2.13 Teoremele de medie: Rolle, Lagrange, Cauchy

Teorema 1 (Rolle):

Dacă o funcție $f(x)$

1. este continuă pe intervalul închis $[a,b]$
2. este derivabilă pe intervalul deschis (a,b)
3. ia valori egale la capetele intervalului, adică $f(a)=f(b)$

atunci există cel puțin un punct $\xi \in (a,b)$ astfel încât $f'(\xi)=0$

Interpretare geometrică: între *a* şi *b* există cel puțin un punct ξ în care tangenta la curba $y=f(x)$ este paralelă cu axa *x*.

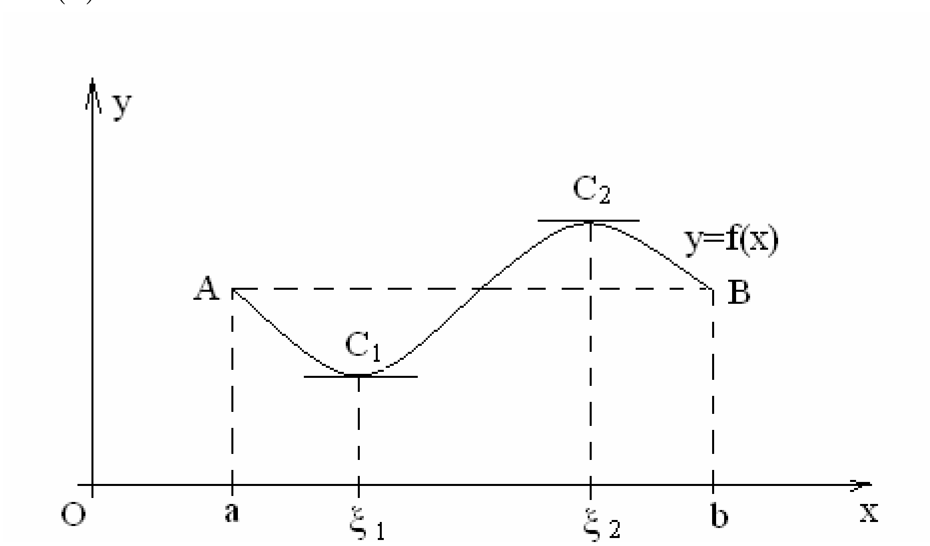


Figura 2.21

Exemple: (subliniază importanța ipotezelor teoremei)

1) $f(x)=|x|,\ \ x\in[-1,+1]$

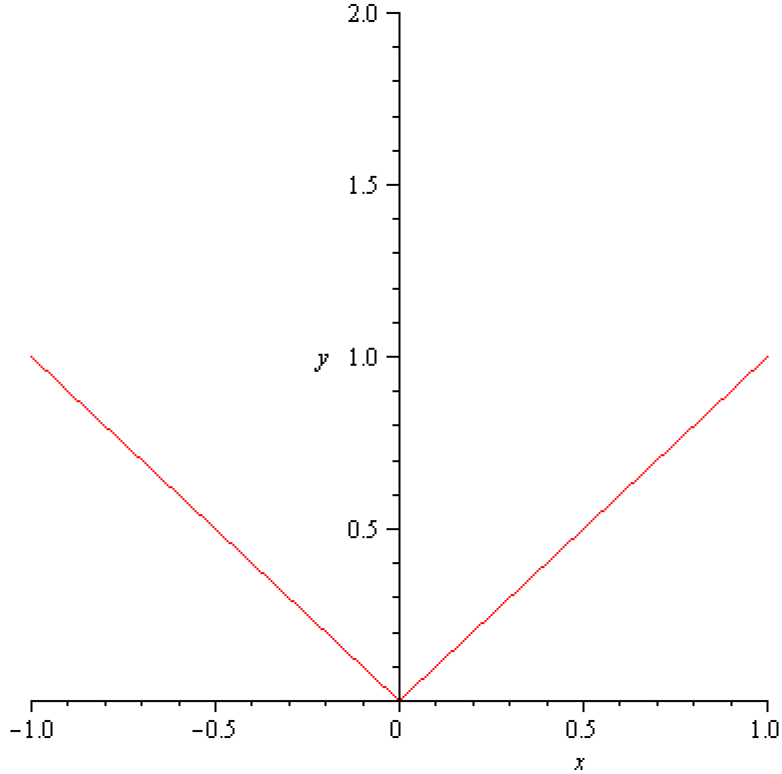


Figura 2.22 $f(x)=|x|$

Pentru această funcție, nu este îndeplinită ipoteza 2 a teoremei, deoarece funcția nu este derivabilă în $x=0$. Teorema lui Rolle nu este aplicabilă, deci în intervalul $(-1,+1)$ nu există nici un punct în care $f'(x)=0$.

2) $f(x)=x-[x],\ \ x\in[0,1]$

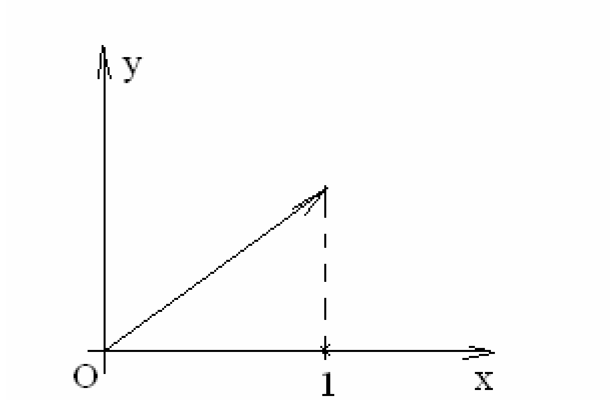


Figura 2.23 $f(x)=x-[x]$

Pentru această funcție, nu este îndeplinită ipoteza 1 a teoremei, deoarece funcția nu este continuă în $x=1$. Teorema lui Rolle nu este aplicabilă, deci în intervalul $(0,1)$ nu există nici un punct în care $f'(x)=0$.

Teorema 2 (Lagrange sau a creşterilor finite):

Dacă o funcție $f(x)$

1. este continuă pe intervalul închis $[a,b]$
2. este derivabilă pe intervalul deschis (a,b)

atunci există cel puțin un punct $\xi \in (a,b)$ astfel încât

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi), \quad \xi \in (a,b)$$

Observație: Teorema Rolle este un caz particular al teoremei Lagrange şi se obține impunând $f(a)=f(b)$.

Interpretare geometrică: între a şi b există cel puțin un punct ξ în care tangenta la curba $y=f(x)$ este paralelă cu coarda *AB*, unde $A(a,f(a))$ şi $B(b,f(b))$.

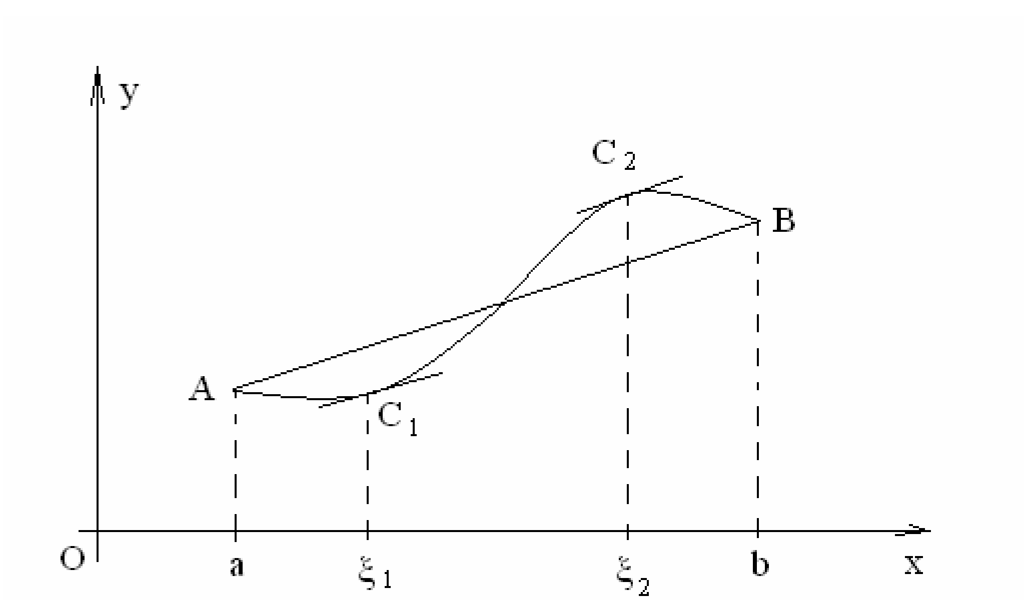


Figura 2.24

În formula

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi), \quad \xi\in(a,b)$$

sau

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a), \quad \xi\in(a,b)$$

numărul necunoscut ξ poate fi reprezentat în forma

$$\xi=a+\theta(b-a), \;\; \theta\in(0,1)$$

$$f(b)-f(a)=f'\big(a+\theta(b-a)\big)(b-a), \quad \theta\in(0,1)$$

Înlocuind *a* şi *b* cu *x* şi $x+\Delta x$ respectiv, obținem

$$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x\,, \quad \theta\in(0,1)$$

Această expresie reprezintă o relație *exactă* între creşterea argumentului şi creşterea funcției, în timp ce

$$\Delta f(x)\approx f'(x)\Delta x$$

este o relație *aproximativă*, a cărei eroare relativă tinde la zero pentru $\Delta x\to 0$. În relație exactă însă numărul θ este în general necunoscut.

Exemplu:

Cu ajutorul teoremei Lagrange arătați că:

$$\left|arctg\ x_2-arctg\ x_1\right|\le\left|x_2-x_1\right|, \;\; \forall x_1,x_2\in\mathbb{R}$$

Considerăm funcția $f(x)=arctg\ x$. Aceasta verifică ipotezele din teorema Lagrange pe orice interval $[x_1,x_2]\in\mathbb{R}$.

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1), \quad \xi\in(x_1,x_2)$$

$$arctg\ x_2-arctg\ x_1=\frac{1}{1+\xi^2}(x_2-x_1), \quad \xi\in(x_1,x_2)$$

$$\left|arctg\ x_2 - arctg\ x_1\right| = \frac{1}{1+\xi^2}\left|x_2 - x_1\right|$$

Deoarece $\frac{1}{1+\xi^2} \leq 1$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$

$$\left|arctg\ x_2 - arctg\ x_1\right| \leq \left|x_2 - x_1\right|$$

Teorema 3: (Cauchy)

Dacă funcțiile $f(x)$ şi $\varphi(x)$

1. sunt continue pe intervalul închis $[a,b]$
2. sunt derivabile pe intervalul deschis (a,b)
3. $\varphi'(x) \neq 0$ pe (a,b)

atunci există cel puțin un punct $\xi \in (a,b)$ astfel încât

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$$

Observație: Teorema Lagrange este un caz particular al teoremei Cauchy pentru $\varphi(x) = x$.

Remarcă: Teoremele Rolle, Lagrange şi Cauchy afirmă existența unor puncte de mijloc $\xi \in (a,b)$ în care formulele menționate sunt valabile. Din acest motiv, acestea se numesc teoreme de medie.

2.14 Regula L'Hospital

Teorema 1: (Regula L'Hospital pentru nedeterminarea $\frac{0}{0}$)

Fie funcțiile $f(x)$ şi $\varphi(x)$ definite pe o vecinătate $(a-\delta, a+\delta)$ a punctului *a* cu o posibilă excepție în *a*. Dacă au loc:

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0$

2) $f(x)$ şi $\varphi(x)$ sunt derivabile pe $(a-\delta, a+\delta)$ cu o posibilă excepție în a

3) $\varphi'(x) \neq 0$ pe $(a-\delta, a+\delta)$

4) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$

atunci

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$$

Această relație reprezintă regula L'Hospital care permite, în condițiile menționate, înlocuirea limitei unui raport de funcții cu limita raportului derivatelor acestora, limită care uneori este mai uşor de calculat.

Exemplu:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$$

Observații:

1) Dacă condițiile din teoremă sunt satisfăcute pe $(a-\delta, a)$ sau $(a, a+\delta)$, atunci regula L'Hospital este aplicabilă la calculul limitelor laterale.

2) Este posibil ca limita raportului derivatelor să nu existe în timp ce limita raportului funcțiilor respective să existe. De exemplu,

$$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x} \qquad \varphi(x) = x$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x\to 0} \left(2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right) \text{ nu există}$$

3) Uneori regula L'Hospital poate fi aplicată în mod repetat la calcularea limitei $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$. De exemplu, dacă $f(x)$ şi $\varphi(x)$ şi derivatele lor $f'(x)$ şi $\varphi'(x)$ toate satisfac ipotezele teoremei 1, putem aplica regula L'Hospital şi la calcularea limitei $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Exemplu:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^3)'} \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$$

Teorema 2: (Regula L'Hospital pentru nedeterminarea $\frac{\infty}{\infty}$)

Fie funcţiile $f(x)$ şi $\varphi(x)$ definite pe o vecinătate $(a-\delta, a+\delta)$ a punctului a cu o posibilă excepţie în a. Dacă au loc:

1) $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ şi $\lim_{x \to a} \varphi(x) = \infty$
2) $f(x)$ şi $\varphi(x)$ sunt derivabile pe $(a-\delta, a+\delta)$ cu o posibilă excepţie în a
3) $\varphi'(x) \neq 0$ pe $(a-\delta, a+\delta)$
4) $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$

atunci

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$$

Regula L'Hospital se foloseşte şi la calcularea următoarelor nedeterminări:

a) Evaluarea nederminării $0 \cdot \infty$ Fie $F = f \cdot \varphi$ cu $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim_{x \to a} \varphi(x) = \infty$. Dacă calculăm limita $\lim_{x \to a} \left[f(x) \varphi(x) \right]$ avem o nedeterminare de tipul $0 \cdot \infty$ Scriind produsul $F = f \cdot \varphi$ în forma

$$F = \frac{f}{\frac{1}{\varphi}}$$

obținem nedeterminarea $\frac{0}{0}$, iar în forma

$$F = \frac{\varphi}{\frac{1}{f}}$$

obținem cazul de nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$ abordat anterior.

Exemplu:

$$\lim_{x\to 0, x>0}\left(x\ln x\right) = \lim_{x\to 0, x>0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0, x>0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

b) Evaluarea nederminării $\infty-\infty$ Fie $\Phi = f-\varphi$ cu $\lim_{x\to a} f\left(x\right) = \infty$, $\lim_{x\to a}\varphi\left(x\right) = \infty$. Dacă calculăm limita $\lim_{x\to a}\left[f\left(x\right)-\varphi\left(x\right)\right]$ avem o nedeterminare de tipul $\infty-\infty$. Scriind funcția Φ în forma

$$\Phi = f-\varphi = \frac{1}{\frac{1}{f}} - \frac{1}{\frac{1}{\varphi}} = \frac{\frac{1}{\varphi}-\frac{1}{f}}{\frac{1}{f}\cdot\frac{1}{\varphi}}$$

obținem cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$ abordat anterior.

Exemplu:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\frac{x-1}{x}}-\frac{1}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x-\frac{x-1}{x}}{\frac{x-1}{x}\ln x} =$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{\ln x+1-1}{\ln x+(x-1)\frac{1}{x}}=\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{\ln x+1-\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}$$

c) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^{\varphi(x)}$ în situațiile

i) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ $\qquad 0^0$

ii) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$ $\qquad 1^\infty$

iii) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ $\qquad \infty^0$

Pentru a rezolva aceste nedeterminări se recomandă calcularea limitei logaritmului natural din funcția inițială, adică

$$y=f^{\varphi} \quad \text{şi} \quad \lim_{x\to a}\ln y=\lim_{x\to a}\varphi\ln f$$

Această nouă nedeterminare este de tipul discutat la punctul a) adică $0\cdot\infty$. Dacă

$$\lim_{x\to a}\ln y=A \quad \text{atunci} \quad \lim_{x\to a}y=e^A$$

Exemple:

1. $\lim\limits_{x\to0,x>0}x^x \quad , \quad x>0$

$$y=x^x \quad\Rightarrow\quad \ln y=x\ln x$$

$$\lim_{x\to0,x>0}\ln y=\lim_{x\to0,x>0}x\ln x=\lim_{x\to0,x>0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0,x>0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0$$

$$\Rightarrow\quad\lim_{x\to0,x>0}y=e^0=1$$

2. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$y=(1+x)^{\frac{1}{x}} \quad \Rightarrow \quad \ln y = x\ln(1+x)$

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1}=1$$

$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0,x>0} y=e^1=e$

Teorema 3:

Fie funcțiile $f(x)$ şi $\varphi(x)$ definite pentru *x* cu $|x|$ mare. Dacă au loc:

1) $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ şi $\lim_{x\to\infty}\varphi(x)=\infty$ sau $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\varphi(x)=0$

2) $f(x)$ şi $\varphi(x)$ sunt derivabile pentru *x* cu $|x|$ mare

3) $\varphi'(x)\neq 0$

4) $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A$

atunci

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A$$

Exemple:

1) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$

2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\ldots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{e^x}=0$

Se observă că exponențiala creşte mai repede decât funcția putere la infinit.

Observație: Uneori Regula L'Hospital nu poate fi aplicată.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\quad \text{etc.}$$

Dar,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}=1$$

2.15 Monotonia funcțiilor

Definiții

O funcție $f(x)$ definită pe $[a,b]$ este *crescătoare* pe $[a,b]$ dacă $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \le f(x_2)$.

Dacă $x_1 < x_2$ totdeauna implică $f(x_1) < f(x_2)$, atunci $f(x)$ este *strict crescătoare* pe $[a,b]$.

$f(x)$ este *descrescătoare pe* $[a,b]$ dacă $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \ge f(x_2)$.

Dacă $x_1 < x_2$ totdeauna implică $f(x_1) > f(x_2)$, atunci $f(x)$ este *strict descrescătoare* pe $[a,b]$.

O funcție $f(x)$ este *monotonă* pe $[a,b]$ dacă $f(x)$ este numai crescătoare sau strict crescătoare, sau numai descrescătoare sau strict descrescătoare pe $[a,b]$.

Teorema 1: Fie $f(x)$ o funcție continuă pe $[a,b]$ care are derivată $f'(x)$ pe (a,b). Funcția este crescătoare pe $[a,b]$ dacă şi numai dacă $f'(x) \ge 0$, $\forall x \in (a,b)$.

Teorema 2: Fie $f(x)$ o funcție continuă pe $[a,b]$ care are derivată $f'(x)$ pe (a,b). Funcția este descrescătoare pe $[a,b]$ dacă și numai dacă $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in (a,b)$.

Observații:

- Dacă $f'(x)$ nu-și modifică semnul pe un interval, atunci funcția este monotonă pe acel interval.
- Dacă $f'(x) > 0$ pe (a,b) $\Rightarrow$ $f(x)$ este strict crescătoare pe (a,b).
- Dacă $f(x)$ este strict crescătoare pe $[a,b]$, $\not\Rightarrow$ $f'(x) > 0$ pe (a,b).

Exemplu:

$f(x) = x^3$ este strict crescătoare pe $[-1,+1]$. Totuși derivata sa $f'(x) = 3x^2$ este nulă în $x = 0$.

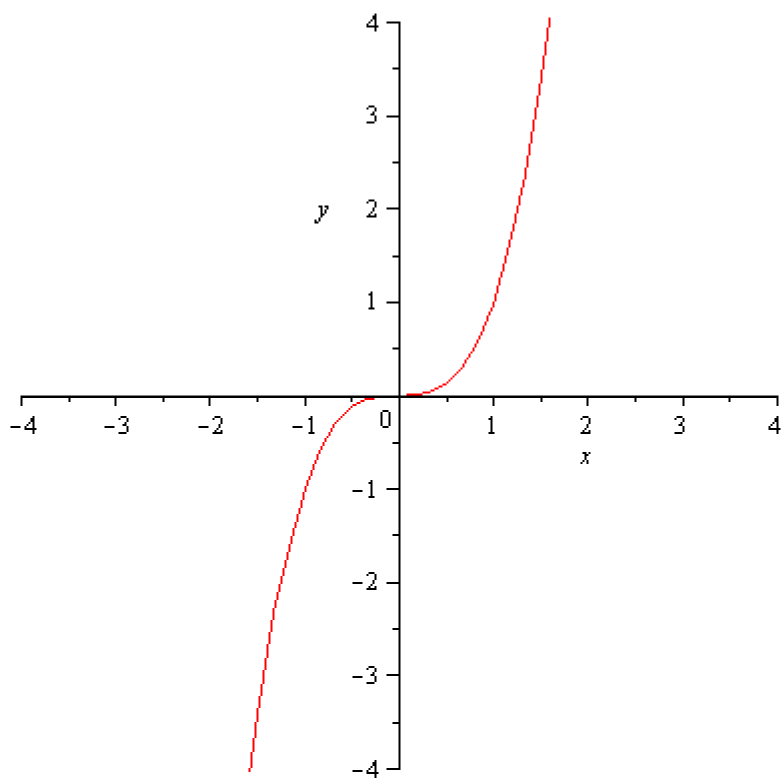


Figura 2.25 $f(x) = x^3$

Funcție strict crescătoare sau strict descrescătoare într-un punct

Definiție: O funcție $f(x)$ este strict crescătoare în $x = x_0$ dacă există o vecinătate $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ a lui x_0 astfel încât $f(x) < f(x_0)$, $\forall x < x_0$ și $f(x) > f(x_0)$, $\forall x > x_0$.

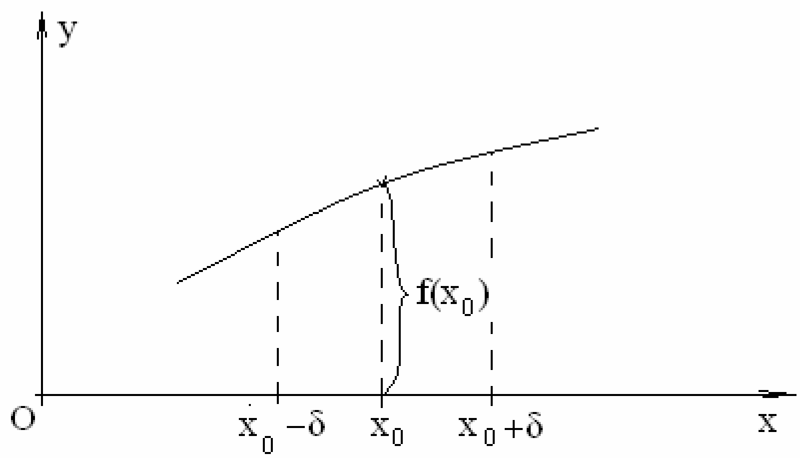


Figura 2.26

Analog, o funcție $f(x)$ este strict descrescătoare în $x = x_0$ dacă există o vecinătate $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ a lui x_0 astfel încât $f(x) > f(x_0)$, $\forall x < x_0$ și $f(x) < f(x_0)$, $\forall x > x_0$.

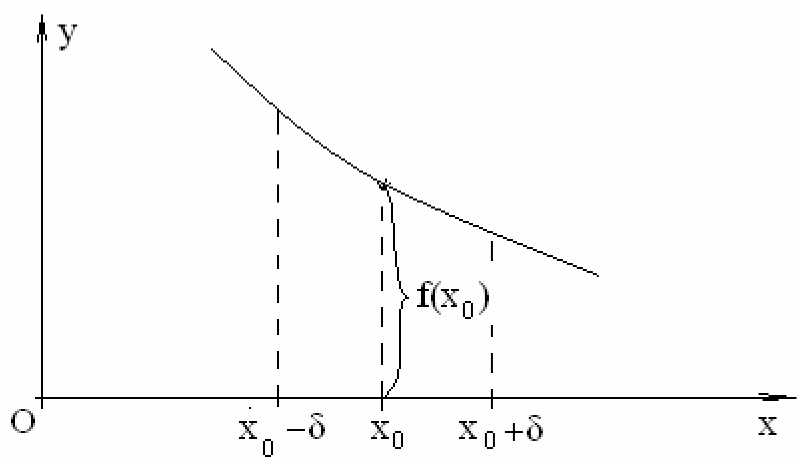


Figura 2.27

Teorema 3: Fie $f(x)$ o funcție care are derivată $f'(x_0)$ în punctul x_0. Dacă $f'(x_0) > 0$, atunci funcția este strict crescătoare în x_0 și dacă $f'(x_0) < 0$ atunci funcția este strict descrescătoare în x_0. (condiții suficiente nu neapărat necesare)

Exemple: 1)

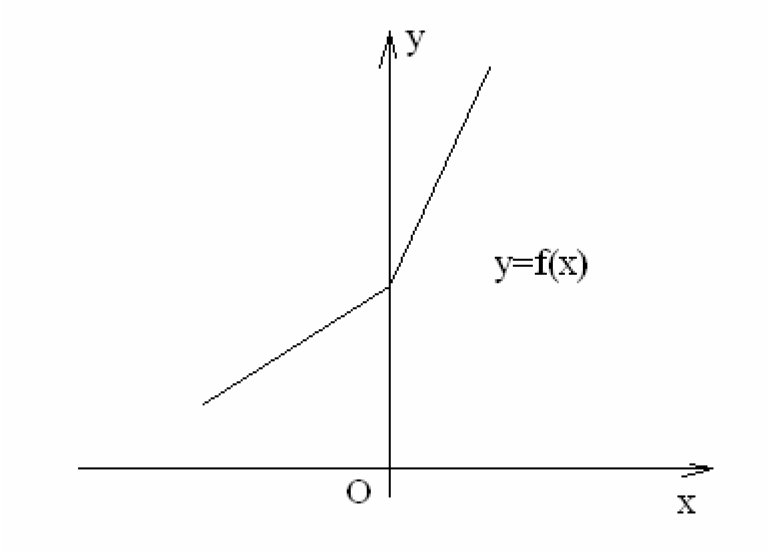


Figura 2.28

Funcţia este strict crescătoare în $x_0 = 0$, şi totuşi derivata nu există în acest punct.

2) $y = x^3$

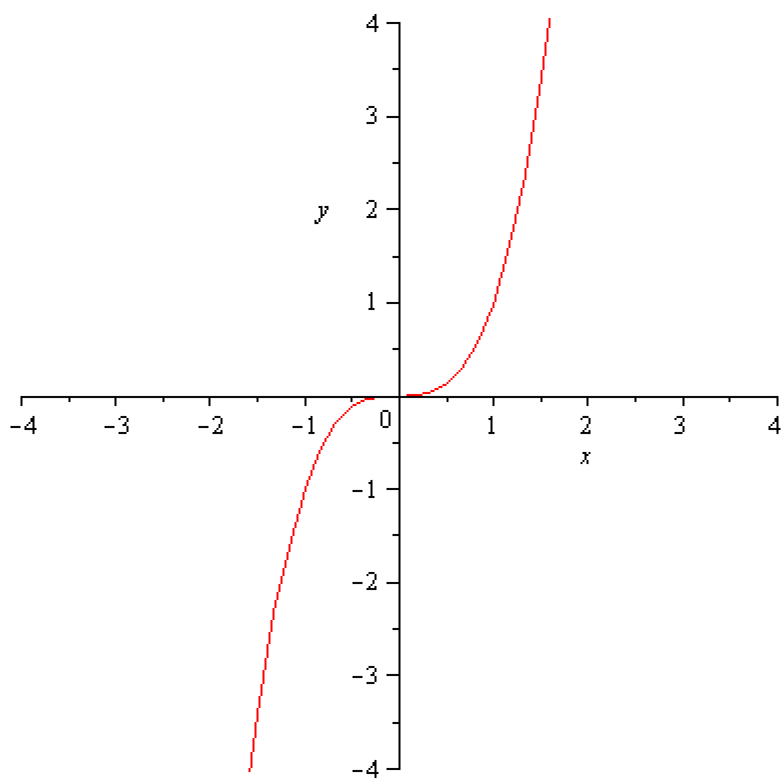


Figura 2.29 $f(x) = x^3$

Funcţia este strict crescătoare în $x_0 = 0$, şi totuşi derivata este nulă în acest punct.

2.16 Punctele de extrem ale unei funcții

Definiții Fie $f(x)$ o funcție definită într-o vecinătate a punctului x_0 .
Spunem că funcția are un *maxim local* în x_0 dacă există $\delta > 0$ astfel încât

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) \leq 0 , \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

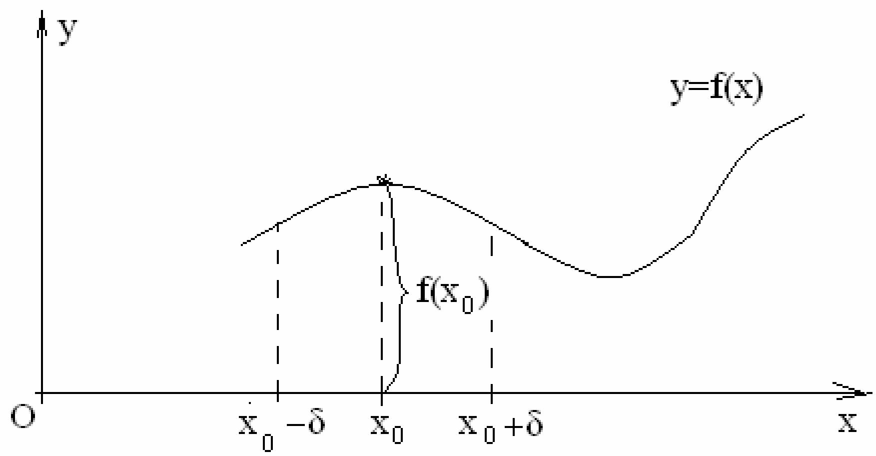


Figura 2.30

Spunem că funcția are un *minim local* în x_0 dacă există $\delta > 0$ astfel încât

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) \geq 0 , \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

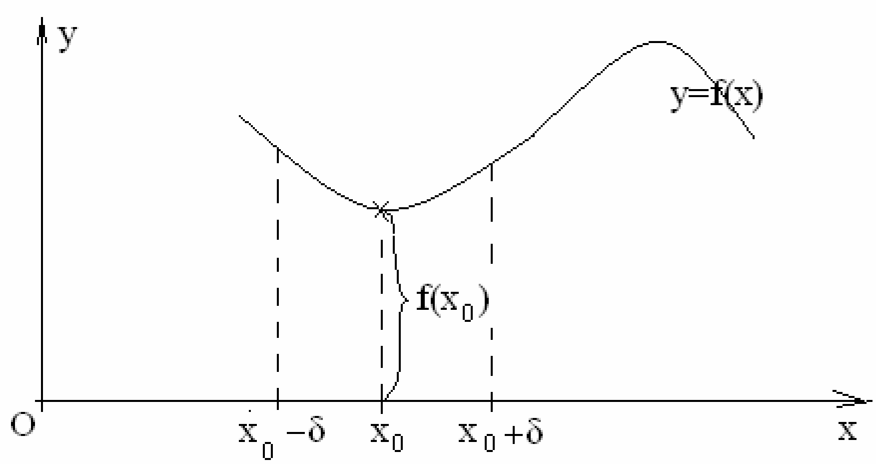


Figura 2.31

Maximul local şi minimul local al unei funcții se numesc *extreme locale* ale funcției.

Observație: In aceste definiții nu s-a presupus continuitatea funcției în x_0.

Exemplu:

$$f(x)=\begin{cases} x^2, x\neq 0 \\ 1, x=0 \end{cases}$$

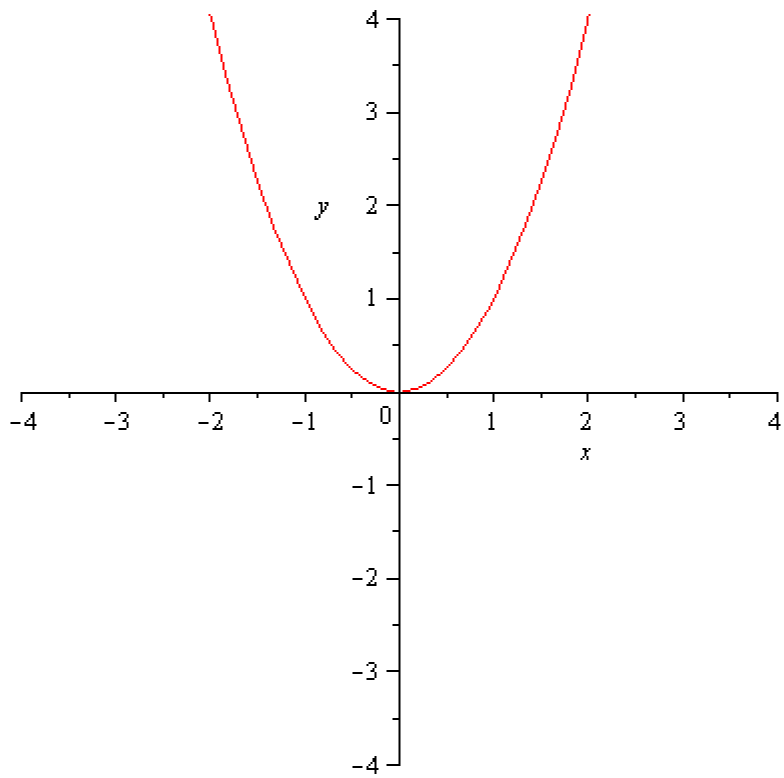


Figura 2.32

Funcția nu este continuă în $x_0=0$ dar are un maxim local în $x_0=0$. Intr-adevăr, există $\delta>0$, $\delta=1$ astfel încât $f(x)-f(0)=f(x)-1\leq 0\ \ \forall\ x\in(-1,+1)$.

Teorema 1: (condiție necesară de extrem) O funcție $f(x)$ poate avea un extrem local numai în puncte în care derivata sa $f'(x)$ este fie nulă fie nu există.

Interpretare geometrică

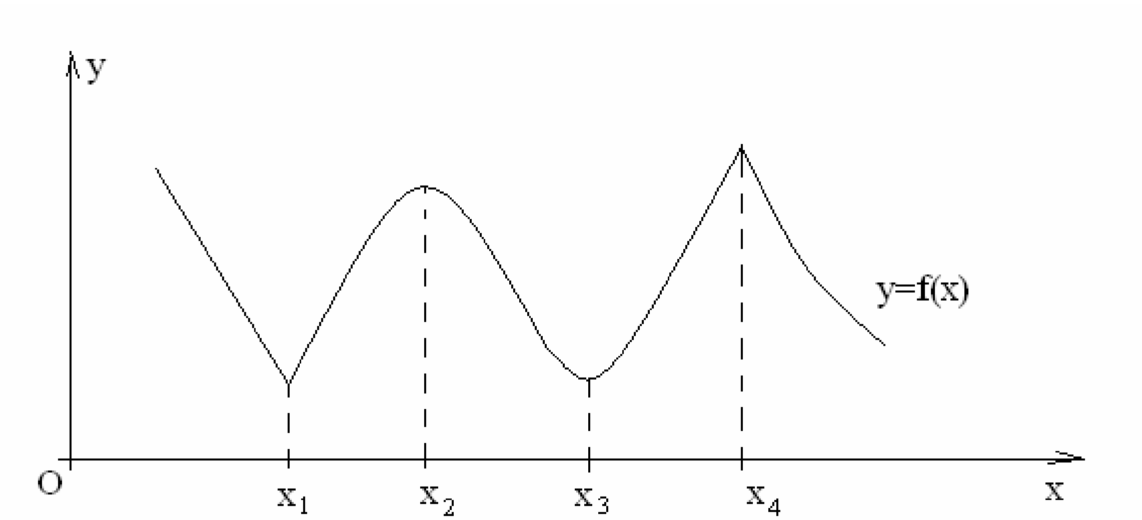


Figura 2.33

Funcția din grafic are extreme locale în punctele x_1, x_2, x_3 şi x_4. Derivata sa $f'(x)$ nu există în x_1 şi x_4 şi este nulă în x_2 şi x_3.

Definiții:

Punctele critice pentru o funcție sunt punctele în care sunt satisfăcute condițiile necesare de extrem. Acestea sunt rădăcinile ecuației $f'(x)=0$ şi punctele în care $f'(x)$ nu există.

Punctele staționare pentru o funcție sunt punctele în care $f'(x)=0$.

Observație: Teorema 1 furnizează doar condiții necesare de extrem. Nu orice punct critic pentru funcție este punct de extrem.

Exemplu: $f(x)=x^3$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x=0 \text{ punct critic}$$

Totuşi funcția nu are extrem în $x_0=0$ deoarece $f(0)=0$ şi $f(x)<0$ $\forall x<0$ şi $f(x)>0$ $\forall x>0$ ceea ce înseamnă că funcția creşte în $x_0=0$.

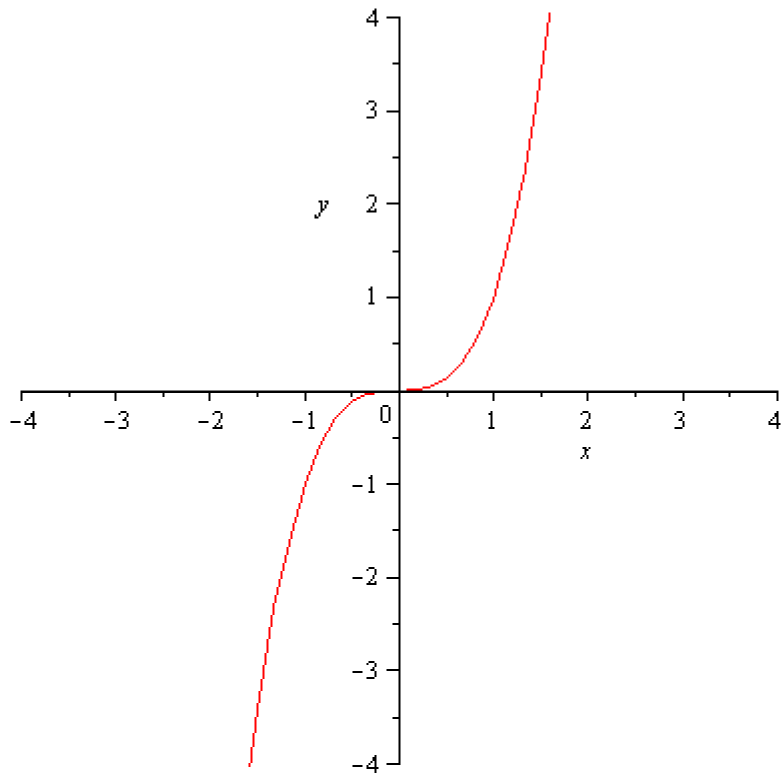


Figura 2.34 $f(x) = x^3$

Dăm în continuare două teoreme care furnizează condiții suficiente pentru maxim sau minim al unei funcții într-un punct.

Teorema 2: Fie funcția $f(x)$ continuă în x_0 şi fie $x = x_0$ un punct critic pentru funcția $f(x)$, adică fie $f'(x_0) = 0$ fie $f'(x_0)$ nu există. Presupunem că $\exists \delta > 0$ astfel încât $f'(x) > 0 \ \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ şi $f'(x) < 0 \ \ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ adică derivata schimbă semnul de la pozitiv la negativ în x_0 atunci când x trece prin x_0 de la stânga la dreapta. In aceste condiții funcția are maxim în x_0.

Teorema 3: Fie funcția $f(x)$ continuă în x_0 şi fie $x = x_0$ un punct critic pentru funcția $f(x)$, adică fie $f'(x_0) = 0$ fie $f'(x_0)$ nu există. Presupunem că $\exists \delta > 0$ astfel încât $f'(x) < 0 \ \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ şi $f'(x) > 0 \ \ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ adică derivata schimbă semnul de la negativ la pozitiv în x_0 atunci când x trece prin x_0 de la stânga la dreapta. In aceste condiții funcția are minim în x_0.

Observație: Ipoteza de continuitate a funcției în x_0 este importantă în teoremele 2 şi 3.

Exemplu:

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x<0\\ x+1, & x\geq 0\end{cases}$$

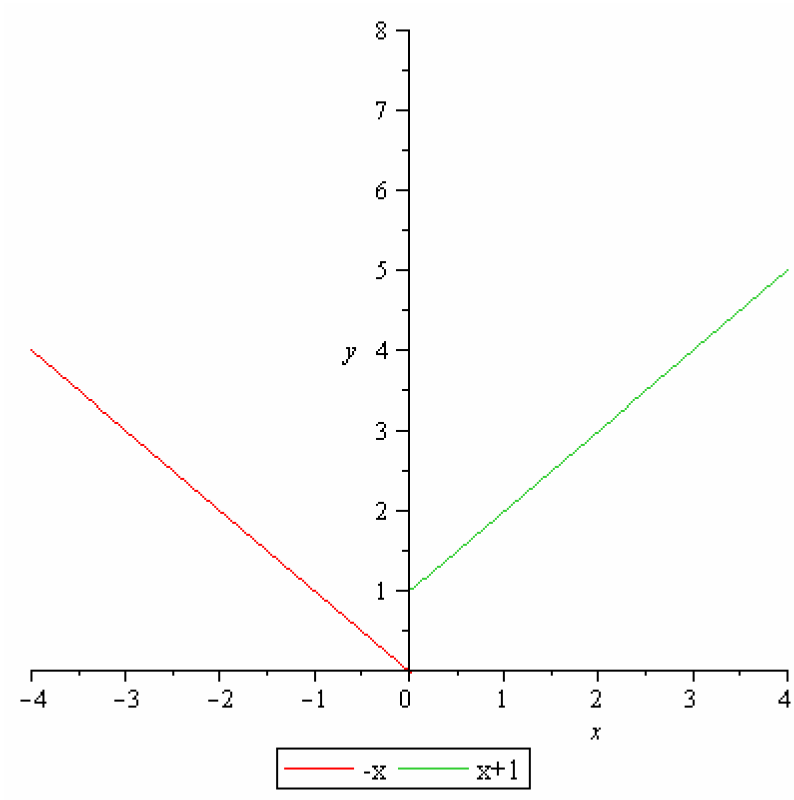


Figura 2.35

$f'(x)$ nu există în x_0. Derivata schimbă semnul când x trece prin $x_0=0$, totuşi funcția nu are extrem în $x_0=0$ deoarece nu există o vecinătate a lui $x_0=0$, în care $f(0)=1$ să fie maximul sau minimul funcției.

Explicația constă în lipsa continuității funcției în $x_0=0$.

Procedeu de determinare a punctelor de extrem

a) Calcularea derivatei $f'(x)$ şi a rădăcinilor ecuației $f'(x)=0$.

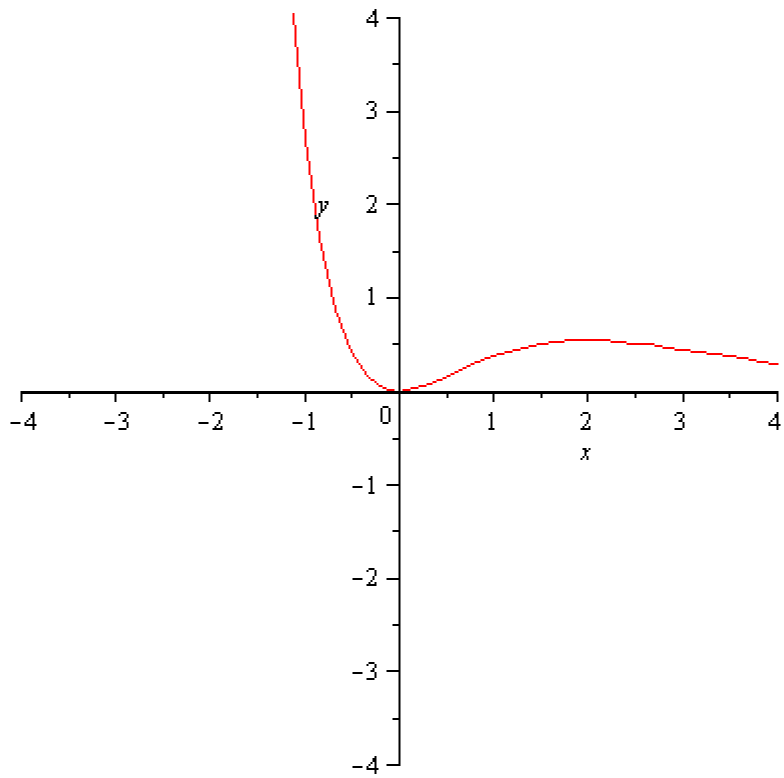
b) Determinarea punctelor în care $f'(x)$ nu există. Aceste puncte împreună cu rădăcinile lui $f'(x)=0$ sunt punctele critice ale funcției.

c) Determinarea semnului lui $f'(x)$ la stânga şi la dreapta fiecărui punct critic.

Atunci, funcția are maxim în punctul critic x_0 dacă $f'(x)$ îşi schimbă semnul de la pozitiv la negativ când x trece prin punctul critic de la stânga la dreapta. Funcția are minim în punctul critic x_0 dacă $f'(x)$ îşi schimbă semnul de la negativ la pozitiv când x trece prin punctul critic de la stânga la dreapta. Dacă $f'(x)$ nu-şi modifică semnul când x trece prin punctul critic x_0 , funcția nu are nici maxim nici minim în x_0.

Exemple:

1) $y = x^2 e^{-x}$



Fihura 2.36 $f(x) = x^2 e^{-x}$

a) $y' = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = e^{-x}(2-x)x$

b) $y' = 0 \Rightarrow$ punctele critice $x = 0$, $x = 2$.

c)semnul derivatei

x	$-\infty$ 0 2 $+\infty$
$f'(x)$	---------------------------- 0 + + + + + + + + + + 0 ---------------------------

$f'(x) < 0$ la stânga lui $x = 0$ şi $f'(x) > 0$ la dreapta lui $x = 0$ $\Rightarrow$ $x = 0$ punct de minim

$f'(x) > 0$ la stânga lui $x = 2$ şi $f'(x) < 0$ la dreapta lui $x = 2$ $\Rightarrow$ $x = 2$ punct de maxim

2) $y = x^{2/3}$

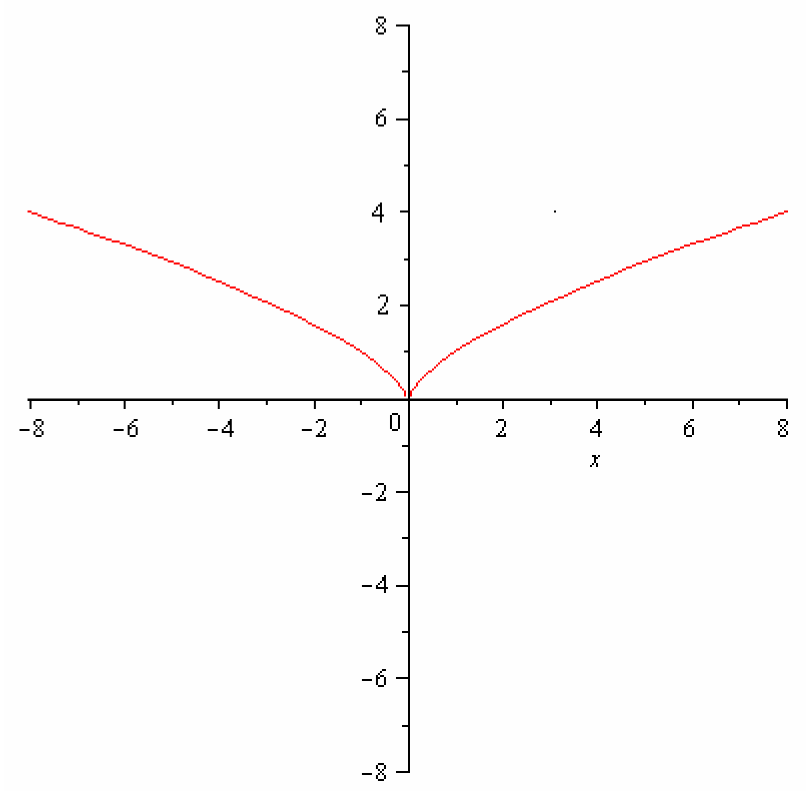


Figura 2.37 $f(x) = x^{2/3}$

a) $y' = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

b) $y' = 0$ nu are rădăcini , y' nu există în $x = 0$ deoarece $y'_s(0) = -\infty$ şi $y'_d(0) = +\infty$

Funcția are un singur punct critic $x = 0$.

c) semnul derivatei

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	---		+ + + + + + + + + + + + + + + + + + +

$f'(x) < 0$ la stânga lui $x = 0$ şi $f'(x) > 0$ la dreapta lui $x = 0$ $\Rightarrow$ $x = 0$ punct de minim

3) $y = x^3$

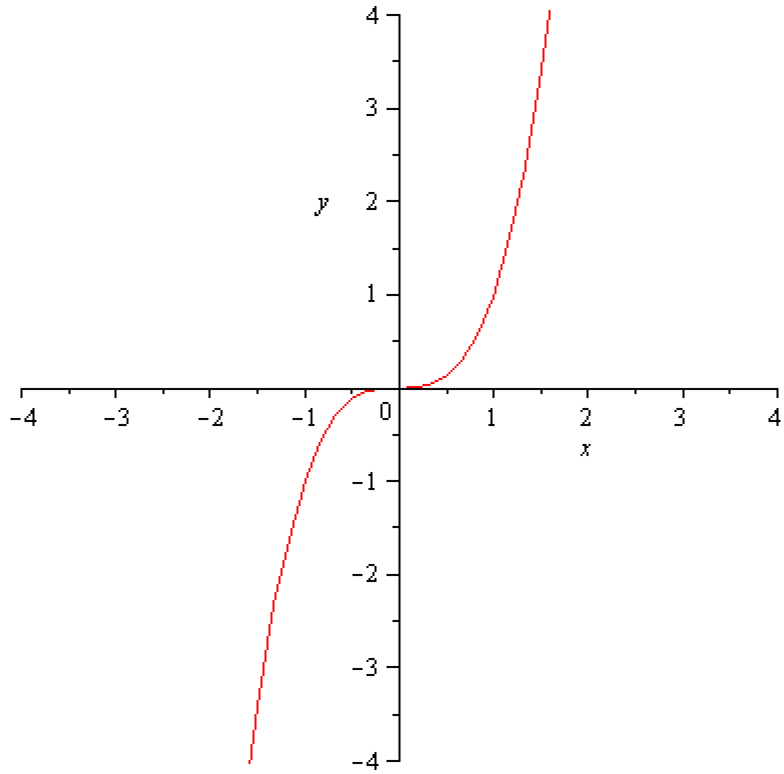


Figura 2.38 $f(x) = x^3$

a) $y' = 3x^2$

b) $y' = 0 \Rightarrow$ puncte critice $x = 0$

c) $f'(x) = 3x^2 > 0 \quad \forall x \neq 0 \Rightarrow$ derivata este pozitivă şi la stânga şi la dreapta lui $x = 0$ $\Rightarrow$ funcția nu are extrem.

Derivata secundă în investigarea punctelor de extrem

O condiție suficientă de extrem este dată de teorema următoare.

Teorema 4: Fie $f(x)$ o funcție care are prima şi a doua derivată în x_0 astfel încât $f'(x_0) = 0$ şi $f''(x_0) \neq 0$. Atunci, funcția are în x_0 un maxim dacă $f''(x_0) < 0$ şi un minim dacă $f''(x_0) > 0$.

Procedeu de investigare a punctelor de extrem:

a) determinarea punctelor critce

b) calcularea derivatei secunde $f''(x)$ într-un punct critic x_0 şi al semnului derivatei secunde, dacă aceasta există. Dacă $f''(x_0) < 0$, atunci funcția are maxim în x_0 şi dacă $f''(x_0) > 0$ funcția are minim în x_0.

Dacă $f''(x)$ este fie nulă fie nu există, atunci putem decide asupra punctului de extrem cu prima derivată.

Exemplu: $y = e^{-x^2}$

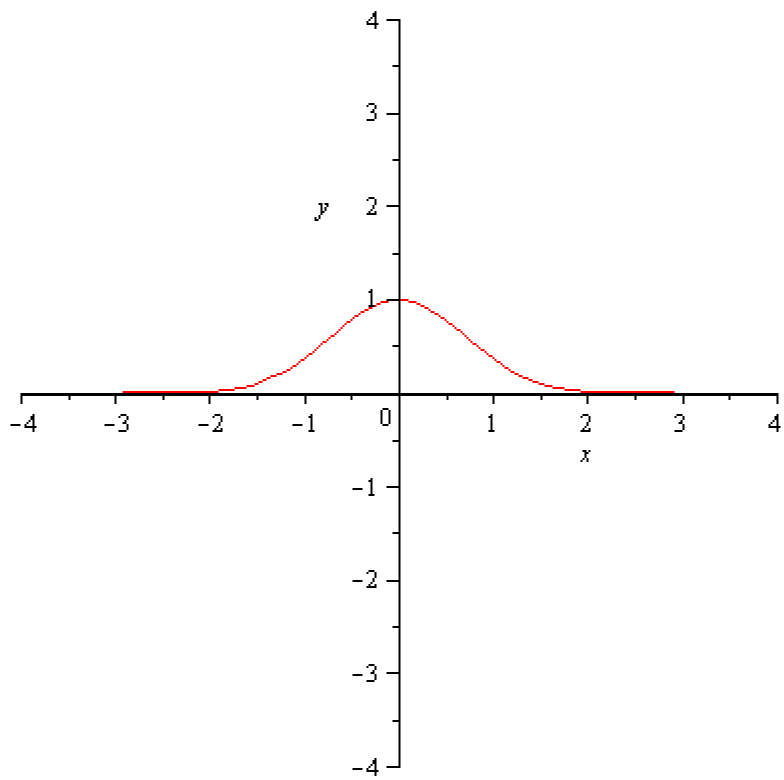


Figura 2.39 $f(x) = e^{-x^2}$

$y' = -2xe^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad x = 0$ punct critic

$y'' = -2e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}(-2x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} \qquad y''(0) = -2 < 0$

Atunci, funcția are maxim în $x = 0$.