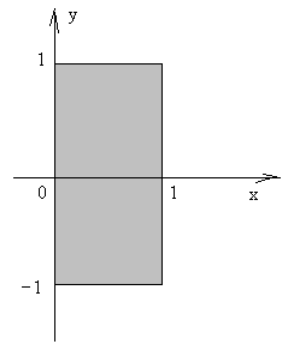

Figura 7.6

2. Mulțimea de numere complexe z care verifică condiţia: $0 < |z| < 1$ <u>nu</u> este un domeniu simplu conex. Punctul $z = 0$ aflat în interiorul conturului γ nu aparţine mulţimii (figura 7.7).

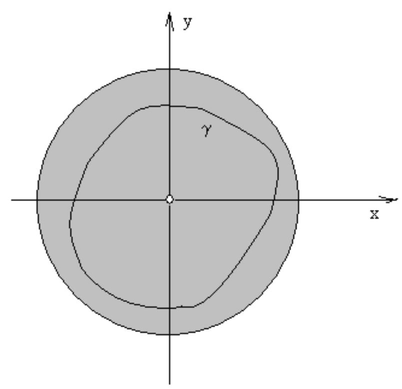

Figura 7.7

Limita şirurilor de numere complexe

Fie sirul $\{x_n\}$ format din numerele reale: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. Spunem ca sirul $\{x_n\}$ este convervent la numarul real A daca $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon)$ astfel incat $|x_n - A| < \varepsilon$, $\forall n > N(\varepsilon)$.

Fie $\{z_n\}$ un şir de numere complexe cu $z_n = x_n + iy_n$, unde $x_n \in \mathbb{R}$ şi $y_n \in \mathbb{R}$.

Definiţie: Un număr complex z este limita şirului $\{z_n\}$ dacă $\forall \varepsilon > 0$ există un număr $N = N(\varepsilon)$ astfel încât $|z_n - z| < \varepsilon$, $\forall n > N(\varepsilon)$.

Notaţie: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$

Geometric, toţi termenii şirului z_n cu $n > N(\varepsilon)$, puncte în planul complex, se află în interiorul cercului cu centrul în *z* şi rază ε.

Teoremă: Un şir de numere complexe $z_n = x_n + iy_n$ este convergent dacă şi numai dacă şirurile de numere reale $\{x_n\}$ şi $\{y_n\}$ sunt convergente. În plus, are loc:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n + i\lim_{n\to\infty} y_n \tag{7.29}$$

Considerăm şirul $\{z_n\}$ de numere complexe: $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$.

Dacă pentru orice număr $M > 0$ arbitrar de mare, există un număr natural *N* a.î. toţi termenii z_n ai şirului $\{z_n\}$ cu $n > N$ verifică inegalitatea $|z_n| > M$, atunci spunem că şirul $\{z_n\}$ este convergent la un *punct la infinit*, sau simplu la *infinit*, şi scriem:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty \tag{7.30}$$

Dacă suplimentăm planul variabilelor complexe cu punctul $z = \infty$ pe care tocmai l-am definit, atunci obţinem *planul complex extins*.

Funcţii de o variabilă complexă

Funcţia $f : S \to \mathbb{C}$ cu

$$w = f(z) \tag{7.31}$$

este definită pe o mulţime *S* a planului complex *z* dacă este precizată o lege care pune în corespondenţă fiecare număr complex *z* din *S* cu un număr complex *w* unic. Funcţia $w = f(z)$ este o transformare a punctelor din planul complex *z* în puncte din planul complex *w* (vezi figura 7.8).

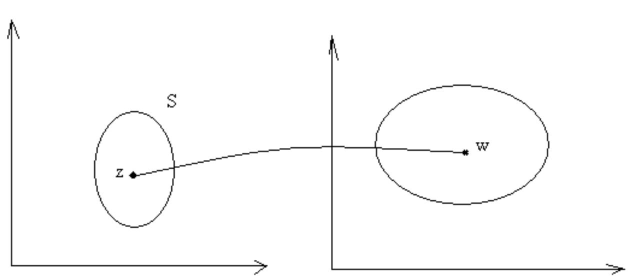

Figura 7.8

Considerăm $z = x + iy$, $w = u + iv$. Atunci definiţia funcţiei de variabilă complexă $w = f(z)$ va fi echivalentă cu definiţia a două funcţii reale de două variabile reale $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, unde

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{7.32}$$

$u = u(x, y)$ este *partea reală* şi $v = v(x, y)$ *partea imaginară* a funcţiei $w = f(z)$.

Exemple:

1) $w = z^2$

Considerăm $z = x + iy$, $w = u + iv$

$$u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

Funcţia $w = z^2$ este echivalentă cu două funcţii reale $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$

2) $w = \frac{1}{z}$

Considerăm $z = x + iy$, $w = u + iv$

$$u + iv = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2}$$

Funcţia $w = \frac{1}{z}$ este echivalentă cu două funcţii reale $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $v = \frac{-y}{x^2 + y^2}$

O funcţie $w = f(z)$ transforma *unu-la-unu* mulţimea *S* dacă în puncte diferite din *S* ia valori diferite. De exemplu, funcţia $w = z^2$ transforma *unu-la-unu* semiplanul superior ($\operatorname{Im} z > 0$) şi nu face acest lucru pentru întreg planul. De exemplu, $i^2 = (-i)^2 = -1$.

Limita unei funcţii

Fie $w = f(z)$ o funcţie definită pe o vecinătate a punctului $z_0 = x_0 + iy_0$, cu o posibilă excepţie în z_0. Un număr complex *A* este limita lui $f(z)$ când $z \to z_0$ şi notăm $A = \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$, dacă $\forall \varepsilon > 0$ putem determina o $\delta -$vecinătate a punctului z_0 a.î.

oricare ar fi *z* din δ – vecinătate, cu excepţia posibilă pentru z_0, punctul corespunzător *w* prin funcţie se află în ε – vecinătatea punctului *A* (figura 7.9).

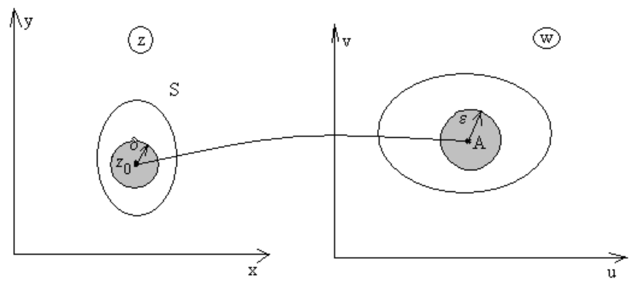

Figura 7.9 Ilustrarea limitei unei functii intr-un punct.

Pentru z_0 şi *A* puncte finite în planul complex, rescriem definitia limitei astfel:

$A = \lim\limits_{z \to z_0} f(z) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $\forall z$ cu $0 < |z - z_0| < \delta$, să avem $|f(z) - A| < \varepsilon$

(7.33)

Observatii:

1. În definiţia limitei, punctul *z* tinde la z_0 pe orice drum.
2. Existenţa limitei (7.33) este echivalentă cu existenţa limitelor funcţiilor reale $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = B \qquad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = C \qquad (7.34)$$

unde $A = B + iC$.

Cum limita (7.33) este echivalentă cu limitele funcţiilor reale de două variabile (7.34), funcţia de variabilă complexă se supune la aceleasi reguli de calcul pentru limite:

$$\lim_{z \to z_0} \left(f(z) \pm g(z) \right) = \lim_{z \to z_0} f(z) \pm \lim_{z \to z_0} g(z) \qquad (7.35)$$

$$\lim_{z \to z_0} \left(f(z) \cdot g(z) \right) = \lim_{z \to z_0} f(z) \cdot \lim_{z \to z_0} g(z) \qquad (7.36)$$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim\limits_{z \to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z \to z_0} g(z)}, \quad \lim_{z \to z_0} g(z) \neq 0 \qquad (7.37)$$

Continuitate

O funcţie $w = f(z)$ definită pe o mulţime *S* este continuă în punctul $z_0 \in S$, dacă

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0), \quad z \in S \qquad (7.38)$$

Cu alte cuvinte, $f(z)$ este continuă în z_0, dacă $\forall \varepsilon > 0$, putem determina $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $\forall z \in S$ care verifică $|z - z_0| < \delta$, să avem $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Condiţia necesară şi suficientă ca o funcţie de variabilă complexă $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$ să fie continuă în punctul $z_0 = x_0 + iy_0$ este ca părţile sale reală şi imaginară $u = u(x, y)$ şi $v = v(x, y)$ să fie continue în punctul (x_0, y_0) în *x* şi *y*.

Acest fapt ne permite să translatăm proprietăţile funcţiilor continue de două variabile reale la funcţiile continue de variabilă complexă. Dintre acestea amintim: continuitatea sumei, produsului, câtului de două funcţii continue şi continuitatea funcţiilor compuse.

Dacă o funcţie $f(z)$ este continuă în fiecare punct al unei mulţimi *S*, atunci spunem că $f(z)$ este continuă pe *S*.

Funcţii diferenţiabile şi funcţii analitice

O funcţie complexă este o transformare $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ şi scriem $f(z) = w$ cu *z* şi *w* numere complexe. Din punct de vedere geometric transformarea poate fi gândită ca o corespondenţă între două plane complexe: planul *z* şi planul *w*. Planul *w* are o axă reală *u* şi o axă imaginară *v*. *u* şi *v* sunt funcţii reale de componentele *x* şi *y* a lui *z*.

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

Acestă ecuaţie ne furnizează un punct *unic* (u, v) în planul *w* pentru fiecare punct (x, y) din planul *z*. Sub acţiunea lui *f* mulţimi din planul *z* sunt transformate în mulţimi din planul *w*. De exemplu, o curbă din planul *z* poate fi transformată într-o curbă din planul *w*.

Problemă: Cum se transformă dreapta $y = mx$ din planul *z* în planul *w*? Daca consideram functia $w = f(z) = z^2$

$$w = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

$$u(x,y)=x^2-y^2 \qquad \text{şi} \qquad v(x,y)=2xy$$

Pentru dreapta din planul *z*, $y=mx$ aceste ecuaţii conduc la

$$u=\left(1-m^2\right)x^2 \qquad\qquad v=2mx^2$$

Eliminând *x* din aceste ecuaţii obţinem: $v=\dfrac{2m}{1-m^2}u$

Aceasta este o dreaptă care trece prin origine planului *w* şi are unghiul cu axa orizontală modificat faţă de unghiul format de dreapta $y=mx$ din planul *z* cu axa orizontală.

Definitie: Fie $f(z)$ o funcţie (univaloare) definită pe o vecinătate a punctului z_0. Derivata lui $f(z)$ în z_0, este:

$$\left.\frac{df}{dz}\right|_{z_0}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} \tag{7.38}$$

cu condiţia ca limita să existe şi să fie unica. Adica, valoarea limitei sa nu depinda de directia dupa care Δz tinde la zero in diagrama Argand.

$$\Delta z=\Delta x+i\Delta y \tag{7.39}$$

Orice doua directii pe care Δz tinde la zero trebuie sa conduca la acelasi rezultat in caz de derivabilitate. In particular, ne putem deplasa paralel cu axa reala ($\Delta y=0$) sau paralel cu axa imaginara ($\Delta x=0$). Pentru ca derivata să existe, rezultatul nu trebuie să depindă de modul în care $\Delta z\to 0$.

Daca considerăm

$$z=x+iy \qquad z_0=x_0+iy_0$$

$$f(z)=u(x,y)+i\ v(x,y)$$

$$f(z_0)=u(x_0,y_0)+i\ v(x_0,y_0)$$

Atunci avem:

$$f(z_0+\Delta z)=u(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)+i\ v(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$$

Si limita din definitie este:

$$f'(z_0)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{u(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)+i\ v(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-\left(u(x_0,y_0)+i\ v(x_0,y_0)\right)}{\Delta x+i\Delta y}$$

$$f'(z_0)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{u(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)+i\left(\ v(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)\right)}{\Delta x+i\Delta y}$$

□ Considerăm mai întâi $\Delta y \to 0$ şi apoi $\Delta x \to 0$, adică $\Delta z \to 0$ pe axa reală.

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - u(x_0, y_0) + i\left(v(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - v(x_0, y_0)\right)}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0+\Delta x, y_0) - u(x_0, y_0) + i\left(v(x_0+\Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)\right)}{\Delta x}$$

$$f'(z_0) = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} + i\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \qquad (7.40)$$

□ Considerăm mai întâi $\Delta x \to 0$ şi apoi $\Delta y \to 0$, adică $\Delta z \to 0$ pe axa imaginară.

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - u(x_0, y_0) + i\left(v(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - v(x_0, y_0)\right)}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0+\Delta y) - u(x_0, y_0) + i\left(v(x_0, y_0+\Delta y) - v(x_0, y_0)\right)}{i\Delta y}$$

$$f'(z_0) = -i\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} + \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \qquad (7.41)$$

Cele două expresii (7.40-41) ale lui $f'(z_0)$ trebuie să fie egale, deci

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{şi} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (7.42)$$

Cunoscute sub numele de relatii Cauchy-Riemann.

Exemple: 1. Examinaţi derivata funcţiei $f(z) = x^2 + i2y^2$ în $z_0 = 1+i$

$$\left.\frac{df}{dz}\right|_{z=1+i} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(1+i+\Delta z) - f(1+i)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0, \Delta y \to 0} \frac{f(1+i+\Delta x + i\Delta y) - f(1+i)}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0} \frac{f\left(1+\Delta x+i\left(1+\Delta y\right)\right)-f\left(1+i\right)}{\Delta x+i\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0} \frac{\left(1+\Delta x\right)^2+i2\left(1+\Delta y\right)^2-\left(1+2i\right)}{\Delta x+i\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0} \frac{1+2\Delta x+\left(\Delta x\right)^2+2i+4i\Delta y+2i\left(\Delta y\right)^2-1-2i}{\Delta x+i\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0} \frac{2\Delta x+\left(\Delta x\right)^2+4i\Delta y+2i\left(\Delta y\right)^2}{\Delta x+i\Delta y}$$

Ne apropiem de $z_0 = 1+i$ pe dreapta $y-1=m\left(x-1\right)$, atunci $\Delta y = m\Delta x$

$$\left.\frac{df}{dz}\right|_{z=1+i} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2\Delta x+\left(\Delta x\right)^2+4im\Delta x+2im^2\left(\Delta x\right)^2}{\Delta x+im\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2+\left(\Delta x\right)+4im+2im^2\left(\Delta x\right)}{1+im}$$

$$\left.\frac{df}{dz}\right|_{z=1+i} = \frac{2+4im}{1+im}$$

In funcţie de parametrul *m* avem o infinitate de valori pentru derivată. Deci, valoarea limitei depinde de drumul pe care ne apropiem de $z_0 = 1+i$. Atunci, funcţia nu are derivată în $z = 1+i$

2. Arătaţi că funcţia $w = f\left(z\right) = Re\ z$ nu este diferenţiabilă în nici un punct.

Fie $z = x+iy$. Atunci $w = x$. Prin definiţie:

$$f'\left(z\right) = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f\left(z+\Delta z\right)-f\left(z\right)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0} \frac{f\left(x+iy+\Delta x+i\Delta y\right)-f\left(x+iy\right)}{\Delta x+i\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0} \frac{x+\Delta x-x}{\Delta x+i\Delta y} = \lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x+i\Delta y}$$

Această limită ar trebui sa fie independentă de drumul pe care ne apropiem de *z* când trecem la limită. Considerăm două cazuri.

Fie ne apropiem de $z = x+iy$ pe dreapta $y = ct$, $\Delta y = 0$. Atunci:

$$\lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x+i\Delta y} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

Fie ne apropiem de $z = x + iy$ pe dreapta $x = ct$, $\Delta x = 0$. Atunci:

$$\lim_{\Delta x \to 0, \Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0}{i\Delta y} = 0$$

Valoarea limitei depinde de drumul pe care ne apropiem de z. În consecinţă $w = Re\, z$ nu este diferenţiabilă în nici un punct.

2. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $f(z) = z^3$ este diferenţiabilă pe $\mathbb{C}$.

$$\forall z_0 \in \mathbb{C}, \quad f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{z^3 - z_0^3}{z - z_0}$$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)(z^2 + zz_0 + z_0^2)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} (z^2 + zz_0 + z_0^2) =$$

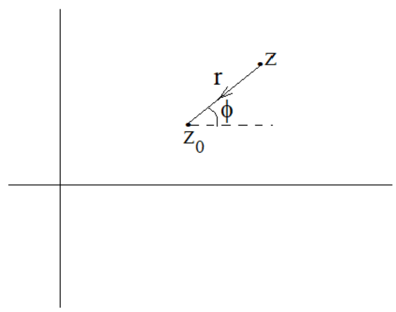

Figura 7.10

Atentie: $z_0 = x_0 + iy_0 \qquad z = x + iy$

$$x = x_0 + r\cos\phi$$

$$y = y_0 + r\sin\phi \quad |\times i$$

$$x + iy = x_0 + iy_0 + r(\cos\phi + i\sin\phi)$$

$$z = z_0 + r(\cos\phi + i\sin\phi)$$

$$z = z_0 + re^{i\phi}$$

Ne intoarcem la calculul limitei:

$$= \lim_{z \to z_0} \left[(z_0 + re^{i\phi})^2 + (z_0 + re^{i\phi}) z_0 + z_0^2 \right] =$$

$$= \lim_{r \to 0} (z_0^2 + 2z_0 re^{i\phi} + r^2 e^{i2\phi} + z_0^2 + rz_0 e^{i\phi} + z_0^2) = 3z_0^2$$

3. $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}\quad f(z)=(\overline{z})^2$ diferenţiabilă numai în $z=0$.

$$\forall z_0\in\mathbb{C},\quad f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{\overline{z}^2-\overline{z}_0^2}{z-z_0}$$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{\left(\overline{z_0+re^{i\phi}}\right)^2-\overline{z}_0^2}{z_0+re^{i\phi}-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{\left(\overline{z}_0+re^{-i\phi}\right)^2-\overline{z}_0^2}{re^{i\phi}}$$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{\overline{z}_0^2+2\overline{z}_0re^{-i\phi}+r^2e^{-i2\phi}-\overline{z}_0^2}{re^{i\phi}}=\lim_{z\to z_0}\frac{2\overline{z}_0re^{-i\phi}+r^2e^{-i2\phi}}{re^{i\phi}}$$

$$=\lim_{z\to z_0}\left(2\overline{z}_0e^{-i2\phi}+re^{-i3\phi}\right)$$

Dacă $z_0\neq 0$, limita pentru $z\to z_0$ înseamnă limita pentru $r\to 0$ şi este egală cu $2\overline{z}_0e^{-i2\phi}$ şi depinde de ϕ, adică de direcţia după care *z* se apropie de z_0. Deci această limită nu există şi funcţia nu este diferenţiabilă.

Dacă $z_0=0$, limita pentru $z\to z_0$, adica pentru $r\to 0$ este egală cu zero. $f(z)=(\overline{z})^2$ este diferenţiabilă în $z=0$.

Proprietăţi de calcul:

Daca *c* este o constanta complexa si $f(z)$ o functie derivabila:

$$\frac{dc}{dz}=0\qquad \frac{dz}{dz}=1\qquad \frac{d(cf(z))}{dz}=cf'(z)\tag{7.43}$$

Daca $n\in\mathbb{Z}^+$

$$\frac{dz^n}{dz}=nz^{n-1}\tag{7.44}$$

Relatia este valida si pentru *n* negativ daca $z\neq 0$.

$$\frac{d}{dz}\left[f(z)+g(z)\right]=f'(z)+g'(z)\tag{7.45}$$

$$\frac{d}{dz}\left[f(z)\cdot g(z)\right]=f'(z)g(z)+f(z)g'(z)\tag{7.46}$$

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]=\frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g^2(z)},\ g(z)\neq 0\tag{7.47}$$

Derivarea functiilor compuse:

$$\frac{d}{dz}\left(f(g(z))\right)=\frac{df(g(z))}{dw}\frac{dw}{dz}\ \text{unde}\ w=g(z)\tag{7.48}$$

Exemplu: $\frac{d}{dz}\left(2z^2+i\right)^5=5w^4\cdot 4z=20z\left(2z^2+i\right)^4$, unde $w=2z^2+i$

Problemă: Care sunt condiţiile în care o funcţie complexă este diferenţiabilă?

Teorema 1: Dacă $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ este o funcţie derivabilă într-un punct $z_0=x_0+iy_0$, atunci trebuie sa existe derivatele parţiale ale funcţiilor $u=u(x,y)$ şi $v=v(x,y)$ in punctul (x_0,y_0) si sa verifice:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{şi} \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{7.49}$$

Relaţiile se numesc *ecuaţii diferenţiale Cauchy-Riemann*. (conditii necesare pentru derivabilitate)

Satisfacerea conditiilor Cauchy-Riemann in (x_0,y_0) nu este suficienta pentru existenta derivatei $f'(z_0)$. Sunt necesare si conditii de continuitate.

Teorema 2: Fie funcţia

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

definita pe o $\varepsilon-$ vecinatate a lui $z_0=x_0+iy_0$. Presupunem ca derivatele partiale ale functiilor $u(x,y)$ şi $v(x,y)$ in raport cu *x* si *y* exista, sunt *continue* în punctul (x_0,y_0) si satisfac conditiile Cauchy-Riemann în punctul (x_0,y_0). Atunci funcţia de variabilă complexă $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ este diferenţiabilă în punctul $z_0=x_0+iy_0$ si

$$f'(z_0)=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}+i\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \tag{7.50}$$

Exemple:

1. Funcţia $w=\overline{z}=x-iy$ nu este diferenţiabilă în nici un punct, deoarece:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1\neq\frac{\partial v}{\partial y}=-1$$

2. $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ $f(z)=z^3$ este diferenţiabilă pe $\mathbb{C}$.

$$f(z)=z^3=(x+iy)^3=x^3+3x^2iy+3xi^2y^2+i^3y^3$$

$$f(z)=\left(x^3-3xy^2\right)+i\left(3x^2y-y^3\right)$$

$$u(x,y)=x^3-3xy^2 \qquad v(x,y)=3x^2y-y^3$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 3y^2 = 3x^2 - 3y^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad -6xy = -6xy$$

$f(z) = z^3$ este diferenţiabilă pe $\mathbb{C}$

3. $f:\mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad f(z) = (\bar{z})^2$ diferenţiabilă numai în $z = 0$.

$$f(z) = (\bar{z})^2 = (x - iy)^2 = x^2 - y^2 - i2xy$$

$$u(x,y) = x^2 - y^2 \qquad v(x,y) = -2xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad 2x = -2x \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad -2y = 2y \quad \Rightarrow \quad y = 0$$

$f(z) = (\bar{z})^2$ diferenţiabilă numai în $z = 0$

Definiţie: O funcţie $w = f(z)$ este *analitică* într-un punct z_0, dacă este diferenţiabilă în z_0 şi pe o vecinătate a lui z_0.

O funcţie $w = f(z)$ diferenţiabilă în fiecare punct al unui domeniu D se numeşte *funcţie analitică pe domeniu*. O functie poate sa fie analitica pe un domeniu cu exceptia unui numar finit de puncte sau infinit, caz in care spunem ca este analitica cu exceptia acestor puncte care se numesc *singularitati* ale functiei $f(z)$.

Exemplu: Functia $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ este analitica peste tot cu exceptia lui $z = 1$

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

$$= \lim_{z \to z_0} \left[\frac{1}{z - z_0} \left(\frac{1}{1-z} - \frac{1}{1-z_0} \right) \right]$$

$$= \lim_{z \to z_0} \left[\frac{1}{(1-z)(1-z_0)} \right] = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\left(1-\left(z_0 + re^{i\phi}\right)\right)(1-z_0)}$$

$$= \lim_{r \to 0} \frac{1}{(1-z_0)^2 - re^{i\phi}(1-z_0)} = \frac{1}{(1-z_0)^2}$$

Derivata exista independent de modul in care $z \to z_0$, cu conditia $z_0 \neq 1$. Atunci $f(z)$ este analitica peste tot cu exceptia singularitatii $z_0 = 1$.

Pentru orice funcţie *analitică* $f(z)$ au loc urmatoarele relaţii de derivare ca urmare a relatiei deduse (7.40) si apoi a valabilitatii relatiilor Cauchy-Riemann:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (7.51)$$

Deoarece $z = x + iy$ si $\overline{z} = x - iy$, x si y pot fi exprimati in functie de z si complexul sau conjugat $\overline{z}$ prin:

$$x = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \quad \text{si} \quad y = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}) \qquad (7.52)$$

Consideram functia complexa $f = u + iv$ ca o functie de z si $\overline{z}$ si nu de x si y si calculam $\partial f / \partial \overline{z}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \overline{z}} \qquad (7.53)$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(-\frac{1}{2i}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Daca f este *analitica*, atunci conditiile Cauchy-Riemann (7.49) trebuie sa fie satisfacute si acestea ne conduc imediat la $\partial f / \partial \overline{z} = 0$. Concludem ca, daca f este analitica atunci f nu poate fi o functie de $\overline{z}$.

Exerciţii:

1. Verificaţi dacă funcţia $w = z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$ este analitică.

$$u(x,y)=x^2+y^2,\quad v(x,y)=0$$

Ecuaţiile Cauchy-Riemann vor fi:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\quad\Rightarrow\quad 2x=0\quad\Rightarrow\quad x=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\quad\Rightarrow\quad 2y=0\quad\Rightarrow\quad y=0$$

Acestea sunt satisfăcute numai în punctul $(0,0)$. Astfel funcţia $w=z\cdot\overline{z}$ este diferenţiabilă numai în $z=0$ şi nu este analitică. Cum functia depinde de $\overline{z}$, conform calculului precedent functia nu poate fi analitica.

2. Arătaţi că funcţia:

$$w=f(z)=e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$$

este analitică pe întreg planul complex.

$$u(x,y)=e^x\cos y,\qquad v(x,y)=e^x\sin y$$

Derivatele acestora verifică condiţiile Cauchy-Riemann (7.49):

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y=\frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y=-\frac{\partial v}{\partial x}=-e^x\sin y$$

Cu formula (7.51), calculăm derivata funcţiei:

$$f'(z)=\left(e^x(\cos y+i\sin y)\right)'=\frac{\partial\left(e^x\cos y\right)}{\partial x}+i\frac{\partial\left(e^x\sin y\right)}{\partial x}=e^x(\cos y+i\sin y)=f(z)$$

Practic: $\left(e^z\right)'=e^z$ (7.54)

Unele proprietati ale functiilor *analitice* sunt de mare importanta in fizica teoretica.

Definiţie: O funcţie se numeşte *armonică* pe un domeniu *D*, dacă are derivate parţiale continue până la ordinul doi pe *D* şi dacă verifică *ecuaţia lui Laplace*:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 \tag{7.55}$$

Observaţie: Dacă o funcţie $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ este <u>analitică</u> pe un domeniu *D*, atunci partea sa reală $u(x,y)$ şi partea sa imaginară $v(x,y)$ sunt <u>funcţii armonice</u> pe *D*.

Într-adevăr, diferenţiind prima ecuaţie Cauchy-Riemann în raport cu *x* şi a doua în raport cu *y* obţinem:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$$

Cum derivatele mixte sunt egale, prin adunare, obţinem:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

Urmatorul rezultat se refera la doua familii de curbe $u(x,y)=\text{constant}$ si $v(x,y)=\text{constant}$, unde *u* si *v* sunt partea reala si imaginara a oricarei functii analitice $f=u+iv$. Asa cum stim, vectorul normal la cuba $u(x,y)=\text{constant}$ este:

$$\nabla u=\frac{\partial u}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} \tag{7.56}$$

O expresie similara exista pentru ∇v, normala la curba $v(x,y)=\text{constant}$. Calculam produsul scalar al celor doi vectori normali la curbe:

$$\nabla u\cdot\nabla v=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

In ultima linie am folosit conditiile Cauchy-Riemann pentru a rescrie derivatele partiale. Deoarece produsul scalar este zero, vectorii normali la curbe trebuie sa fie ortogonali si curbele trebuie sa se intersecteze in unghiuri drepte.

Exemplu: Consideram functia $f(z)=z^2$ analitica.

Avem $u(x,y)=x^2-y^2$ si $v(x,y)=2xy$ Curbele cu *u* si *v* constant sunt hiperbole care sunt perpendiculare in fiecare punct in care se intersecteaza (figura 7.11).

Proprietate: O transformare $w=f(z)$ este *conformă* pe domeniul *D* dacă $f(z)$ este injectivă şi analitică pe *D*, şi $f'(z)\neq 0$, $\forall z\in D$. Transformarea păstrează unghiurile. Dacă două curbe γ_1, γ_2 trec prin *a* şi au un unghi ϕ între ele, atunci funcţia transformă curbele în alte două curbe ce se intersectează în $f(a)$ şi au acelaşi unghi ϕ între ele.

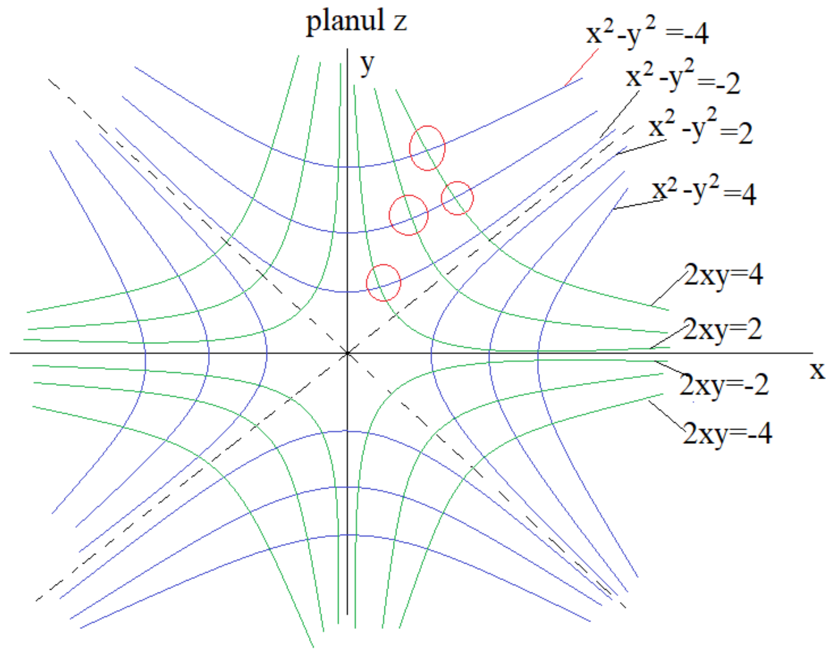

Figura 7.11

Exemple de transformari conforme: (i) $w = z + b$ translatie cu numarul complex *b*, (ii) $w = z \cdot e^{i\phi}$ rotatie cu unghiul ϕ, (iii) $w = az$, *a* real, contractie sau dilatare in directie radiala, (iv) transformarea inversa $w = 1/z$ care transforma interiorul cercului unitate in exteriorul sau si invers.

Exerciţii

1. Determinaţi partea reală şi partea imaginară a funcţiei $w = \bar{z} - iz^2$.

Cum $z = x + iy$, atunci $w = x - iy - i(x + iy)^2$

$$w = x - iy - i\left(x^2 + 2ixy - y^2\right)$$

$$w = x - iy - ix^2 + 2xy + iy^2$$

$$w = x + 2xy + i\left(y^2 - y - x^2\right)$$

$$u(x, y) = x + 2xy \quad v(x, y) = y^2 - y - x^2$$

2. Arătaţi cum transformă funcţia $f(z) = e^z = e^{x+iy}$ diverse drepte din planul complex.

$z = 2 + iy \qquad e^{2+iy} = e^2 \left(\cos y + i \sin y \right) \qquad$ cerc cu raza e^2

$z = x + i\dfrac{\pi}{3} \qquad e^{x + i\frac{\pi}{3}} = e^x \left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i \sin\dfrac{\pi}{3} \right) \qquad$ dreapta

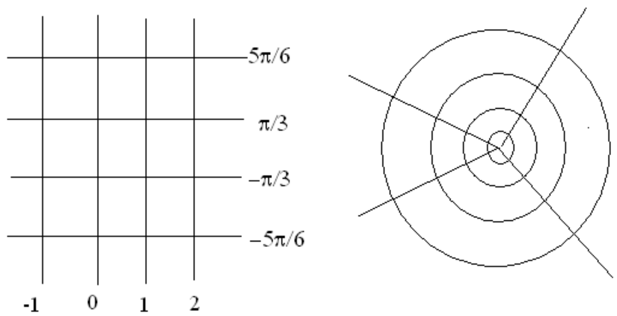

Figura 7.12

3. Reprezentati grafic rotatia $f(z) = e^{i\theta} z$

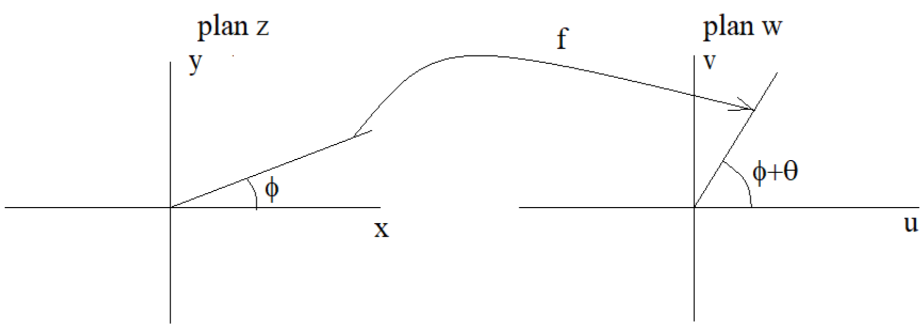

Figura 7.13 $z = re^{i\phi} \xrightarrow{f} re^{i(\phi+\theta)}$

4.Cu condiţiile Cauchy-Riemann determinaţi dacă funcţiile următoare sunt analitice.

a) $w = z^2 \cdot \overline{z}$

Cum $z = x + iy$, atunci $w = (x + iy)^2 (x - iy)$

$$w = \left(x^2 + 2ixy - y^2 \right)(x - iy)$$

$$w = x^3 - ix^2 y - y^2 x + iy^3 + 2x^2 yi + 2xy^2$$

$$w = x^3 + xy^2 + i\left(y^3 + x^2 y \right)$$

$$u(x, y) = x^3 + xy^2 \qquad v(x, y) = y^3 + x^2 y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + y^2, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 3y^2 + x^2 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 + y^2 = 3y^2 + x^2, \ 2x^2 = 2y^2, \ y^2 - x^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad y = \pm x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy, \quad -\frac{\partial v}{\partial x} = -2xy \quad \Rightarrow \quad 2xy = -2xy, \ 4xy = 0, \quad xy = 0$$

$\Rightarrow y = 0$ sau $x = 0$

Funcţia este diferenţiabilă numai în $z = 0$, şi nu este analitică în nici un punct din planul complex.

b) $w = ze^z$

Cum $z = x + iy$, atunci $w = (x + iy)e^{x+iy}$

$$w = (x + iy)e^x(\cos y + i\sin y)$$

$$w = e^x(x\cos y + ix\sin y + iy\cos y - y\sin y)$$

$$w = e^x(x\cos y - y\sin y + i(x\sin y + y\cos y))$$

$$u(x, y) = e^x(x\cos y - y\sin y)$$

$$v(x, y) = e^x(x\sin y + y\cos y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x(x\cos y - y\sin y) + e^x\cos y$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = e^x(x\cos y + \cos y - y\sin y) \quad \text{egale } \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^x(-x\sin y - \sin y - y\cos y)$$

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = -e^x(x\sin y + y\cos y) - e^x\sin y \quad \text{egale } \forall z \in \mathbb{C}$$

Funcţia este diferenţiabilă şi analitică pe tot palanul complex.

5.Aratati ca daca punctul z_0 se afla in jumatatea superioara a planului z atunci functia

$$w = e^{i\phi}\frac{z - z_0}{z - \overline{z}_0}$$

transforma jumatatea superioara a planului z in interiorul cercului unitate din planul w.

Calculam modulul lui w:

$$|w| = \left| e^{i\phi} \frac{z - z_0}{z - \overline{z}_0} \right| = \left| e^{i\phi} \right| \left| \frac{z - z_0}{z - \overline{z}_0} \right| = \left| \frac{z - z_0}{z - \overline{z}_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{|z - \overline{z}_0|}$$

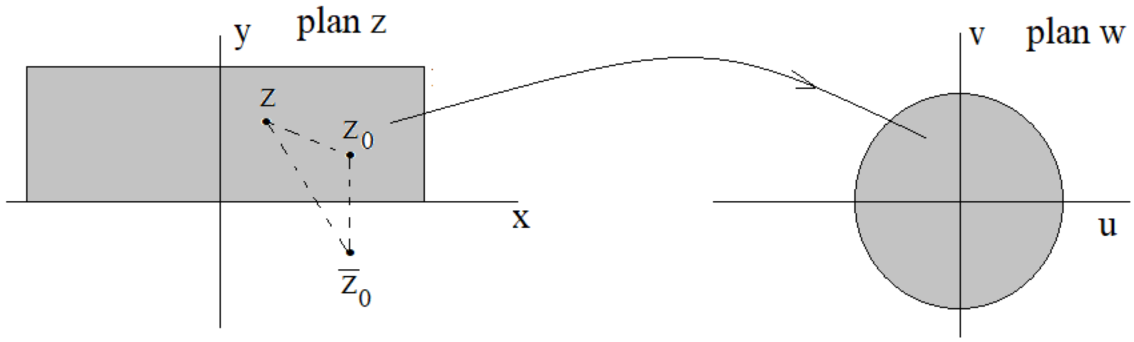

Figura 7.14

Deoarece $\overline{z}_0$ este reflexia lui z_0 in axa reala, daca z si z_0 sunt in jumatatea superioara a planului z atunci $|z - z_0| \leq |z - \overline{z}_0|$ si astfel $|w| \leq 1$ cum este necesar. Axa reala este transformata in frontira cercului, iar z_0 in $w = 0$.