2.17 Convexitatea. Forma unei curbe. Puncte de inflexiune

Fie o curbă definită de funcția $y = f(x)$ şi fie $f'(x_0)$ derivata finită a funcției în punctul x_0 astfel, curba admite tangentă în $M_0(x_0, f(x_0))$, tangentă care nu este paralelă cu axa *Oy*.

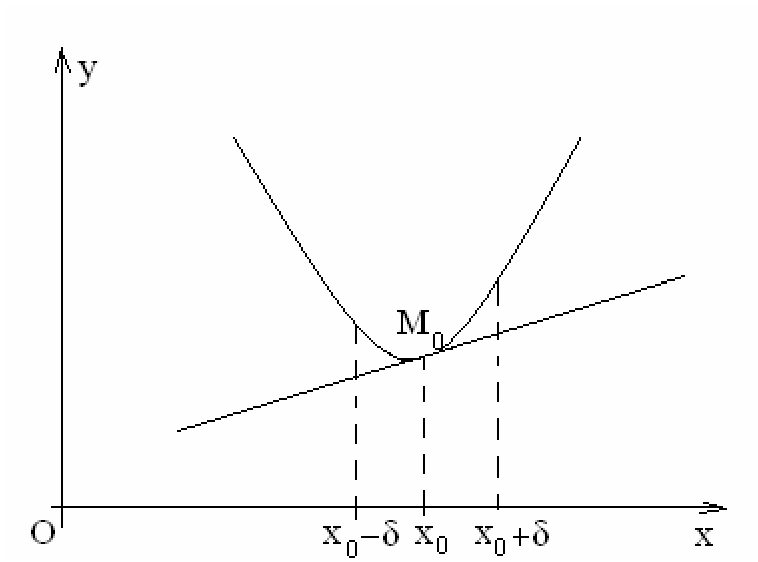


Figura 2.40

Definiții:

- O curbă este *convexă* într-un punct M_0 dacă există o vecinătate $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ a punctului x_0 astfel încât toate punctele curbei cu abscisele conținute în $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ să se afle deasupra tangentei la curbă în punctul M_0 (figura 2.40).

- O curbă este *concavă* într-un punct M_0 dacă există o vecinătate $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ a punctului x_0 astfel încât toate punctele curbei cu abscisele conținute în $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ să se afle sub tangenta la curbă în punctul M_0 (figura 2.41).

- Fie $y = f(x)$ o funcție diferențiabilă pe (a,b). Spunem că graficul lui $y = f(x)$ este *convex* (*concav*) pe (a,b) dacă graficul se află deasupra (dedesubt) de tangenta la curba $y = f(x)$, $\forall x \in (a,b)$.

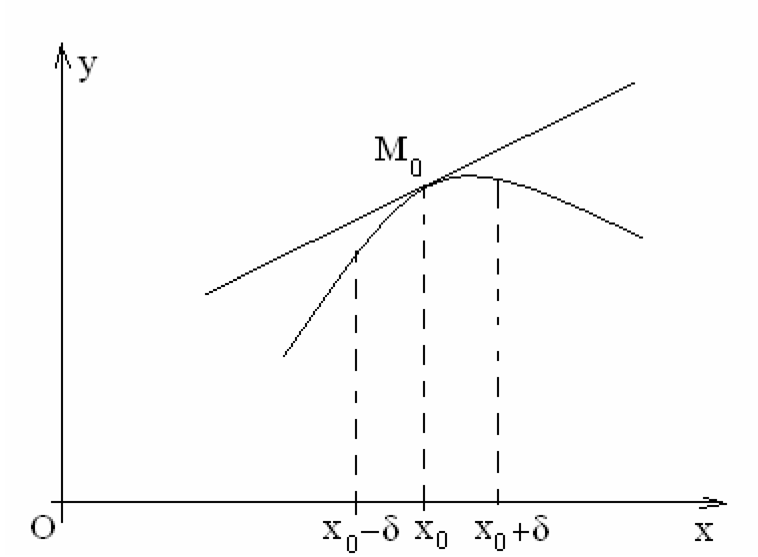


Figura 2.41

- Punctul $M_0\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ se numeşte *punct de inflexiune* al curbei $y=f\left(x\right)$ dacă există o vecinătate $\left(x_0-\delta, x_0+\delta\right)$ a punctului x_0 astfel încât curba este concavă $\forall x \in\left(x_0-\delta, x_0\right)$ şi convexă $\forall x \in\left(x_0, x_0+\delta\right)$ sau vice versa.

Observație: $M_0\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ este *punct de inflexiune* dacă la stânga şi la dreapta punctului curba se află în semiplane diferite față de tangenta la curbă în M_0.

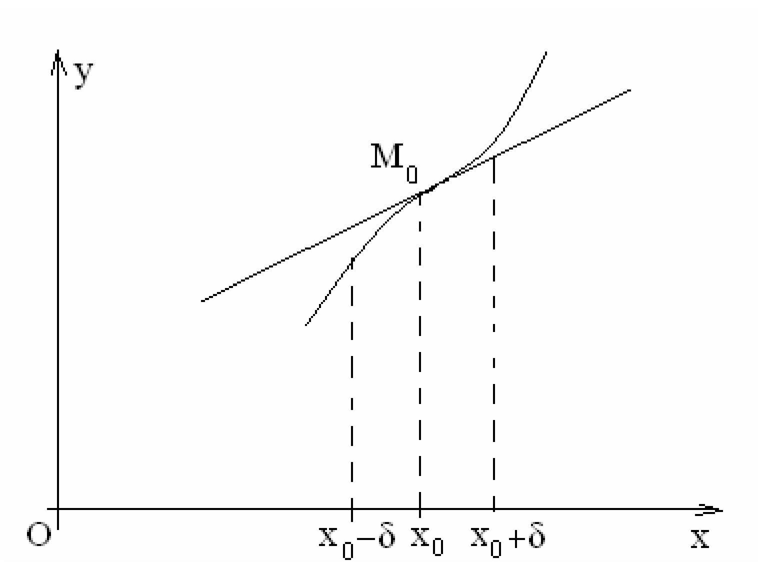


Figura 2.42

Procedeu analitic de investigare a convexității şi a punctelor de inflexiune

Considerăm un punct de pe curba $y = f(x)$ şi un punct de pe tangenta la curba $y = f(x)$ în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$. Presupunem că aceste puncte au aceeaşi abscisă x şi fie y ordonata punctului ales pe curbă şi Y ordonata punctului ales pe tangentă. Evident, dacă $y - Y > 0$, $\forall x \neq x_0$ dintr-o vecinătate a punctului x_0, curba este convexă în M_0 şi dacă $y - Y < 0$, $\forall x \neq x_0$ dintr-o vecinătate a punctului x_0, curba este concavă în M_0.

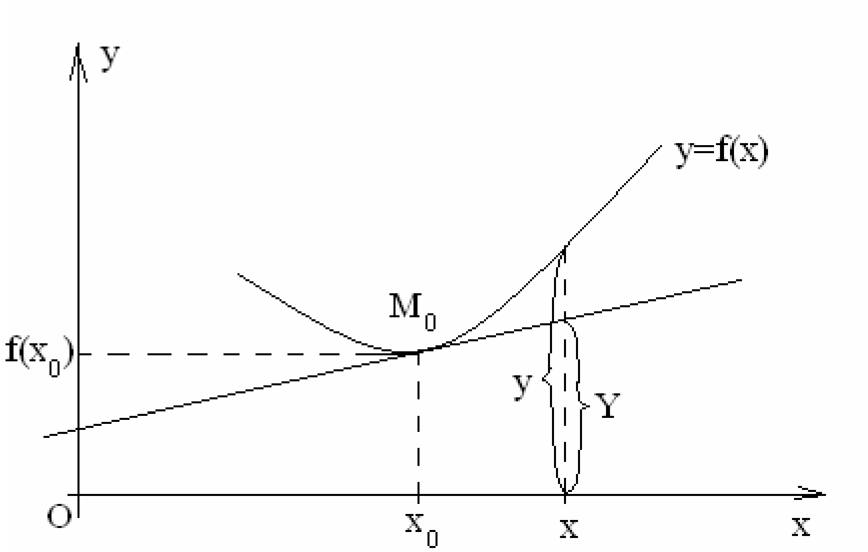


Figura 2.43

Pentru a determina convexitatea curbei în M_0 este suficient să investigăm semnul diferenței $y - Y$ pe o vecinătate a punctului x_0.

Ecuația tangentei este

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\Rightarrow \quad y - Y = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] =$$

$$= [f(x) - f(x_0)] - f'(x_0)(x - x_0)$$

Notăm: $h = x - x_0$

$$\Rightarrow \quad y - Y = [f(x_0 + h) - f(x_0)] - f'(x_0) \cdot h$$

Presupunem că funcția admite derivată secundă $f''(x)$ în x_0 şi pe o vecinătate a lui x_0. Aplicăm teorema Lagrange în ultima relație:

$$f'\left(x_0+\theta\cdot h\right)h-f'\left(x_0\right)h=\left[f'\left(x_0+\theta\cdot h\right)-f'\left(x_0\right)\right]h$$

unde $\theta=\theta(h)$ şi $0<\theta<1$.

Atunci:

$$f''(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}$$

Considerăm $\Delta x=\theta\cdot h$

$$f''\left(x_0\right)=\lim_{\theta h\to 0}\frac{f'\left(x_0+\theta\cdot h\right)-f'\left(x_0\right)}{\theta\cdot h}$$

Cu teorema 1 de la operații cu limite putem scrie:

$$\frac{f'\left(x_0+\theta\cdot h\right)-f'\left(x_0\right)}{\theta\cdot h}=f''\left(x_0\right)+\alpha\left(\theta h\right)$$

$$f'\left(x_0+\theta\cdot h\right)-f'\left(x_0\right)=f''\left(x_0\right)\theta\cdot h+\alpha\left(\theta\cdot h\right)\theta\cdot h$$

unde $\alpha\left(\theta\cdot h\right)\to 0$ pentru $h\to 0$.

In concluzie,

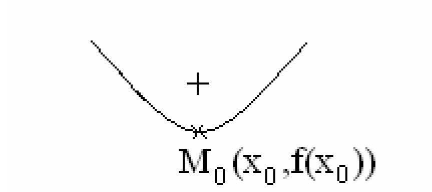
$$y-Y=\left[f''\left(x_0\right)+\alpha\left(\theta\cdot h\right)\right]\theta\cdot h^2$$

Fie $f''(x_0)\neq 0$. Deoarece $\alpha\left(\theta\cdot h\right)$ este un infinitezimal pentru $h\to 0$, există $\delta>0$ astfel încât $f''\left(x_0\right)+\alpha\left(\theta\cdot h\right)$ are acelaşi semn cu $f''(x_0)$ pe $(x_0-\delta,x_0+\delta)$. Mai mult, $\theta\cdot h^2>0$.

Dacă $f''(x_0)>0 \;\Rightarrow\; y-Y>0$ pentru *x* suficient de aproape de x_0. Curba este convexă în $M_0(x_0,f(x_0))$.

Dacă $f''(x_0)<0 \;\Rightarrow\; y-Y<0$ pentru *x* suficient de aproape de x_0. Curba este concavă în $M_0(x_0,f(x_0))$.

$f''\left(x_0\right)>0 \quad\Rightarrow$



$f''(x_0) < 0 \quad \Rightarrow$

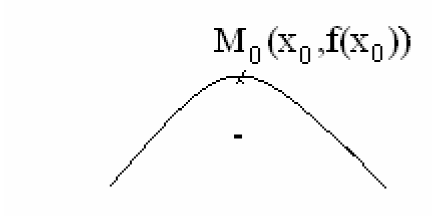


Figura 2.44

Condiție necesară pentru punct de inflexiune: $M_0(x_0, f(x_0))$ poate fi punct de inflexiune pentru curba $y = f(x)$ doar dacă $f''(x_0) = 0$ sau dacă $f''(x_0)$ nu există.

Această condiție nu este suficientă.

Exemplu: $f(x) = x^4 \quad f''(x) = 12x^2 \quad f''(0) = 0$

Totuşi punctul $x_0 = 0$ nu este punct de inflexiune pentru funcție. In acest punct curba este convexă.

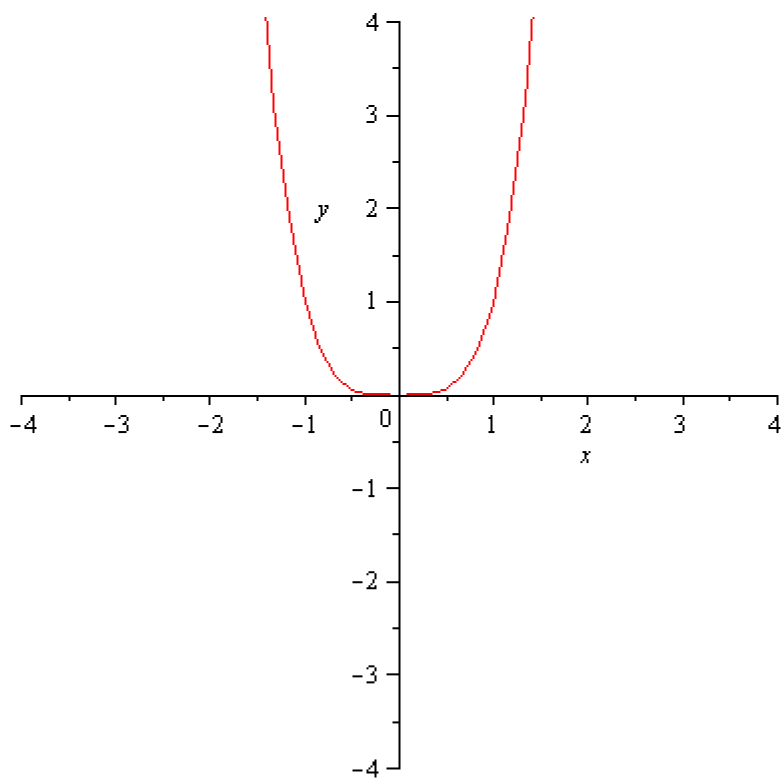


Figura 2.45 $f(x) = x^4$

O condiție suficientă pentru inflexiune este conținută în torema următoare.

Teorema 1: Fie $y = f(x)$ o funcție care are derivată secundă pe o vecinătate a punctului x_0 şi aceasta este continuă în x_0 . Atunci, punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ este punct de inflexiune al curbei $y = f(x)$ dacă $f''(x_0) = 0$ şi derivata secundă îşi schimbă semnul în x_0 când x trece prin x_0.

Observație: Este posibil ca în punctul de inflexiune x_0, tangenta la curba $y = f(x)$ să fie verticală, adică paralelă cu axa Oy , astfel încât $f''(x)$ nu există în punctul x_0.
Exemplu:

$$f(x) = x^{1/3} \qquad f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} \qquad f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}$$

Derivata secundă $f''(x)$ nu se anulează în nici un punct şi în $x = 0$ derivata secundă nu există. Investigăm semnul derivatei secunde pe o vecinătate a lui $x = 0$.

$$\begin{cases} f''(x) > 0, & \forall x \in (-\delta, 0) \\ f''(x) < 0, & \forall x \in (0, \delta) \end{cases}$$

Curba este convexă la stânga lui zero şi concavă la dreapta lui zero, deci punctul $x = 0$ este punct de inflexiune.

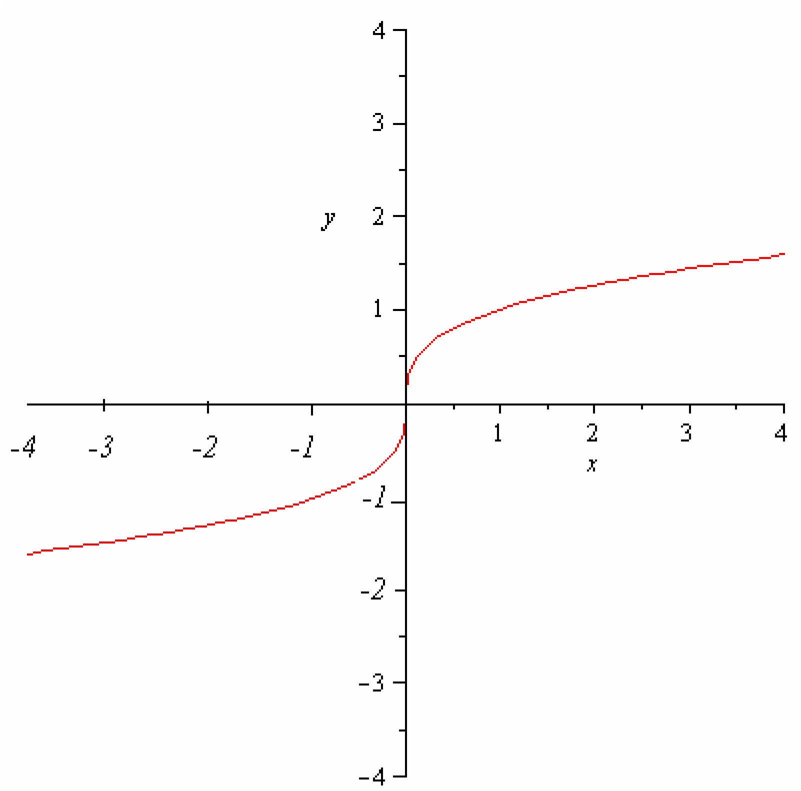


Figura 2.46 $f(x) = x^{1/3}$

Condiție suficientă pentru punct de inflexiune:

Fie $y = f(x)$ o funcție care are derivată secundă continuă pe o vecinătate a punctului x_0 cu o posibilă excepție în x_0. Atunci, punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ este punct de inflexiune al curbei $y = f(x)$ dacă $f''(x_0) = 0$ sau nu există şi derivata secundă îşi schimbă semnul în x_0 când x trece prin x_0.

2.18 Asimptote

Considerăm o curbă $y = f(x)$ care are ramură la infinit. O asimptotă a unei ramuri la infinit este o dreaptă pentru care distanța δ dintre un punct M de pe curbă şi dreaptă tinde la zero când M se îndepărtează la infinit față de originea sistemului de coordonate.

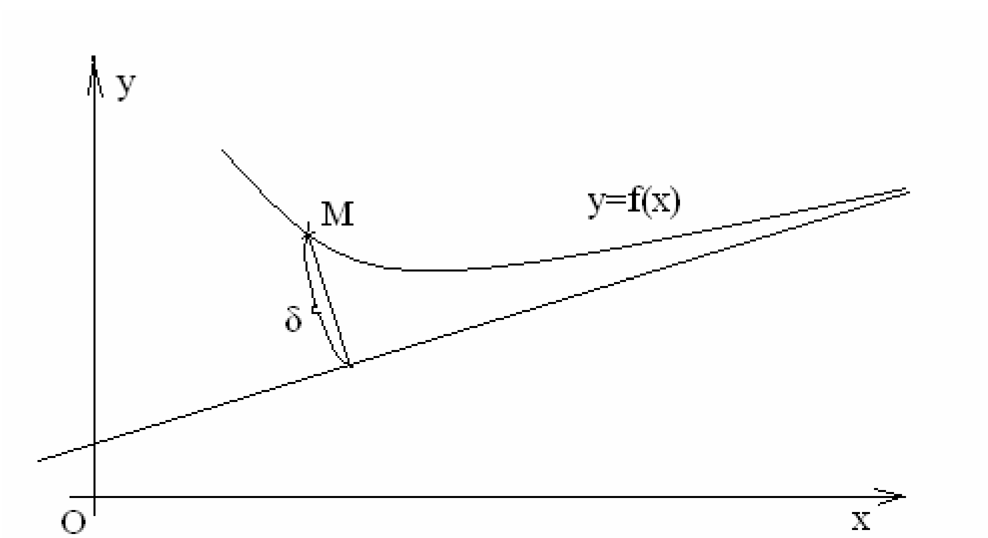


Figura 2.47

Asimptote verticale

Dreapta $x = x_0$ este *asimptotă verticală* la graficul funcției $y = f(x)$, dacă cel puțin una din limitele următoare au loc:

$$\lim_{x \to x_0, x < x_0} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x \to x_0, x > x_0} f(x) = \pm\infty$$

Exemplu:

$y = \dfrac{1}{x}$ are asimptota verticală $x = 0$, deoarece

$$\lim_{x \to 0, x < 0} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{x \to 0, x > 0} \frac{1}{x} = +\infty$$

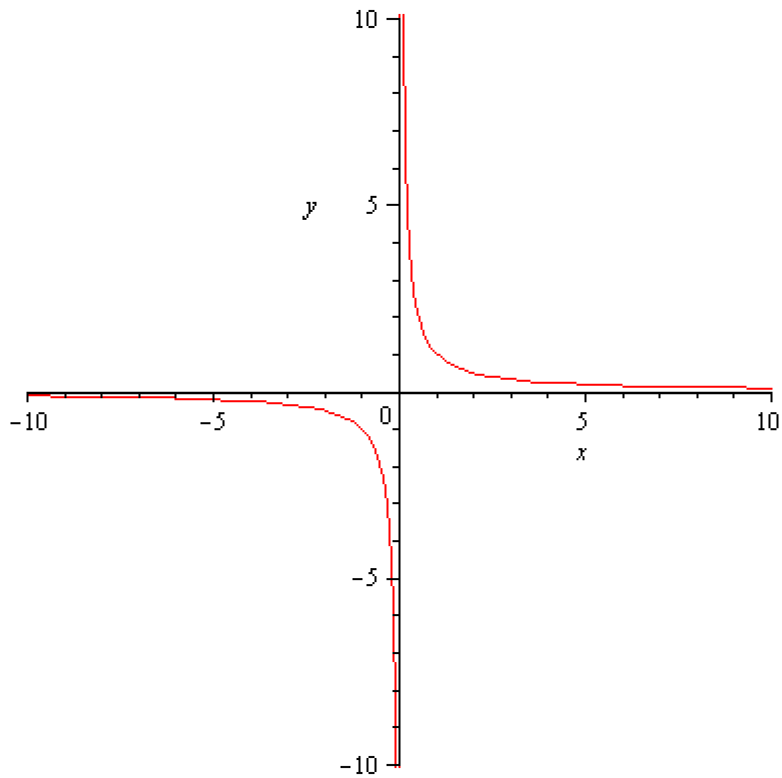


Figura 2.48 $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Poziții posibile pentru o curbă şi asimptotele sale verticale:

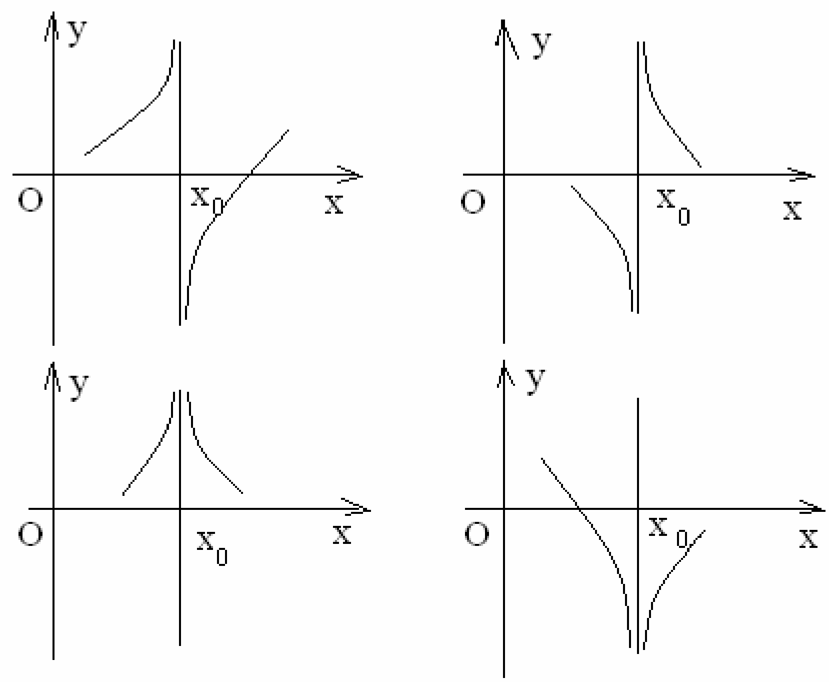


Figura 2.49

Procedeu de determinare al asimptotelor verticale

a) Determinăm punctele de discontinuitate ale funcției $y = f(x)$.

b) Selectăm acele discontinuități în care cel puțin una dintre limitele laterale ale funcției $y = f(x)$ este $\pm\infty$. Fie acestea x_1, x_2, $\dots$, x_m. Atunci dreptele $x = x_1$, $x = x_2$, $\dots$, $x = x_m$ vor fi asimptote verticale la graficul $y = f(x)$.

Exemplu:

$y = \frac{1}{x^2 - 1}$ are asimptotele verticale $x = -1$, $x = +1$.

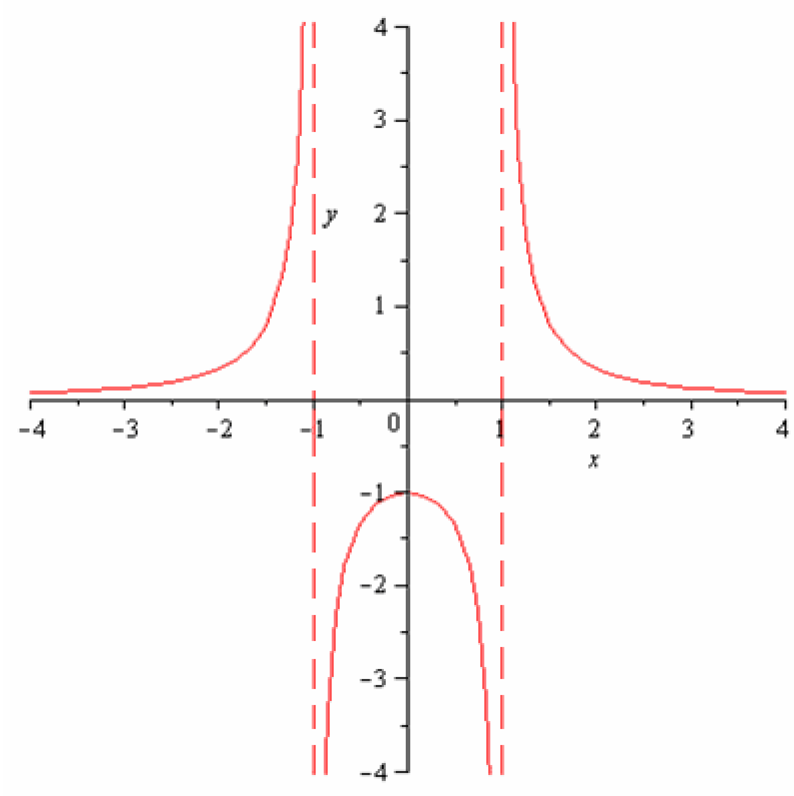


Figura 2.50 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

Observație:

Dacă x_0 este capăt de interval pe care este definită funcția $y=f(x)$, atunci dreapta $x=x_0$ poate fi asimptotă verticală dacă limita laterală corespunzătoare este infinită.

Exemplu:

$$y=\ln x, \quad \forall x\in(0,+\infty)$$

$$\lim_{x\to 0, x>0}\ln x=-\infty, \ \Rightarrow \ x=0 \text{ (axa } Oy\text{) este asimptotă verticală.}$$

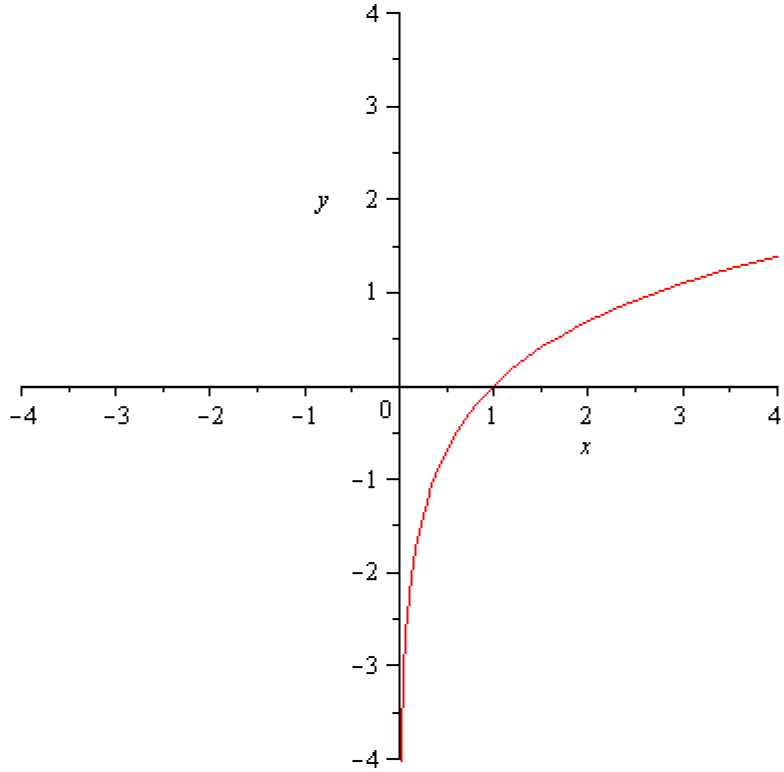


Figura 2.51 $f(x) = \ln x$

Asimptote oblice

Presupunem dreapta $y = ax + b$ asimptotă oblică la graficul funcției $y = f(x)$. Prin definiție, distanța δ de la punctul $M(x, f(x))$ de pe curba $y = f(x)$, la dreapta $y = ax + b$ tinde la zero pentru $x \to +\infty$. Fie $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ unghiul dintre asimptotă şi abscisă.

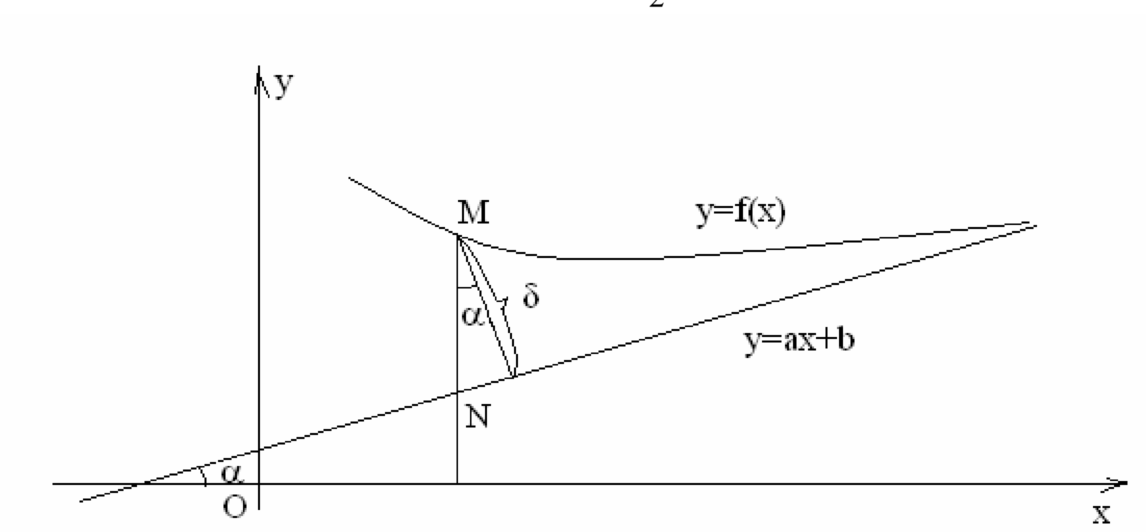


Figura 2.52

$$\delta = |MN| \cos\alpha$$

Deoarece $\cos\alpha \neq 0$, atunci $|MN| \to 0$, $\delta \to 0$ pentru $x \to +\infty$

$$|MN| = |f(x) - ax - b|$$

Adică, dreapta $y = ax + b$ este asimptotă oblică la graficul funcției $y = f(x)$ dacă şi numai dacă

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - ax - b \right) = 0$$

Cu teorema 1 de la operații cu limite $f(x) - ax - b$ admite o reprezentare de forma:

$$f(x) - ax - b = 0 + \alpha(x), \qquad \lim_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0$$

$$f(x) = ax + b + \alpha(x), \qquad \lim_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0$$

Observație: Dacă există o asimptotă $y = ax + b$ la curba $y = f(x)$ pentru $x \to +\infty$, atunci funcția $y = f(x)$ este *aproape* o funcție liniară pentru $x \to +\infty$, adică $y = f(x)$ diferă de $y = ax + b$ printr-un infinitezimal pentru $x \to +\infty$.

Teorema 1: Pentru ca graficul funcției $y = f(x)$ să aibă asimptotă oblică $y = ax + b$ pentru $x \to +\infty$ este necesar şi suficient ca să existe limitele:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \qquad \text{şi} \qquad \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - ax \right] = b$$

Exemplu:

$$y = \frac{x^2}{x-1}, \quad x \neq 1$$

$x = 1$ asimptotă verticală

$$y = f(x) = \frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2 - 1 + 1}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}$$

$\dfrac{1}{x-1} \to 0$ pentru $x \to \infty$

Astfel, $f(x) = x + 1 + \alpha(x)$ unde $\alpha(x) = \dfrac{1}{x-1}$ este infinitezimal pentru $x \to \infty$

Şi, graficul funcției $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ are asimptota oblică $y = x + 1$.

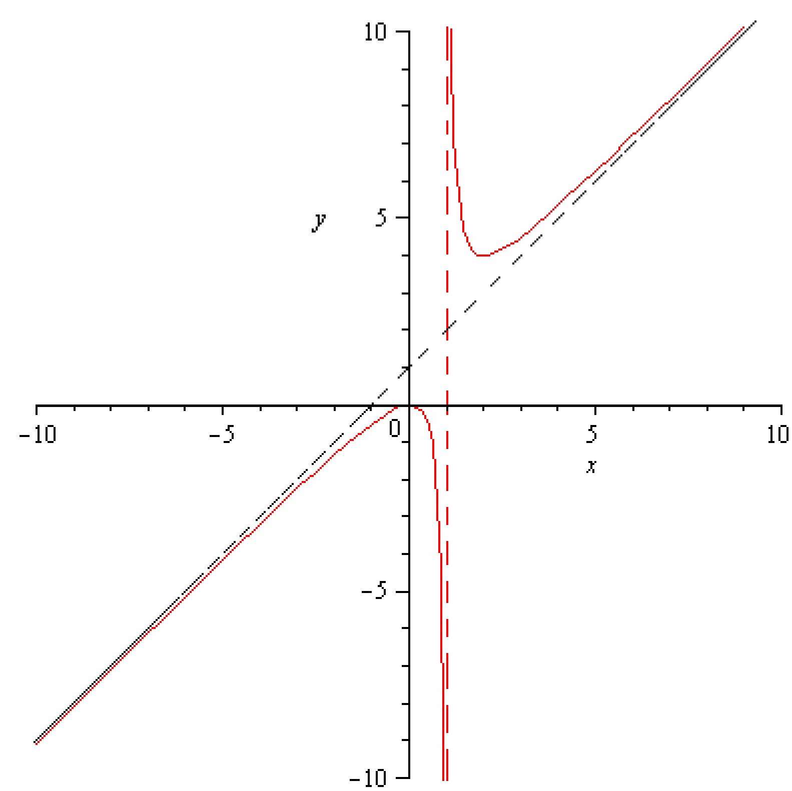


Figura 2.53 $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

Asimptote orizontale

Dacă funcția $y = f(x)$ are limita finită $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$, atunci dreapta $y = b$ este asimptotă orizontală la graficul funcției.

Observație: Asimptota orizontală este caz particular de asimptotă oblică cu $a = 0$.

Exemple:

1) $y = \dfrac{1}{x}$ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ atunci $y = 0$ este asimptotă orizontală (figura 2.54)

2) $y = arctg\ x$ (figura 2.55)

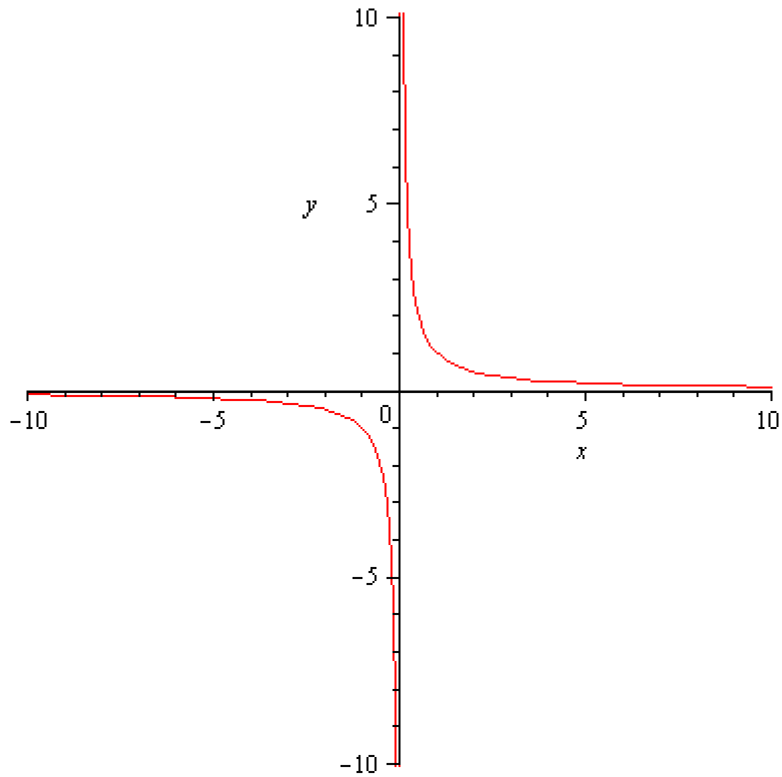


Figura 2.54 $f(x) = 1/x$

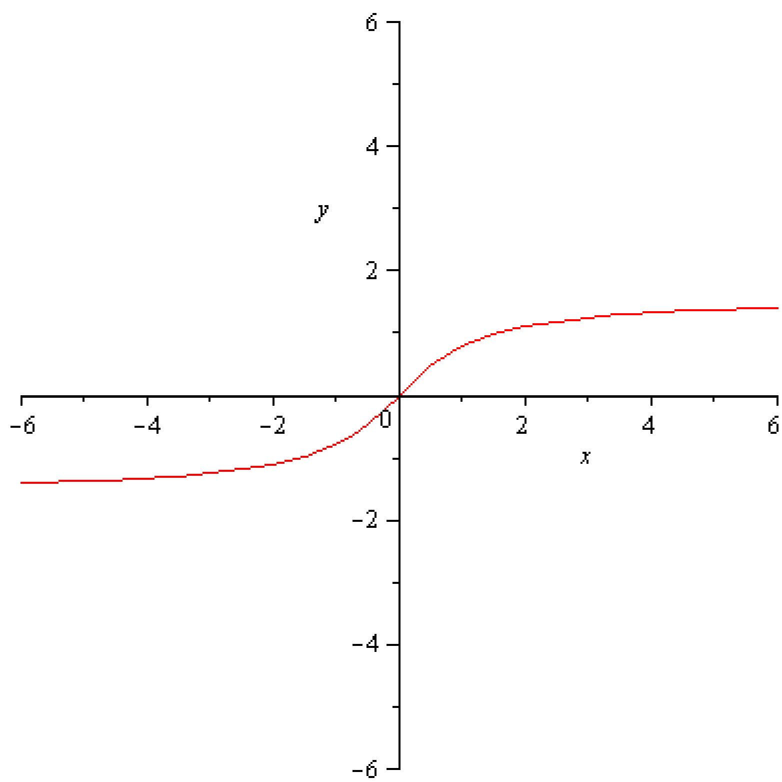


Figura 2.55 $f(x) = arctg\ x$

$$\lim_{x\to+\infty} arctg\ x = \frac{\pi}{2} \quad \text{atunci} \quad y = \frac{\pi}{2} \quad \text{este asimptotă orizontală la ramura dreaptă}$$

$$\lim_{x\to-\infty} arctg\ x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{atunci} \quad y = -\frac{\pi}{2} \quad \text{este asimptotă orizontală la ramura stângă}$$

3) $y = \dfrac{\sin x}{x}, \quad y(0) = 1$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \quad \text{atunci} \quad y = 0 \quad \text{este asimptotă orizontală}$$

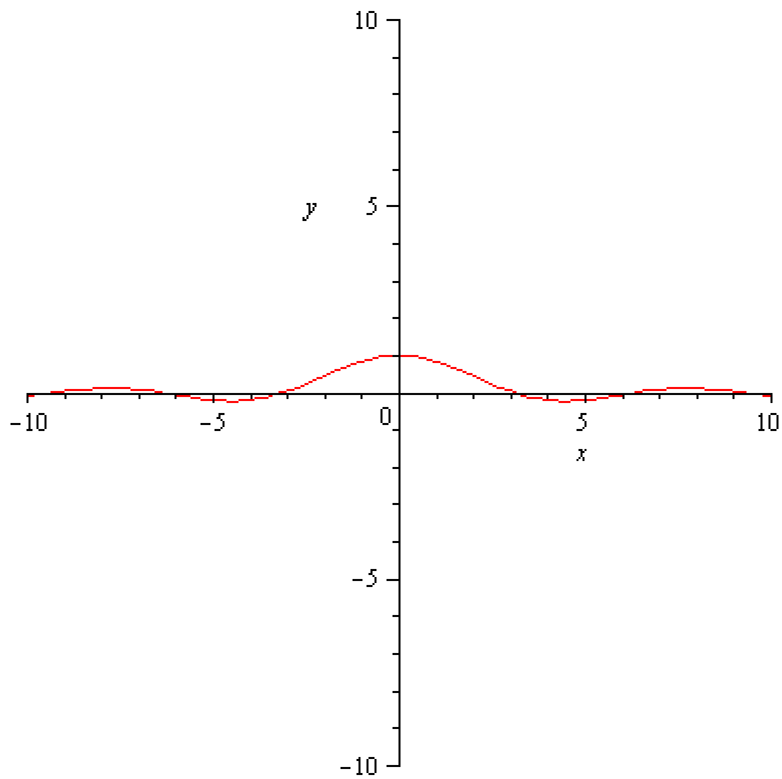


Figura 2.56 $f(x)\dfrac{\sin x}{x}$

Observație: graficul funcției intersectează asimptota.

2.19 Graficul unei funcții

a) Stabilim domeniul de definiție
b) Stabilim punctele de discontinuitate şi speța acestora. Determinăm asimptotele verticale.
c) Determinăm simetria funcției, adică paritatea şi periodicitatea acesteia.
d) Stabilim punctele de intersecție ale graficului funcției cu axele de coordonate.
e) Analizăm comportarea funcției la infinit. Stabilim asimptotele orizontale şi oblice.
f) Stabilim monotonia funcției şi punctele sale de extrem.
g) Stabilim intervalele de convexitate şi punctele de inflexiune.

Exemple:

1) $y=\dfrac{1}{1+x^2}$

a) domeniul de definiție este $\mathbb{R}$.
b) nu are puncte de discontinuitate şi nici asimptote verticale.
c) funcția este pară deoarece $f(-x)=f(x)$, deci are grafic simetric față de axa *Oy*.
d) $f(0)=1 \Rightarrow$ punctul $(0,1)$ este intersecția cu ordonata.
e) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{1+x^2}=0 \Rightarrow$ dreapta $y=0$ este asimptotă orizontală.
   Nu are asimptote oblice.

f) $y'=-\dfrac{1}{\left(1+x^2\right)^2}\cdot 2x$

$y'>0$ pentru $x<0$ strict crescătoare pe $(-\infty,0)$

$y'<0$ pentru $x>0$ strict descrescătoare pe $(0,+\infty)$

$x=0$ este punct critic, deoarece este soluție a ecuației $y'=0$
$f'(x)$ schimbă semnul de la pozitiv la negativ când trece prin $x=0$ de la stânga la dreapta deci $x=0$ este punct de maxim.

g) $y''=-2\cdot\dfrac{1-3x^2}{\left(1+x^2\right)^3}$

$y''(x)=0$ are soluțiile $x_1=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ şi $x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$y''<0$ pentru $x\in\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ concavă

$y''>0$ pentru $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty\right)$ convexă

$x_1=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ şi $x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$ puncte de inflexiune

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$	+ + + + +	+ + + +	+ + + +	+ + + +	0	− − − −	− − − −	− − − −	
$f''(x)$	+ + + + +	+ + + +	0	− − − −	2	− − − −	0	+ + + +	
$f(x)$		$\nearrow \cup$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow \cap$	1	$\searrow \cap$	$\frac{3}{4}$	$\searrow \cup$	

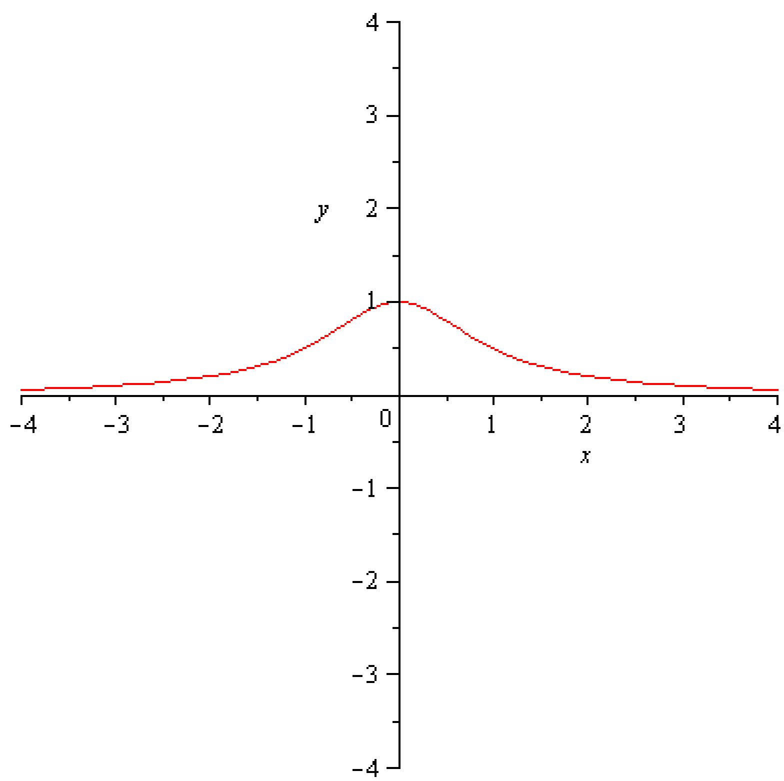


Figura 2.57 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$

La următoarele exemple vă invităm să parcurgeți algoritmul şi vă prezentăm doar graficele, drept mijloc de verificare. 2) $y=x^2+\frac{1}{x}$ 3) $y=x+\frac{1}{x^2}$

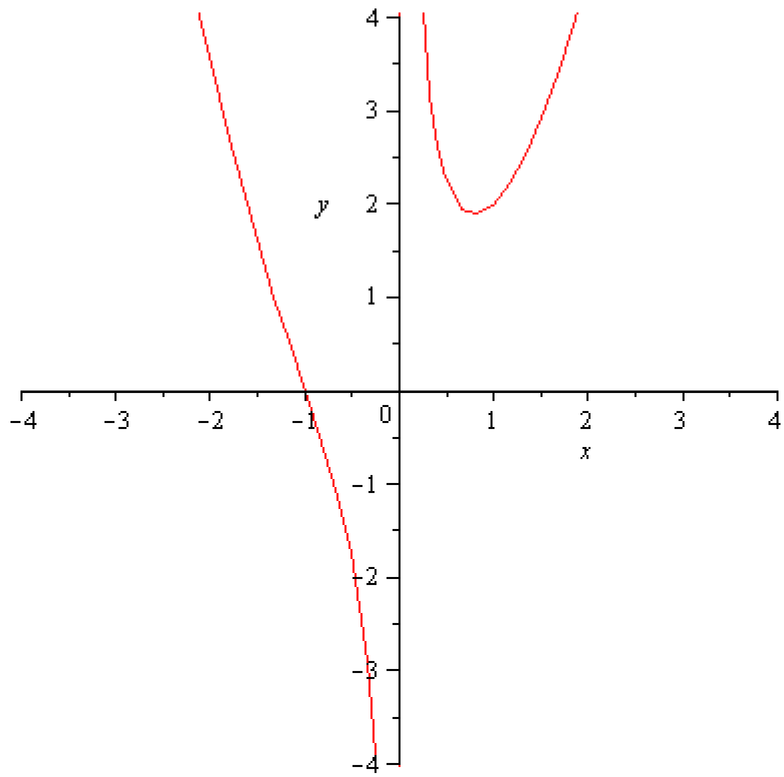


Figura 2.58 $f(x)=x^2+1/x$

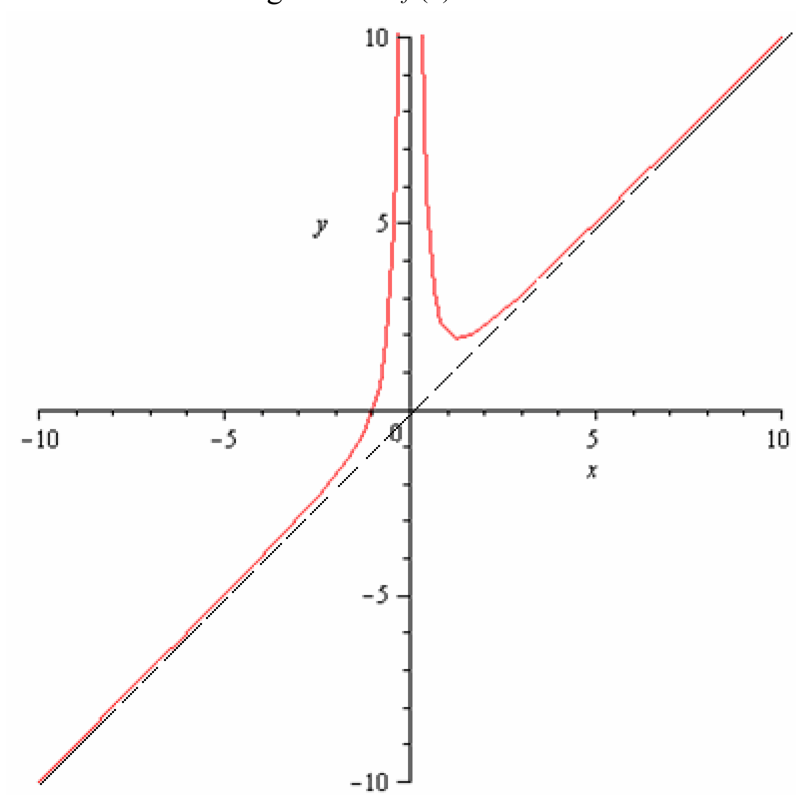


Figura 2.59 $f(x)=x+1/x^2$

2.20 Teorema Taylor

Formula Taylor pentru polinoame

Fie polinomul de gradul n

$$P(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n, \qquad b_n\neq 0$$

unde $b_0, b_1, b_2 \ldots b_n$ sunt coeficienți constanți.

Polinomul $P(x)$ poate fi exprimat ca o dezvoltare după puterile lui $x-a$, cu alți coeficienți, unde a este un număr arbitrar.

Intr-adevăr, considerăm $x=a+t$ şi

$$P(x)=P(a+t)=b_0+b_1(a+t)+\ldots+b_n(a+t)^n$$

Dacă dezvoltăm parantezele şi adunăm termenii cu puteri egale în t, putem scrie

$$P(a+t)=A_0+A_1t+A_2t^2+\ldots+A_nt^n$$

Substituind $t=x-a$ revenim la variabila x:

$$P(x)=A_0+A_1(x-a)+A_2(x-a)^2+\ldots+A_n(x-a)^n$$

unde $A_0, A_1, \ldots, A_n$ sunt coeficienți dependenți de coeficienții inițiali $b_0, b_1, b_2 \ldots b_n$.

Pentru a determina coeficienții $A_0, A_1, \ldots, A_n$ derivăm $P(x)$ de n ori:

$$P'(x)=A_1+2A_2(x-a)+3A_3(x-a)^2+\ldots+nA_n(x-a)^{n-1}$$

$$P''(x)=2\cdot 1A_2+3\cdot 2A_3(x-a)+\ldots+n(n-1)A_n(x-a)^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$P^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1A_n$$

Considerăm $x = a$ în $P(x)$ şi în derivatele sale.

$$P(a) = A_0$$

$$P'(a) = 1!\,A_1$$

$$P''(a) = 2!\,A_2$$

$$\vdots$$

$$P^{(n)}(a) = n!\,A_n$$

$$\Rightarrow \quad A_0 = P(a), \quad A_1 = \frac{P'(a)}{1!}, \quad A_2 = \frac{P''(a)}{2!} \quad \dots \quad A_n = \frac{P^{(n)}(a)}{n!}$$

$$P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Această dezvoltare a polinomului $P(x)$ se numeşte *formula lui Taylor* în puterile lui $x - a$, pentru polinomul dat $P(x)$ de gradul *n* sau formula lui Taylor pentru $P(x)$ în punctul *a*.

Dacă considerăm $a = 0$ obținem un caz particular de formulă Taylor

$$P(x) = P(0) + \frac{P'(0)}{1!}x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

care se numeşte *formula lui Maclaurin*.

Exemplu:

Dezvoltați polinomul $P(x) = x^2 - 3x + 2$ după puterile lui *x* şi după puterile lui $x - 1$.

Aplicăm formula Maclaurin

$$P(x) = x^2 - 3x + 2 \quad \Rightarrow \quad P(0) = 2$$

$$P'(x) = 2x - 3 \quad \Rightarrow \quad P'(0) = -3$$

$$P''(x) = 2 \quad \Rightarrow \quad P''(0) = 2$$

$$P(x) = 2 - \frac{3}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2$$

In concluzie, dezvoltarea polinomului după puterile lui x este identică cu polinomul.

Aplicăm formula Taylor

$$P(1)=0$$
$$P'(1)=-1$$
$$P''(1)=2$$

$$P(x)=0-\frac{1}{1!}(x-1)+\frac{2}{2!}(x-1)^2=-(x-1)+(x-1)^2$$

Formula lui Taylor pentru funcții arbitrare

Considerăm o funcție $f(x)$ definită pe o vecinătate a punctului $x=a$. Funcția poate să nu fie un polinom de gradul $n-1$, dar se presupune că are derivate până la ordinul n pe această vecinătate.

Calculăm valorile $f(a), f'(a), \ldots, f^{(n-1)}(a)$ şi le utilizăm la construcția funcției:

$$Q_{n-1}(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

$Q_{n-1}(x)$ este polinomul Taylor de ordinul $n-1$ pentru funcția $f(x)$.

Observație: Dacă funcția inițială $f(x)$ este polinom de gradul $n-1$, atunci are loc identitatea $f(x)\equiv Q_{n-1}(x)$ pentru orice x din vecinătatea din definiție.

Cum, în general, $f(x)$ nu este polinom de gradul $n-1$, considerăm:

$$f(x)=Q_{n-1}(x)+R_n(x)$$

Această egalitate se numeşte *formula lui Taylor pentru* $f(x)$ *în vecinătatea punctului* $x=a$ sau formula lui Taylor pentru $f(x)$ în punctul $x=a$, iar $R_n(x)$ se numeşte *restul de ordinul n al seriei Taylor.*

Restul $R_n(x)$ poate fi exprimat funcție de derivata de ordinul n a funcției $f(x)$.

Intr-adevăr, presupunem că $f(x)$ nu este un polinom de gradul $n-1$ şi presupunem că are derivate continue până la ordinul $n-1$ pe $[a,b]$ şi că există derivata de ordinul n a lui $f(x)$ pe (a,b).

Considerăm $x=b$ în formula lui Taylor pentru $f(x)$ în punctul $x=a$:

$$f(b)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}+R_n$$

Considerăm

$$R_n=M(b-a)^n$$

unde M este o cantitate care trebuie definită. Pentru aceasta considerăm o funcție auxiliară definită pe $[a,b]$ prin formula:

$$\varphi(x)=f(b)-\left[f(x)+\frac{f'(x)}{1!}(b-x)+\frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}+M(b-x)^n\right]$$

Funcția $\varphi(x)$ satisface condițiile din teorema Rolle:

a) este continuă pe $[a,b]$ deoarece funcția inițială $f(x)$ şi toate derivatele sale până la ordinul $n-1$ sunt continue pe $[a,b]$.
b) funcția are derivată pe (a,b) deoarece funcția inițială $f(x)$ are derivată de ordinul n pe (a,b).
c) funcția ia valori egale la capetele lui $[a,b]$, $\varphi(a)=0$ şi $\varphi(b)=0$.

Cu teorema lui Rolle $\Rightarrow$ $\exists\xi\in(a,b)$ astfel încât $\varphi'(\xi)=0$.

$$\varphi'(x)=-\left[f'(x)-\frac{f'(x)}{1!}+\frac{f''(x)}{1!}(b-x)-\frac{f''(x)}{2!}2(b-x)+\frac{f'''(x)}{2!}(b-x)^2+\ldots\right.$$
$$\left.-\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(n-1)(b-x)^{n-2}+\frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}-Mn(b-x)^{n-1}\right]$$

$$\varphi'(x) = -\frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} + Mn(b-x)^{n-1}$$

$$\varphi'(\xi) = -(b-\xi)^{n-1}\left[\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!} - Mn\right] = 0$$

Deoarece $\xi \neq b$ ($\xi \in (a,b)$)

$$\Rightarrow \qquad M = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

$$R_n = M(b-a)^n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n, \qquad \xi \in (a,b)$$

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n$$

Aceasta este formula Taylor pentru $f(x)$ şi

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n, \quad \xi \in (a,b)$$

este restul de ordinul *n* în forma Lagrange.

Caz particular: $n = 1$

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(\xi)}{1!}(b-a)$$

Sau

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a) \qquad \text{formula lui Lagrange}$$

Formula Taylor rămâne validă pentru orice puncte x_0 şi x din $[a,b]$ astfel încât putem scrie formula lui Taylor în forma:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + R_n(x)$$

unde

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n\,,\quad \text{unde } \xi\in(x_0,x)$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(x-x_0)^n\,,\quad 0<\theta<1$$

Considerând $x_0=0 \;\Rightarrow$ formula Maclaurin

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+R_n(x)$$

unde $R_n(x)=\dfrac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$, $0<\theta<1$

Restul în formula Taylor poate fi reprezentat şi în forma Peano. Astfel, am presupus că $f(x)$ are derivată de ordinul *n* pe o vecinătate a lui x_0. Acum presupunem şi că această derivată este continuă în x_0.
Atunci:

$$f^{(n)}\left(x_0+\theta\left(x-x_0\right)\right)=f^{(n)}\left(x_0\right)+\alpha\left(x\right),\qquad \alpha(x)\to 0\,,\; x\to x_0$$

Restul

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(x-x_0)^n$$

se poate scrie

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(x_0)+\alpha(x)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{\alpha(x)(x-x_0)^n}{n!}\,,\quad \alpha(x)\to 0\,,\; x\to x_0$$

Obs: $\quad \dfrac{\alpha(x)(x-x_0)^n}{n!}=o\left((x-x_0)^n\right),\; x\to x_0$

adică $\alpha(x)(x-x_0)^n/n!$ este infinitezimal relativ la $(x-x_0)^n$ sau este un infinitezimal de ordin mai mare decât $(x-x_0)^n$ pentru $x\to x_0$.

Formula Taylor devine:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right),\ x \to x_0$$

şi se numeşte formulă Taylor cu restul în formă Peano.

Observație: Eroarea de aproximație a lui $f(x)$ cu formula lui Taylor este un infinitezimal de ordin mai mare decât $(x-x_0)^n$ pentru $x \to x_0$. Această formulă este potrivită atunci când vrem să aproximăm $f(x)$ în puncte suficient de apropiate de x_0. Din acest motiv se numeşte formula Taylor locală.

În rezumat,

Fie funcția $f(x)$ cu derivate continue până la ordinul n pe intervalul (a,b) şi fie $x, x_0 \in (a,b)$ atunci are loc:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + R_n(x)$$

unde

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n, \quad \text{unde } \xi \in (x_0, x)$$

$$\xi = x_0 + \theta(x-x_0), \quad \theta \in (0,1)$$

Caz particular:

$x_0 = 0 \Rightarrow$ formula Maclaurin

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n(x)$$

unde $R_n(x) = \dfrac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$, $0 < \theta < 1$

Formula Maclaurin pentru câteva funcții elementare

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n, \quad 0<\theta<1$$

Formula Maclaurin o utilizăm la aproximarea unor funcții elementare în apropierea originii.

1) $f(x)=e^x$ $\qquad f(x)=e^x \qquad f(0)=1$

$$f'(x)=e^x \qquad f'(0)=1$$

$$\vdots$$

$$f^{(n-1)}(x)=e^x \qquad f^{(n-1)}(0)=1$$

$$f^{(n)}(x)=e^x \qquad f^{(n)}(\theta x)=e^{\theta x}$$

Cu formula Maclaurin obținem:

$$e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{e^{\theta x}}{n!}x^n, \quad 0<\theta<1$$

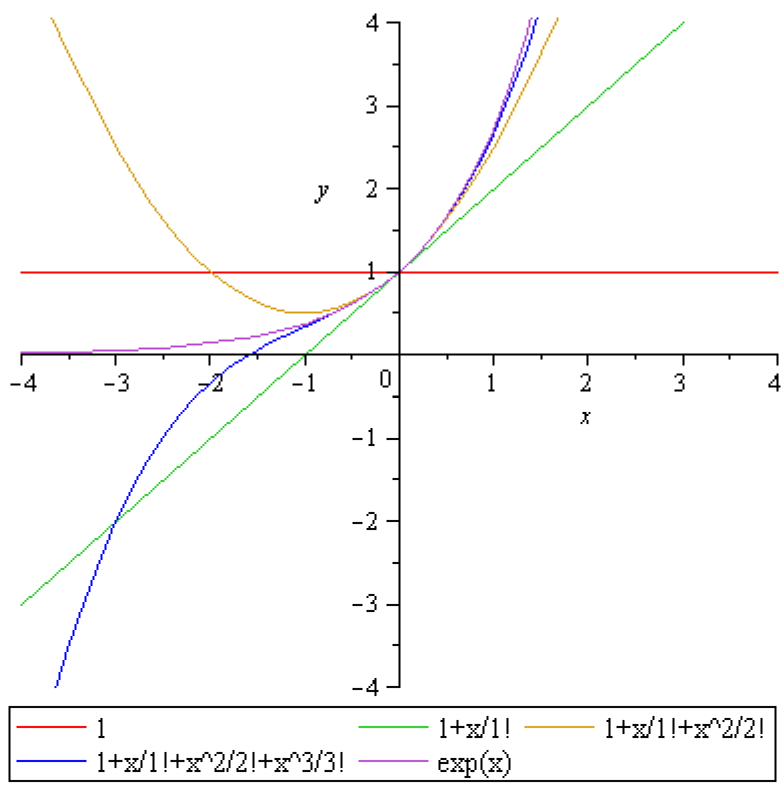


Figura 2.60 $f(x)=\exp(x)$ şi diverse aproximații

Considerăm $x=1$

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}+\frac{e^{\theta}}{n!},\quad 0<\theta<1$$

Cum $\quad 0<\frac{e^{\theta}}{n!}<\frac{3}{n!}$

suma $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}$ aproximează numărul e şi aproximația are eroarea mai mică decât $\frac{3}{n!}$.

2) $f(x)=\sin x$

$$\begin{aligned} f(x)&=\sin x & f(0)&=0\\ f'(x)&=\cos x & f'(0)&=1\\ f''(x)&=-\sin x & f''(0)&=0\\ f'''(x)&=-\cos x & f'''(0)&=-1 \end{aligned}$$

In general,

$$f^{(m)}(x)=\sin\left(x+m\frac{\pi}{2}\right) \qquad f^{(m)}(0)=\sin m\frac{\pi}{2}=\begin{cases} 0, m=2k\\ (-1)^k, m=2k+1\end{cases}$$

$$f^{(n)}(\theta x)=\sin\left(\theta x+n\frac{\pi}{2}\right)$$

Observație: termenii cu puteri pare în x se anulează.

Aplicăm formula Maclaurin şi considerăm $n=2k+1$

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+R_{2k+1}(x)$$

$$R_{2k+1}(x)=\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\sin\left(\theta x+(2k+1)\frac{\pi}{2}\right),\quad 0<\theta<1$$

Observație:

$$\left|R_{2k+1}(x)\right|\le\frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

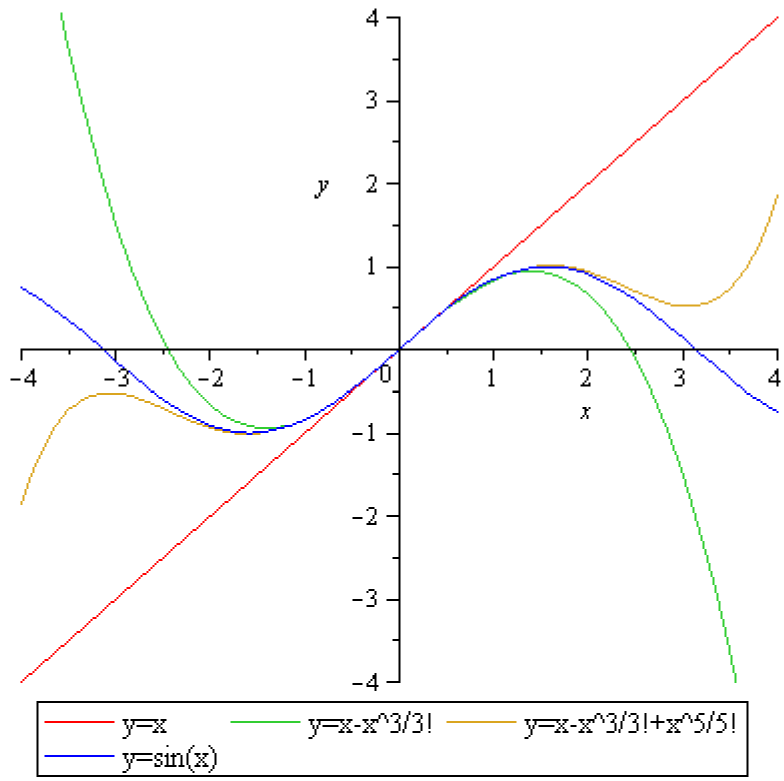


Figura 2.61 $f(x)=\sin x$ şi aproximaţiile acesteia

3) $f(x)=\cos x$

$$f(x)=\cos x \qquad\qquad f(0)=1$$

$$f'(x)=-\sin x \qquad\qquad f'(0)=0$$

$$f''(x)=-\cos x \qquad\qquad f''(0)=-1$$

In general

$$f^{(m)}(x)=\cos\left(x+m\frac{\pi}{2}\right) \qquad\qquad f^{(m)}(0)=\cos m\frac{\pi}{2}=\begin{cases}0, m=2k+1\\(-1)^k, m=2k\end{cases}$$

$$f^{(n)}(\theta x)=\cos\left(\theta x+n\frac{\pi}{2}\right)$$

Aplicăm formula Maclaurin şi considerăm $n=2k+2$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+R_{2k+2}(x)$$

$$R_{2k+2}(x)=\frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}\cos\left(\theta x+(2k+2)\frac{\pi}{2}\right), \qquad 0<\theta<1$$

Observație:

$$\left|R_{2k+2}(x)\right| \le \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}$$

Formulele Maclaurin pentru $\sin x$ și $\cos x$ sunt utile când vrem să aproximăm aceste funcții cu erori predefinite. Aproximațiile Taylor pentru $\sin x$ și $\cos x$ pe o vecinătate a lui $x = 0$ sunt prezentate în graficele următoare.

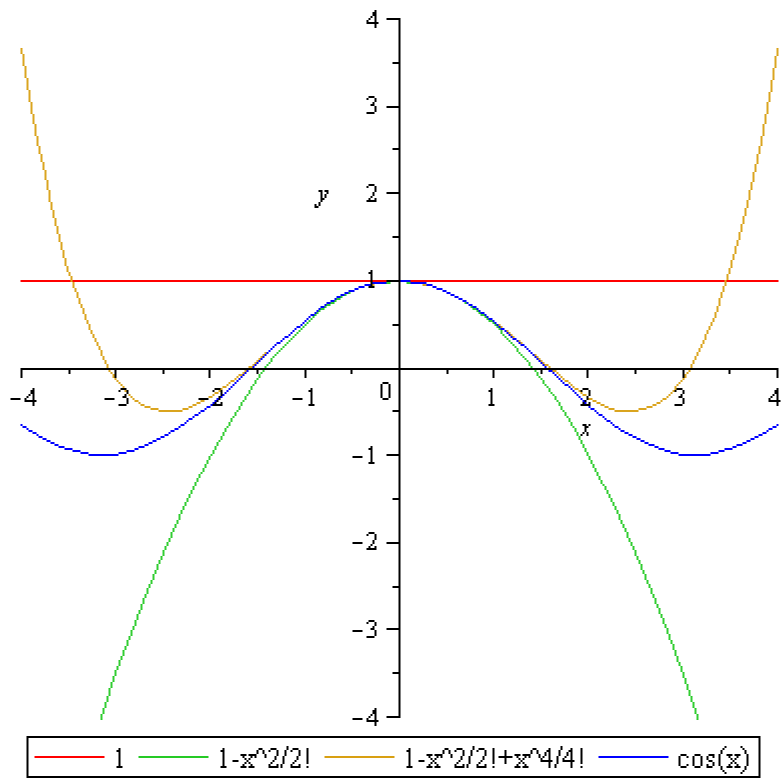


Figura 2.62 $f(x) = \cos x$ și aproximațiile acesteia

4) $f(x) = \ln(1+x)$

Definită și infinit diferențiabilă pe $(-1, +\infty)$.

$$f(x) = \ln(1+x) \qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \qquad f''(0) = -1$$

$$f'''(x)=\frac{1\cdot 2}{(1+x)^3} \qquad f'''(0)=2!$$
$$\vdots$$
$$f^{(n-1)}(x)=(-1)^n\frac{(n-2)!}{(1+x)^{n-1}} \qquad f^{(n-1)}(0)=(-1)^n(n-2)!$$
$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \qquad f^{(n)}(\theta x)=(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+\theta x)^n}$$

Aplicăm formula Maclaurin

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{n-1}}{n-1}+R_n(x)$$
$$R_n(x)=(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n(1+\theta x)^n}, \qquad 0<\theta<1$$

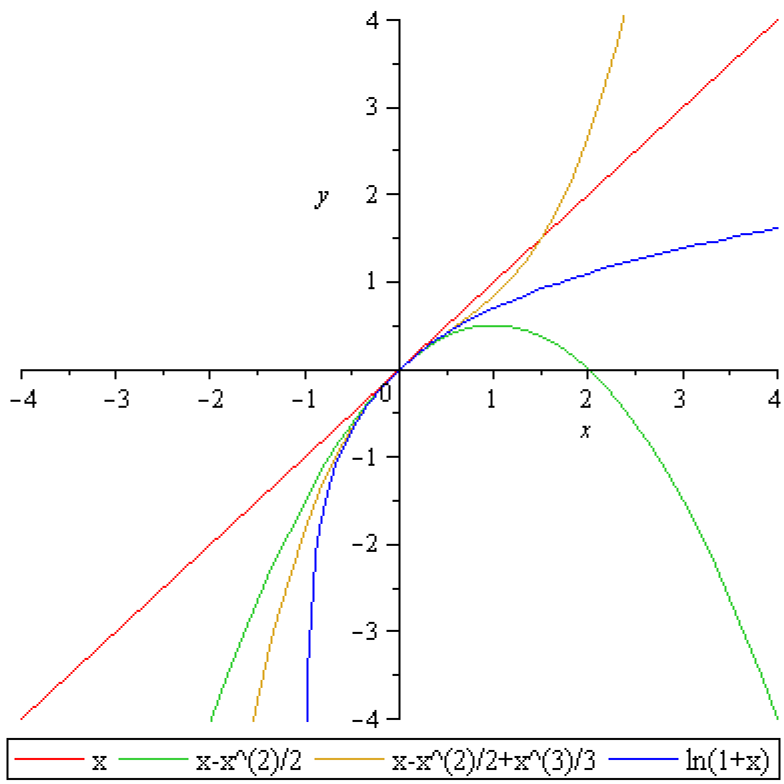


Figura 2.63 $f(x)=\ln(1+x)$

Investigarea funcțiilor pentru extreme Formula Taylor este utilă pentru a determina extremele unei funcții.

Teorema 1: Fie $f(x)$ o funcție care are derivată de ordinul *n* pe o vecinătate a punctului x_0. Fie $f^{(n)}(x)$ continuă în x_0 şi fie $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ şi $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Atunci:

(i) Dacă *n* este impar, funcția nu are extrem în x_0.

(ii) Dacă *n* este par şi $f^{(n)}(x_0) < 0$ atunci funcția are un maxim în x_0.

(iii) Dacă *n* este par şi $f^{(n)}(x_0) > 0$ atunci funcția are un minim în x_0.

Exemplu: Investigați funcțiile $y = x^4$ şi $y = x^3$ pentru extrem.

$x = 0$ este punct critic pentru aceste funcții.

$y = x^4 \quad y' = 4x^3 \quad y'' = 12x^2 \quad y''' = 24x \quad y^{(4)} = 24$

$f(0) = 0 \quad f'(0) = 0 \quad f''(0) = 0 \quad f'''(0) = 0 \quad f^{(4)}(0) = 24$

$n = 4$ par şi $f^{(4)}(0) > 0 \;\Rightarrow\; x = 0$ punct de minim pentru funcție.

$y = x^3 \quad y' = 3x^2 \quad y'' = 6x \quad y''' = 6$

$f(0) = 0 \quad f'(0) = 0 \quad f''(0) = 0 \quad f'''(0) = 6$

$n = 3$ impar $\Rightarrow$ $x = 0$ nu este punct de extrem pentru funcție.

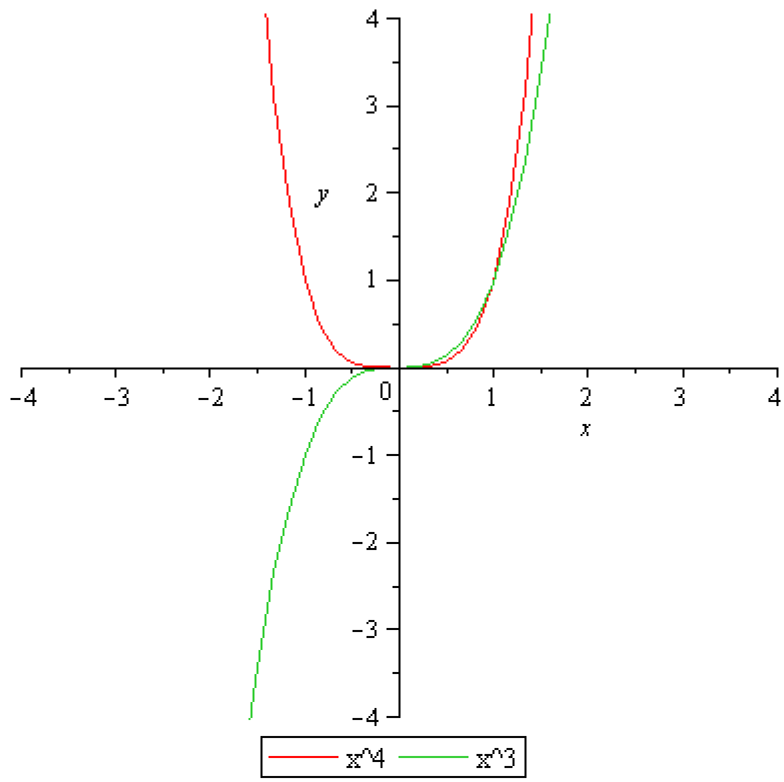


Figura 2.64

Teorema 2: Fie $f(x)$ o funcție care are derivată de ordinul *n* pe o vecinătate a punctului x_0 şi fie $f^{(n)}(x)$ continuă în x_0. Mai mult, fie $f''(x_0) = f'''(x_0) \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ şi $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Atunci punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ este punct de inflexiune pentru graficul $y = f(x)$ dacă *n* este impar.

Exemplu: $f(x) = x^3$

$y = x^3 \quad y' = 3x^2 \quad y'' = 6x \quad y''' = 6$

$n = 3$ impar $\Rightarrow$ $x = 0$ este punct de inflexiune pentru funcție.