Tema 12

1. Cu definiția integralei improprii, determinați dacă următoarele integrale sunt convergente.

$$\text{a) } \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^4+1}dx \quad \text{b) } \int_1^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^3}dx \quad \text{c) } \int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx \quad \text{d) } \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$$

2. Să se arate că funcția $f(x,y)=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$ definită pentru $y^2 \neq 2x$ nu are limită în origine $O(0,0)$.

3. Să se cerceteze existența limitei pentru funcția $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ în punctul $O(0,0)$.

4. Calculați cu definiția:

a) $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(4,1)}$ şi $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(4,1)}$ dacă $f(x,y)=\ln\left(x-y^2\right), \quad x>y^2$

b) $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{\left(1,\frac{\pi}{2}\right)}$ dacă $f(x,y)=e^{\sin xy}$

5. Calculați derivatele parțiale ale funcțiilor:

a) $z=x^3+y^3-3xy$

b) $z=\dfrac{x-y}{x+y}$

c) $z=\dfrac{y}{x}$

d) $z=\sqrt{x^2-y}$

e) $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$

f) $z=e^{\sin\frac{y}{x}}$

g) $z=x^5+3xy\sin(x+y)+y^5$

h) $z=x^2y^2\ln\left(x^4+y^4\right)$