2.8 Derivatele funcțiilor compuse

Teorema 1: Fie $u = \varphi(x)$ o funcție diferențiabilă în x_0 şi fie $y = f(u)$ o funcție diferențiabilă în $u_0 = \varphi(x_0)$. Atunci, funcția compusă $y = f[\varphi(x)]$ este diferențiabilă în x_0 şi are loc

$$\left.\{f[\varphi(x)]\}_x'\right|_{x=x_0} = f'(u_0)\varphi'(x_0) \qquad (1)$$

Observație: Egalitatea de mai sus poate fi scrisă şi în alte moduri

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \qquad \text{sau} \qquad y_x' = y_u' u_x' \qquad (2)$$

Exemple:

1) Calculați derivata funcției $y = e^{\sin x}$

y este o funcție compusă de *x* care poate fi scrisă în forma

$$y = e^{u(x)} \quad \text{cu} \quad u(x) = \sin x$$

$$\Rightarrow \qquad y_x' = \left(e^u\right)_u' u_x' = e^u \cos x = e^{\sin x} \cos x$$

2) Calculați derivata funcției $y = \ln|x|$, $x \neq 0$

y este o funcție pară definită pe $\mathbb{R} - \{0\}$

Dacă $x > 0 \;\Rightarrow\; |x| = x \;\Rightarrow\; y = \ln x \;\Rightarrow\; y_x' = (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0$

Dacă $x < 0 \;\Rightarrow\; |x| = -x \;\Rightarrow\; y = \ln(-x)$

In această situație derivăm funcția compusă

$$y_x' = y_u' u_x' = \frac{1}{u}(-1) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}, \quad x < 0$$

In concluzie,

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0 \tag{3}$$

Observație: Teorema 1 este valabilă şi pentru compunerea unui număr finit de funcții. De exemplu, dacă

$$y = f(u), \quad u = \varphi(z) \quad \text{şi} \quad z = \psi(x) \tag{4}$$

Atunci derivata funcției compuse $y = f\{\varphi[\psi(x)]\}$ este

$$y'_x = y'_u u'_z z'_x \tag{5}$$

cu condiția ca derivatele implicate să existe.

Invarianța diferențialei

Dacă $y = f(u)$ este o funcție diferențiabilă de variabila independentă *u* atunci

$$dy = f'(u)du \tag{6}$$

unde $du = \Delta u$.

Fie $u = \varphi(x)$ o funcție diferențiabilă de variabilă independentă *x*. Atunci putem considera *y* ca o funcție compusă $y = f[\varphi(x)]$ de variabilă *x*. Putem exprima diferențiala funcției compuse astfel

$$dy = \{f[\varphi(x)]\}'_x dx \tag{7}$$

Cu teorema 1 de derivare a funcțiilor compuse avem

$$dy = f'(u)\varphi'(x)dx \tag{8}$$

Şi deoarece $\varphi'(x)dx = du$, obținem din nou relația (6)

$$dy = f'(u)du$$

De reținut Diferențiala unei funcții se exprimă cu aceeaşi formulă indiferent dacă argumentul funcției este o *variabilă independentă* sau este o *funcție de o altă variabilă*. Această proprietate se numeşte *invarianța formei de exprimare a diferențialei.*

In formula $dy = f'(u)du$, diferențiala du este egală cu o creştere arbitrară Δu a unei variabile independente u sau dacă u nu este variabilă independentă, adică $u = \varphi(x)$, atunci $du = \varphi'(x)dx$ este partea liniară a creşterii funcției $u = \varphi(x)$ şi este în general diferită de Δu .

Exerciții:

Calculați derivatele funcțiilor:

$$y = \left(x^2 - 2x + 3\right)^5$$

$$y = \sin^3 4x$$

$$y = \left(2a + 3bx\right)^2, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$y = \sqrt[3]{a + bx^3}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$y = \cos\left(\alpha x + \beta\right), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$y = \sqrt{xe^x + x}$$

$$y = x^2 10^{2x}$$

2.9 Diferențierea funcției inverse

Fie $y = f(x)$ o funcție definită pe $[a,b]$. Presupunem că domeniul de valori al funcției este $[\alpha, \beta]$. Mai mult, presupunem că fiecare punct $y \in [\alpha, \beta]$ este imaginea unui singur punct $x \in [a,b]$ astfel încât $f(x) = y$.

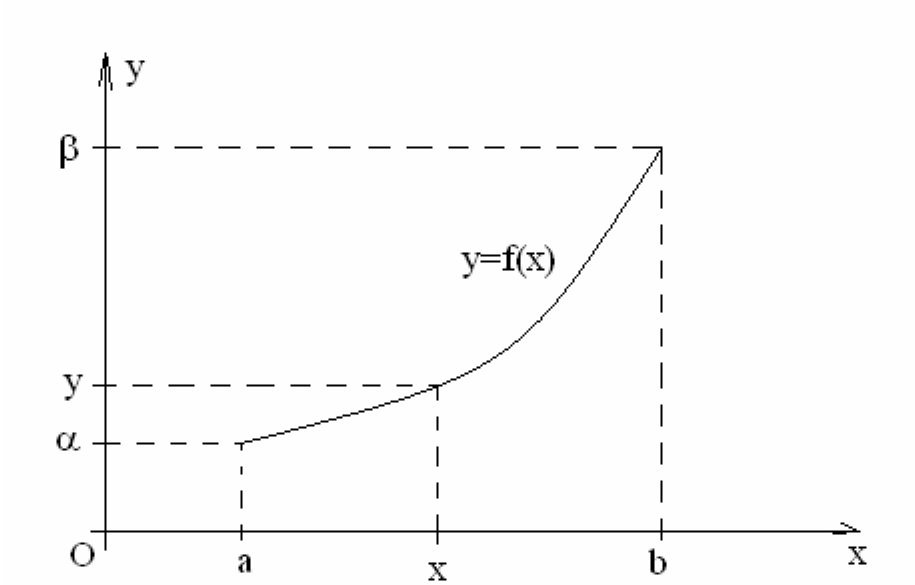


Figura 2.10

Atunci, putem defini funcția $x = \varphi(y)$ pe $[\alpha, \beta]$ care asociază la fiecare $y \in [\alpha, \beta]$ un $x \in [a, b]$ astfel încât $f(x) = y$. Funcția $x = \varphi(y)$ se numeşte *funcția inversă* a funcției $y = f(x)$.

Observație: Dacă $x = \varphi(y)$ este inversa funcției $y = f(x)$, atunci $y = f(x)$ este inversa funcției $x = \varphi(y)$ şi scriem

$$f[\varphi(y)] = y \qquad \text{şi} \qquad \varphi[f(x)] = x$$

Procedeu de determinare a funcției inverse:

Fie $y = f(x)$ o ecuație rezolvabilă în *x* astfel încât fiecare *y* este asociat cu exact un *x*. Atunci, ecuația $x = \varphi(y)$, defineşte pe *x* ca o funcție de *y* şi este inversa funcției $y = f(x)$.

Exemple:

1) Fie funcția $y = 3x$ definită pe $[0,1]$. Atunci funcția $x = \frac{y}{3}$ definită pe $[0,3]$ este funcția inversă funcției date.

2)Fie funcția $y = x^3, x \in \mathbb{R}$. Funcția inversă este $x = \sqrt[3]{y}, y \in \mathbb{R}$.

Observație: Funcțiile $y = f(x)$ şi $x = \varphi(y)$ specifică aceeaşi curbă în planul *xy*. Dacă reprezentăm variabilele independente pe axa *x* în ambele cazuri, adică dacă reprezentăm funcțiile $y = f(x)$ şi $y = \varphi(x)$ în loc de $y = f(x)$ şi $x = \varphi(y)$, atunci graficele celor două funcții vor fi simetrice relativ la linia bisectoare din cadranul unu şi trei ale planului de coordonate.

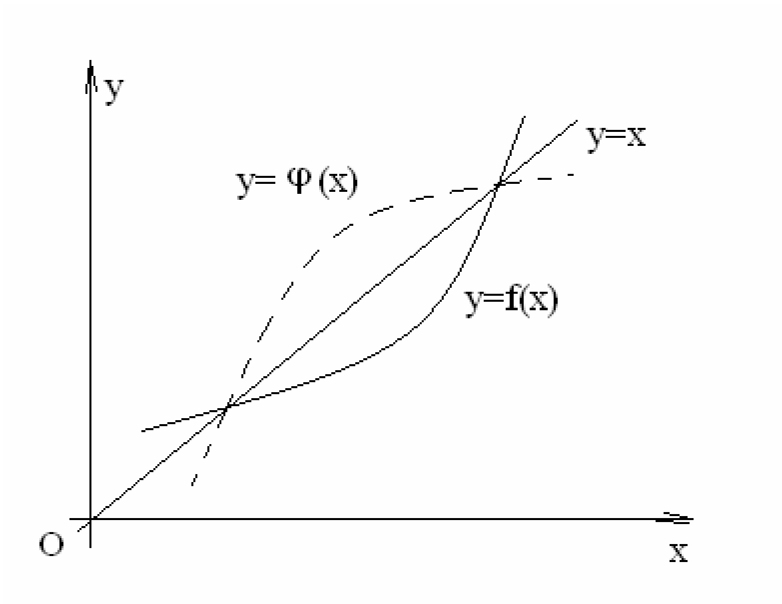


Figura 2.11

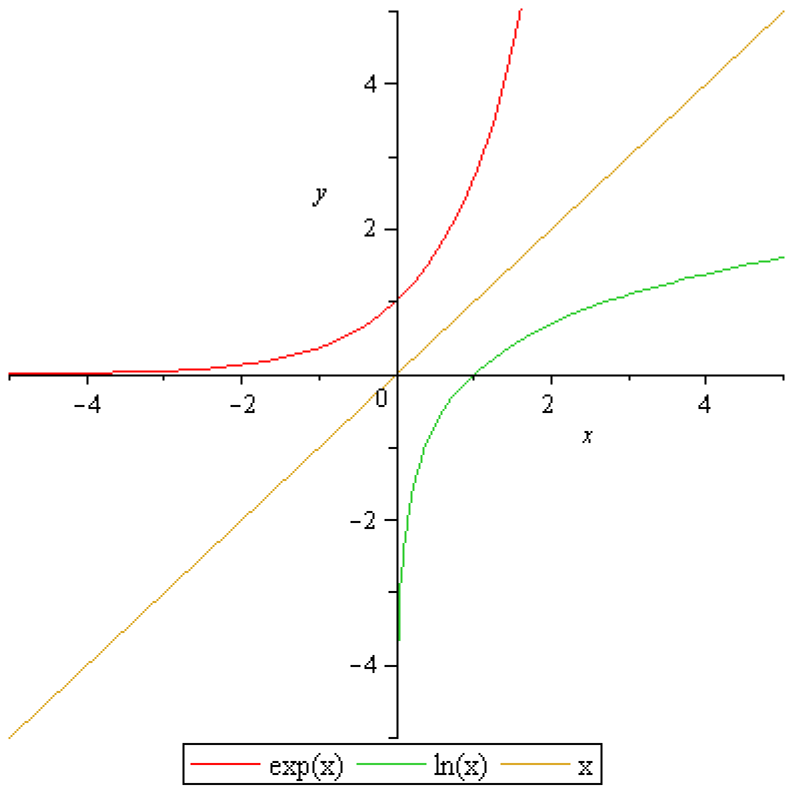
Exemplu:

Funcția $y = e^x$**,** $x \in \mathbb{R}$ are ca funcție inversă pe $x = \ln y$, $y \in (0, +\infty)$

Dacă reprezentăm variabila independentă pe aceeaşi axă *Ox*, atunci funcția inersă este $y = \ln x$, $x \in (0, +\infty)$, iar graficele sunt simetrice față de prima bisectoare.

Definiție: O funcție $y = f(x)$ este *strict crescătoare* pe $[a,b]$ dacă $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ cu $x_1 < x_2$, are loc $f(x_1) < f(x_2)$.

Exemplu: Funcția $y = x^3$ este crescătoare $\forall x \in \mathbb{R}$ (vezi figura 2.12).



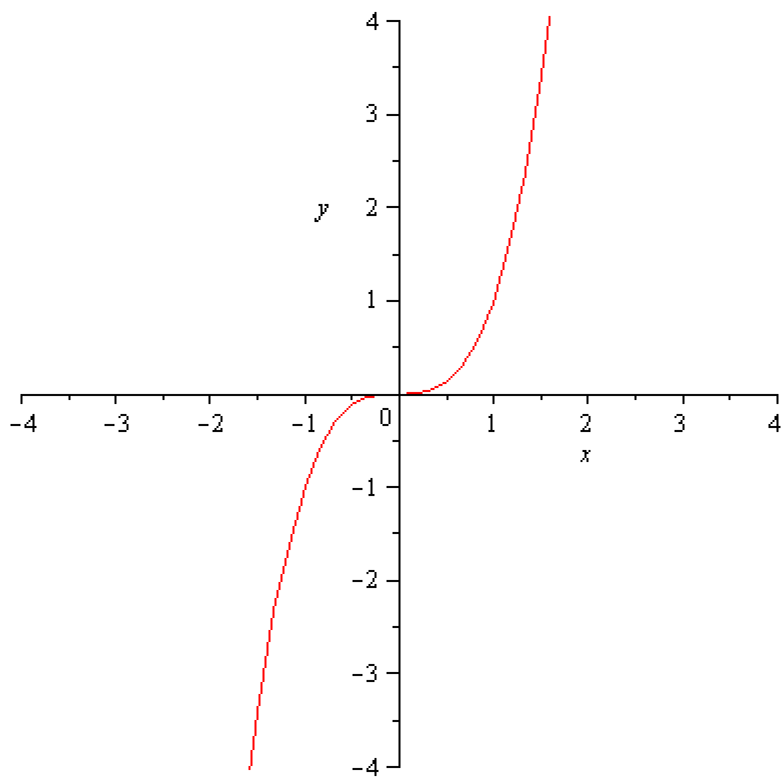


Figura 2.12 $f(x) = x^3$

Teorema 1: Fie $y = f(x)$ o funcţie continuă şi strict crescătoare pe $[a,b]$ şi fie $\alpha = f(a)$ şi $\beta = f(b)$. Atunci $y = f(x)$ admite funcţie inversă $x = \varphi(y)$ definită pe $[\alpha,\beta]$ şi mai mult $x = \varphi(y)$ este continuă şi strict crescătoare pe $[\alpha,\beta]$.

Interpretare geometrică:

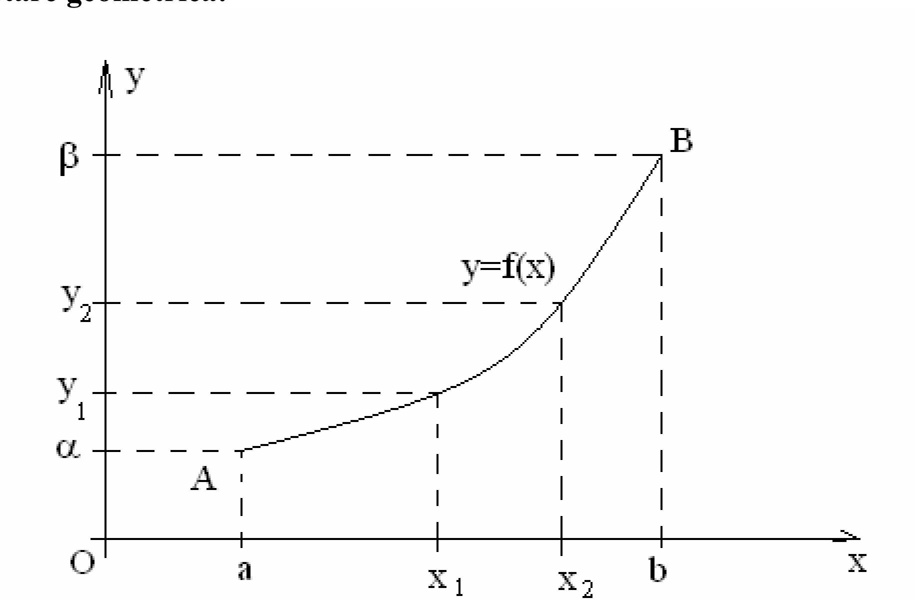


Figura 2.13

Curba *AB* reprezintă graficul lui $y = f(x)$ care este continuă şi strict crescătoare pe $[a,b]$. Fiecare $y \in [\alpha,\beta]$ corespunde la un singur $x \in [a,b]$ astfel încât $f(x) = y$. Curba *AB* stabileşte o corespondenţă unu-la-unu între *x* şi *y* şi atunci putem considera şi *x* ca o funcţie de *y* pe $[\alpha,\beta]$, adică putem spune că $x = \varphi(y)$ este inversa funcţiei $y = f(x)$. Funcţia $x = \varphi(y)$ este reprezentată de curba *AB* şi este continuă şi strict crescătoare pe $[\alpha,\beta]$ deoarece dacă $y_1 < y_2 \Rightarrow x_1 < x_2$.

Observaţie: Consideraţii similare pot fi aplicate şi în cazul unei funcţii continue şi strict descrescătoare pe un interval $[a,b]$.

Teorema 2: Fie $y = f(x)$ o funcție care are derivată nenulă în x_0, adică $f'(x_0) \neq 0$ şi fie $x = \varphi(y)$ funcția inversă, funcție care este continuă în $y_0 = f(x_0)$. Atunci funcția inversă $x = \varphi(y)$ are derivată în y_0 şi are loc:

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \qquad f'(x_0) \neq 0$$

Regula de derivare din teorema 2 se poate scrie şi în forma: $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$

Interpretare geometrică:

Dacă $y = f(x)$ are derivată nenulă în x_0, atunci există tangentă la graficul $y = f(x)$ în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ şi această tangentă nu este paralelă cu axa *x*. Atunci, există şi tangenta la curba $x = \varphi(y)$ în acelaşi punct $M_0(x_0, f(x_0))$.

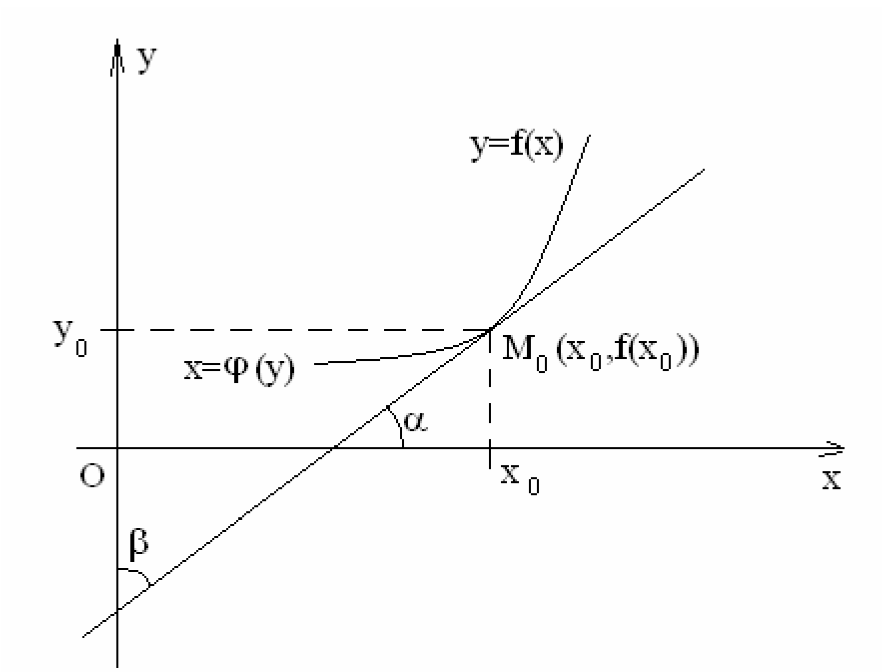


Figura 2.14

Funcțiile $y = f(x)$ şi $x = \varphi(y)$ sunt inverse una alteia şi sunt reprezentate grafic de aceeaşi curbă.

$$f'(x_0) = tg\alpha$$

$$\varphi'(y_0) = tg\beta$$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$tg\beta = tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$$

$$\Rightarrow \qquad \varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Exerciții:

Determinați derivata x'_y , dacă

$y = x + \ln x \qquad y = 3x + x^3 \qquad y = x - \sin x$

Diferențierea funcțiilor trigonometrice inverse

a) $y = \arcsin x$ **,** $x \in [-1, +1]$

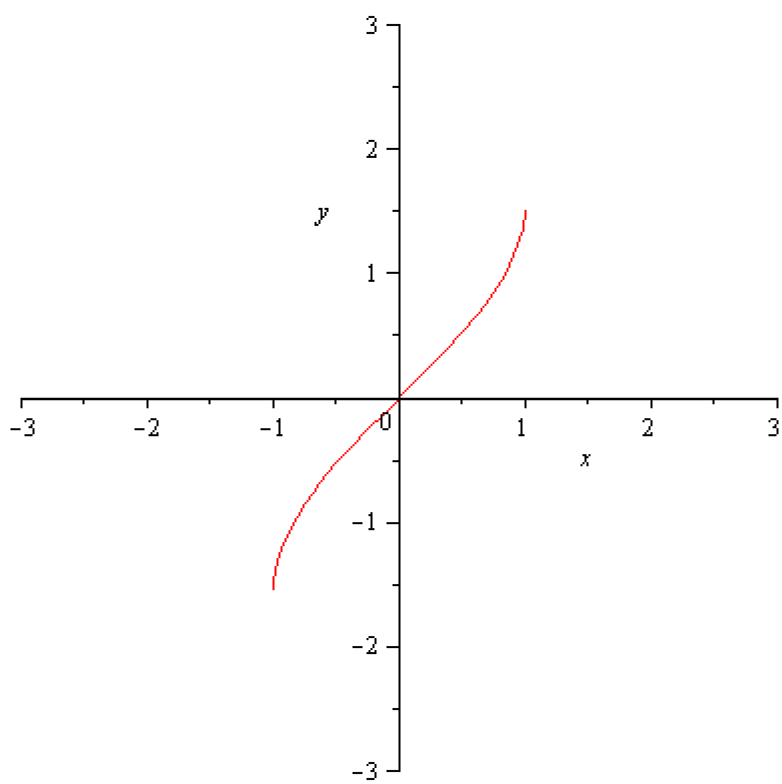


Figura 2.15 $f(x) = \arcsin x$

$y = \arcsin x$ este inversa funcției $x = \sin y$ definită pentru $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$. Funcția $x = \sin y$ are derivată pozitivă $x'_y = \cos y$ pentru $\forall y \in \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow \quad \exists \quad y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,+1)$$

$$\Rightarrow \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in (-1,+1)$$

Observație: Punctele $x = \pm 1$ nu sunt luate în considerare deoarece derivata $x'_y = \cos y$ este nulă în $y = \pm \pi / 2$.

b) $y = arctgx$, $x \in \mathbb{R}$

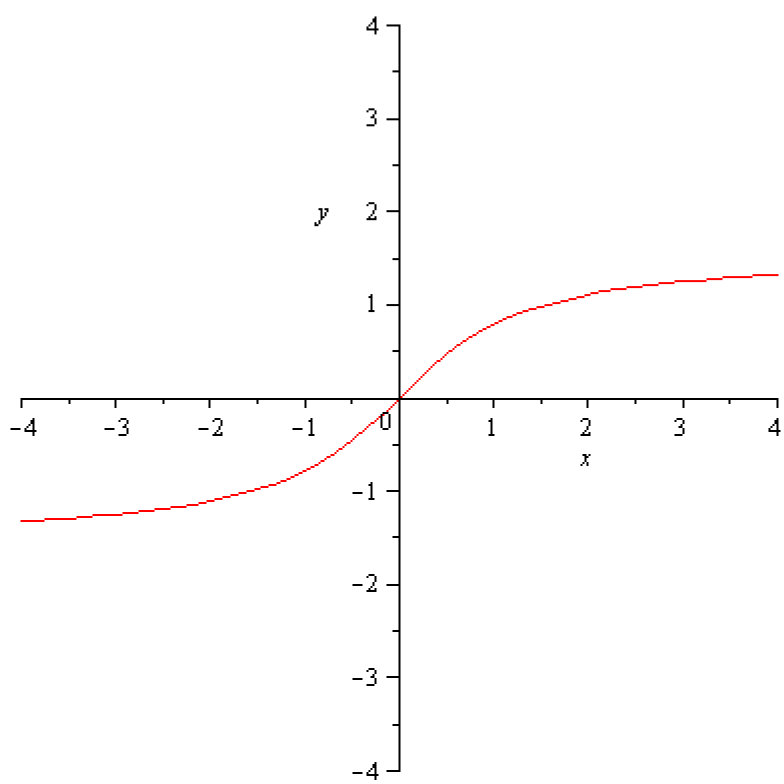


Figura 2.16 $f(x) = arctg\ x$

$y = arctgx$ este inversa funcției $x = tgy$ pentru $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow \quad y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1 + tg^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\Rightarrow \quad (arctgx)' = \frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

c) Pentru a determina formulele de derivare pentru funcțiile $y = \arccos x$ şi $y = arcctgx$ este suficient să utilizăm relațiile:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$arctgx + arcctgx = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, +1)$$

$$\Rightarrow \quad (arcctgx)' = -\frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Diferențierea funcțiilor hiperbolice

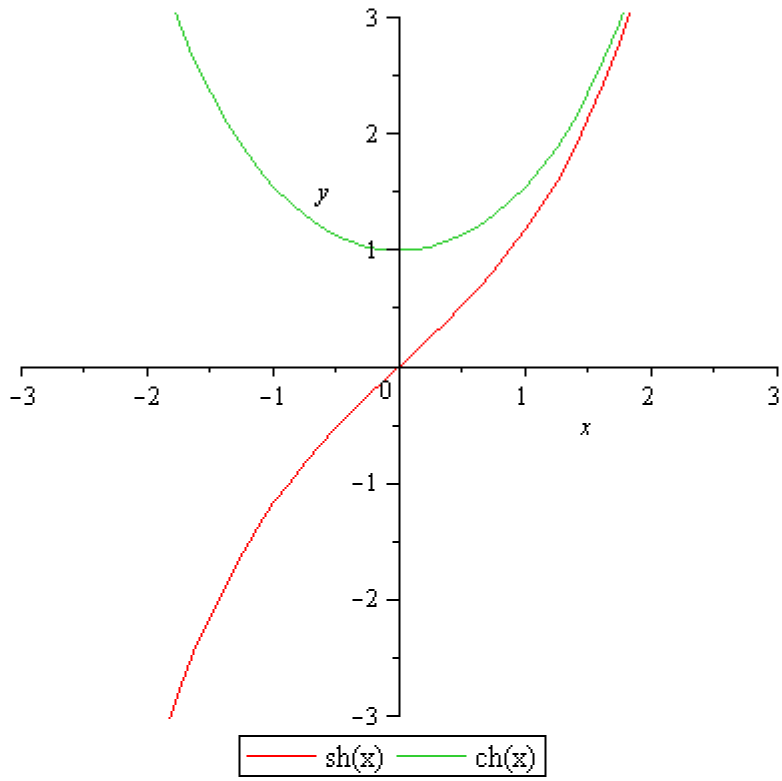
Definiții: $shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$$(shx)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = chx$$

$$(chx)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = shx$$

Definiții:

$$thx = \frac{shx}{chx} \qquad cthx = \frac{chx}{shx}$$



Utilizând regula de derivare a raportului şi identitatea $ch^2 x - sh^2 x = 1$, obținem

$$(thx)' = \left(\frac{shx}{chx}\right)' = \frac{ch^2 x - sh^2 x}{ch^2 x} = \frac{1}{ch^2 x}$$

$$(cthx)' = \left(\frac{chx}{shx}\right)' = \frac{sh^2 x - ch^2 x}{sh^2 x} = -\frac{1}{sh^2 x}, \quad x \neq 0$$

2.10 Diferențierea funcțiilor elementare de bază

1) $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in R, \quad x > 0$

2) $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x > 0$

3) $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}, \quad x > 0$

4) $\left(a^x\right)' = a^x \ln a, \quad a > 0, \quad a \neq 1$

5) $\left(e^x\right)' = e^x$

6) $\left(\sin x\right)' = \cos x$

7) $\left(\cos x\right)' = -\sin x$

8) $\left(tgx\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in Z$

9) $\left(ctgx\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq k\pi, \quad k \in Z$

10) $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in \left(-1, +1\right)$

11) $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in \left(-1, +1\right)$

12) $\left(arctgx\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

13) $\left(arcctgx\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

14) $\left(shx\right)' = chx$

15) $\left(chx\right)' = shx$

16) $\left(thx\right)' = \dfrac{1}{ch^2 x}$

17) $\left(cthx\right)' = -\dfrac{1}{sh^2 x}, \quad x \neq 0$

Diferențierea logaritmică

Aceasta este utilă în cazul funcțiilor compuse de tip putere-exponențială

$$y=\left[u\left(x\right)\right]^{v(x)}$$

unde $u\left(x\right)>0$ şi $u\left(x\right)$, $v\left(x\right)$ sunt diferenţiabile.

$$\ln y=v\left(x\right)\ln u\left(x\right)$$

$$\frac{y'}{y}=v'\left(x\right)\ln u\left(x\right)+v\left(x\right)\frac{u'\left(x\right)}{u\left(x\right)}$$

$$y'=\left[u\left(x\right)\right]^{v(x)}\left(v'\left(x\right)\ln u\left(x\right)+v\left(x\right)\frac{u'\left(x\right)}{u\left(x\right)}\right)$$

Exemplu:

$$y=x^x,\quad x>0$$

$$\ln y=x\ln x$$

$$\frac{y'}{y}=\ln x+1$$

$$y'=x^x\left(\ln x+1\right)$$

2.11 Derivate şi diferenţiale de ordin superior

Derivate de ordin superior

Dacă $f(x)$ o funcţie derivabilă pe (a,b), atunci derivata funcţiei $f'(x)$ este şi ea o funcţie pe (a,b). Este posibil ca $f'(x)$ să fie şi ea o funcţie derivabilă pe (a,b). Derivata lui $f'(x)$ se numeşte *derivată secundă* a lui $f(x)$ sau derivată de ordinul doi a lui $f(x)$.

Notaţie: $f''(x)$, $f^{(2)}(x)$

$$f''(x)=\left(f'(x)\right)'$$

Similar, derivata de ordinul n a lui $f(x)$ este derivata derivatei de ordinul $n-1$a lui $f(x)$, adică

$$f^{(n)}(x)=\left(f^{n-1}(x)\right)'$$

Exemple:

1) Calculați derivata de ordinul n pentru

$$y=e^{kx}, \qquad k=const$$

$$y'=ke^{kx}, \qquad y''=k^2e^{kx}, \quad y'''=k^3e^{kx} \quad \ldots$$

Prin inducție se arată că

$$\left(e^{kx}\right)^{(n)}=k^n e^{kx}, \quad k=1,2,\ldots$$

2) Calculați derivata de ordinul n pentru

$$y=\sin x$$

$$y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''=-\sin x=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\ldots$$

Prin inducție se arată că:

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right), \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

3) Calculați derivata de ordinul n pentru

$$y=\cos x$$

$$y'=-\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''=-\cos x=\cos\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\ldots$$

Prin inducție se arată că:

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Mulțimea funcțiilor $f(x)$ care sunt definite pe (a,b) şi au derivate până la ordinul n continue pe (a,b) se notează cu $C^n(a,b)$. Spunem că o funcție $f(x)$ este *infinit sau indefinit diferențiabilă* pe (a,b) şi scriem $f(x) \in C^\infty(a,b)$ dacă $f(x)$ are derivate de orice ordin în $\forall x \in (a,b)$. De exemplu, e^x, $\sin x$, şi $\cos x$ sunt infinit diferențiabile pe *R*.

Exemplu: Calculați toate derivatele funcției $y = x^4$

$$y^{(1)} = 4x^3, \quad y^{(2)} = 12x^2, \quad y^{(3)} = 24x, \quad y^{(4)} = 24$$

Deoarece $y^{(4)}$ este o constantă atunci toate derivatele de ordin mai mare ca patru sunt nule

$$y^{(5)} = y^{(6)} = \ldots = y^{(n)} = \ldots = 0$$

Interpretare fizică:

Considerăm legea mişcării rectilinii a unui punct material $s = s(t)$. Prima derivată $s'(t) = v(t)$ defineşte viteza punctului material la momentul t , iar derivata secundă $s''(t) = v'(t) = a(t)$ defineşte accelerația punctului material la momentul *t*.

Formula Leibniz

Fie $u(x)$ şi $v(x)$ două funcții care au derivate de ordinul *n*. Atunci:

a) dacă $y(x) = u(x) \pm v(x) \;\Rightarrow\; y^{(n)}(x) = u^{(n)}(x) \pm v^{(n)}(x)$
b) dacă $y(x) = u(x) \cdot v(x) \;\Rightarrow$

$$y' = u'v + uv'$$
$$y'' = u''v + 2u'v' + uv''$$
$$y''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''' \quad \text{etc.}$$

Prin inducție se arată că are loc *formula Leibniz*:

$$(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)}v + \frac{n}{1!}u^{(n-1)}v^{(1)} + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v^{(2)} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \ldots + uv^{(n)}$$

Exemplu:

Calculați derivata $y^{(1001)}$ pentru funcția $y = x^2 e^x$

$$y^{(1001)} = \left(e^x \cdot x^2\right)^{(1001)} = \left(e^x\right)^{(1001)} x^2 + \frac{1001}{1!}\left(e^x\right)^{(1000)}\left(x^2\right)' + \frac{1001 \cdot 1000}{2!}\left(e^x\right)^{(999)}\left(x^2\right)'' + 0$$

$$y^{(1001)} = e^x x^2 + 2002 e^x x + 1001 \cdot 1000 \cdot e^x$$

Diferențiale de ordin superior

Fie $y = f(x)$ o funcție diferențiabilă în punctul *x*. Diferențiala $dy = f'(x)dx$ poate fi şi ea o funcție diferențiabilă de *x*. Atunci, există diferențiala unei diferențiale a unei funcții date care se numeşte *diferențială de ordinul* doi sau diferențială secundă a lui $y = f(x)$.

Notație: d^2y

$$d^2 y = d(dy)$$

Similar, diferențiala de ordinul *n* unei funcții $y = f(x)$ este diferențiala diferențialei de ordinul $n-1$ a funcției $y = f(x)$, adică

$$d^n y = d\left(d^{n-1} y\right)$$

In continuare, deducem câteva <u>formule</u> importante pentru diferențialele de ordin superior.

1) Fie $y = f(x)$ o funcție de variabilă independentă *x* şi care are diferențiale de orice ordin. Atunci

$$dy = f'(x)dx$$

unde $dx = \Delta x$ este independent de *x*. Prin definiție,

$$d^2 y = d(dy) = d\left(f'(x)dx\right)$$

Diferențiala $f'(x)dx$ este o funcție de *x* în care factorul *dx* este independent de *x* şi poate ieşi în afara semnului de diferențiere.

$$d^2y = d(f'(x))dx = (f'(x))' dxdx = f''(x)(dx)^2 = f''(x)dx^2$$

Prin inducție se arată că formula de diferențiere de ordinul n este

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n \quad \text{unde} \quad dx^n = (dx)^n .$$

In notația Leibniz derivata de ordinul n poate fi scrisă ca un raport de diferențiale:

$$f^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$$

2) Fie $y = f(u)$ cu $u = \varphi(x)$ o funcție diferențiabilă de un număr suficient de ori. Deoarece diferențiala are forma invariantă

$$dy = f'(u)du$$

unde $du = \varphi'(x)dx$ este în general dependentă de *x*.

$$d^2y = d(dy) = d(f'(u)du) = d(f'(u))du + f'(u)d(du) = f''(u)du^2 + f'(u)d^2u$$

$$d^2y = f''(u)du^2 + f'(u)d^2u$$

Observație: Dacă u este variabilă independentă, atunci $d^2u = 0$ şi

$$d^2y = f''(u)du^2$$

$$d^3y = d\left(d^2y\right) = d\left(f''(u)du^2 + f'(u)d^2u\right)$$

$$= d\left(f''(u)\right)du^2 + f''(u)d\left(du^2\right) + d\left(f'(u)\right)d^2u + f'(u)d(d^2u)$$

$$= f'''(u)du\ du^2 + f''(u)2du\ d(du) + f''(u)du\ d^2u + f'(u)d^3u$$

$$d^3y = f''(u)du^2 + 3f''(u)du\ d^2u + f'(u)d^2u$$

Exerciții:

1. Determinați creșterea Δy și diferențiala dy pentru funcția $y = 5x + x^2$ pentru $x = 2$ și $\Delta x = 0.001$.

$$\Delta y = 5(x + \Delta x) + (x + \Delta x)^2 - 5x - x^2$$

$$= (5 + 2x)\Delta x + \Delta x \cdot \Delta x$$

$$\Delta y = (5 + 2 \cdot 2) \cdot 0.001 + (0.001)^2 = 0.009001$$

$$dy = (5 + 2x)\Delta x = 0.009$$

2. Calculați $d^2 y$ pentru $y = \cos 5x$.

$$d^2 y = -25 \cos 5x \; dx^2$$

2.12 Diferențierea funcțiilor date în formă parametrică

În plan, considerăm un sistem cartezian de coordonate *xOy* și două funcții continue $\varphi(t)$ și $\psi(t)$ definite pe intervalul $[\alpha, \beta]$. Acestea definesc o curbă parametrizată continuă Γ. Ecuațiile parametrice ale curbei sunt:

$$\Gamma : \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \qquad t \in [\alpha, \beta]$$

Curba Γ este formată din mulțimea punctelor *M* cu coordonatele $(\varphi(t), \psi(t))$ obținute atunci când *t* parcurge intervalul $[\alpha, \beta]$.

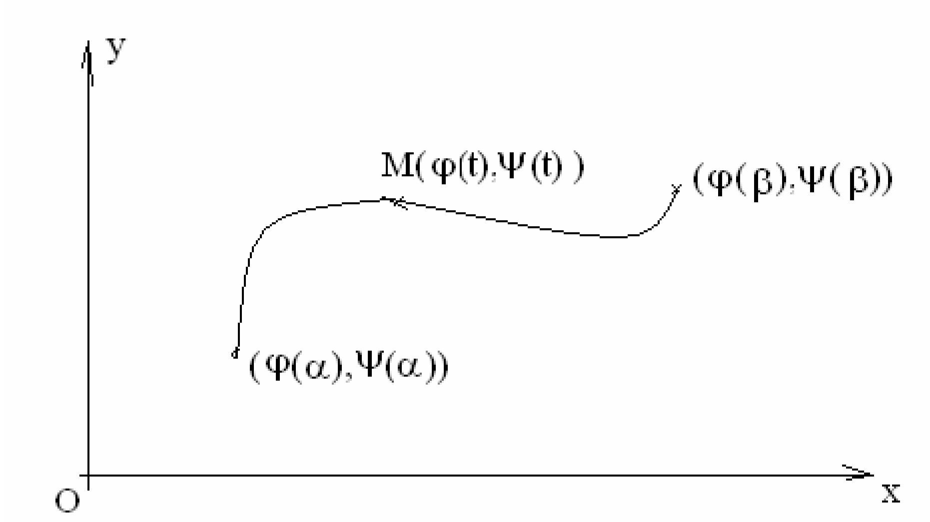


Figura 2.17

Exemple:

1. Cercul de rază *R*, şi centru originea sistemului de coordonate:
2.

$$\Gamma : \begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Parametrul *t* este unghiul dintre axa *Ox* şi vectorul de poziție $\overrightarrow{OM}$ măsurat în radiani.

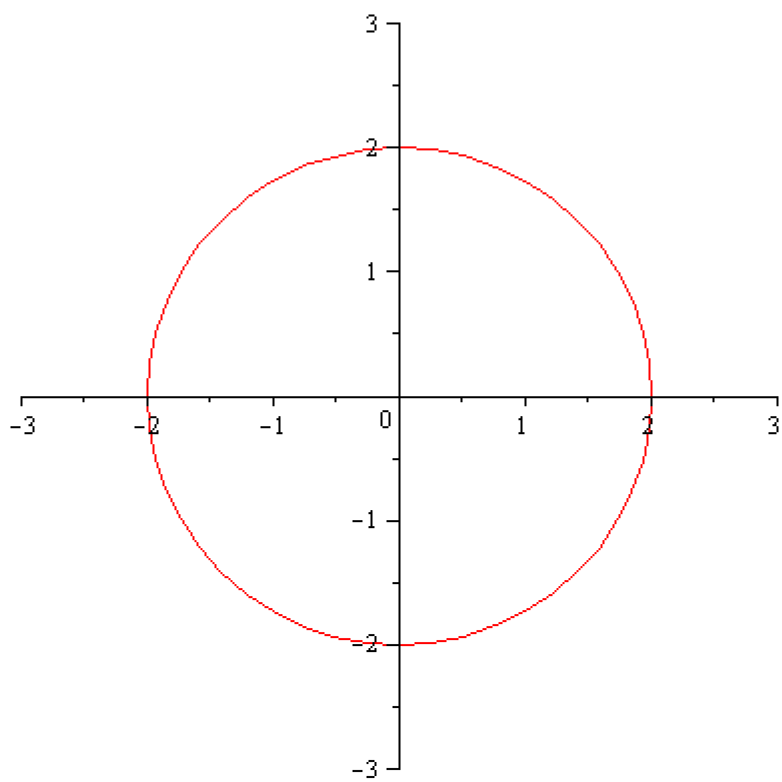


Figura 2.18 Cercul cu raza $R = 2$

3. Elipsa cu semiaxele *a* şi *b*:

$$\Gamma:\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\cos t \end{cases}, \qquad t\in[0,2\pi]$$

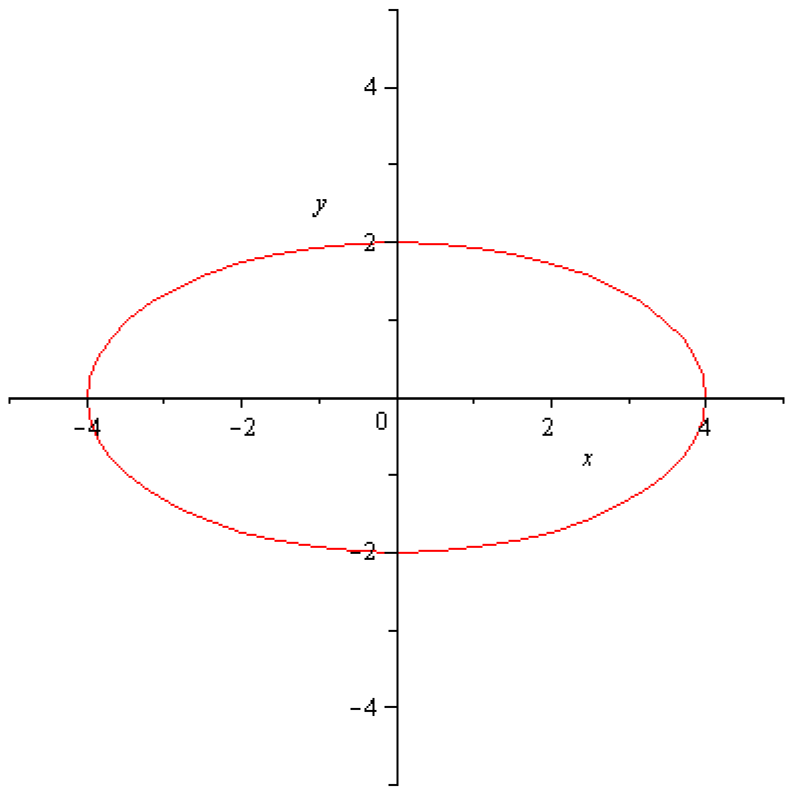


Figura 2.19 Elipsa cu semiaxele $a=4$, $b=2$

Ecuațiile parametrice ale unei curbe plane pot fi reduse la ecuația $F(x,y)=0$, eliminând parametrul *t*. De exemplu,

-în cazul cercului

$$\Gamma:\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}, \qquad t\in[0,2\pi]$$

eliminând parametrul *t* se obține $x^2 + y^2 = R^2$

-în cazul elipsei:

$$\Gamma : \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\cos t \end{cases}, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

prin eliminarea lui t se obține $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Uneori este dificilă eliminarea parametrului *t*, situație în care avem nevoie de tehnici de determinare a derivatei lui *y* în raport cu *x*.

Astfel, fie o curbă definită parametric de funcțiile $\varphi(t)$ şi $\psi(t)$ definite şi continue pe (α, β).

$$\Gamma : \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \qquad t \in [\alpha, \beta]$$

Presupunem că funcția $x = \varphi(t)$ admite inversă $t = g(x)$. Atunci, $y = \psi\left[g(x)\right]$ este o funcție compusă de *x*. Mai mult, presupunem că $\varphi(t)$ şi $\psi(t)$ sunt diferențiabile în $t \in (\alpha, \beta)$, $\varphi'(t) \neq 0$ şi $t = g(x)$ este diferențiabilă în punctul *x* corespunzător lui *t*. Cu teorema 1 de derivare a funcțiilor compuse, funcția $y = \psi\left[g(x)\right]$ este diferențiabilă în *x* şi

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x$$

Cu teorema 2 de derivare a funcției inverse

$$t'_x = \frac{1}{x'_t}$$

$$y'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y'_t}{x'_t}$$

$$\Rightarrow \qquad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad \varphi'(t) \neq 0$$

Acelaşi rezultat se poate obține dacă împărțim numărătorul şi numitorul din $\frac{dy}{dx}$ cu dt :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

Exemplu:

Considerăm un cerc reprezentat parametric:

$$\Gamma : \begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{R\cos t}{-R\sin t} = -ctgt$$

sau: $$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Dacă $\varphi(t)$ şi $\psi(t)$ au derivate de ordinul *k*, şi $\varphi'(t) \neq 0$, atunci funcția compusă $y = \psi[g(x)]$ are derivate de ordinul *k* în raport cu *x*.

Astfel, derivata secundă este:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right) \cdot \frac{dt}{dx} =$$

$$= \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi')^2(t)} \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi')^3(t)}$$

$$y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$$

Şi în general,

$$y_x^{(n)} = \frac{\left(y_x^{(n-1)}\right)'_t}{x'_t}$$

În aceste formule de derivare, funcția $y = f\left(x\right)$ este dată în mod parametric de ecuațiile $x = x(t)$ și $y = y\left(t\right)$.

Exemplu:

Calculați $\frac{d^2y}{dx^2}$ pentru funcția definită parametric:

$$\Gamma : \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, \qquad t \in \left[0, 2\pi\right] \text{ numită cicloidă}$$

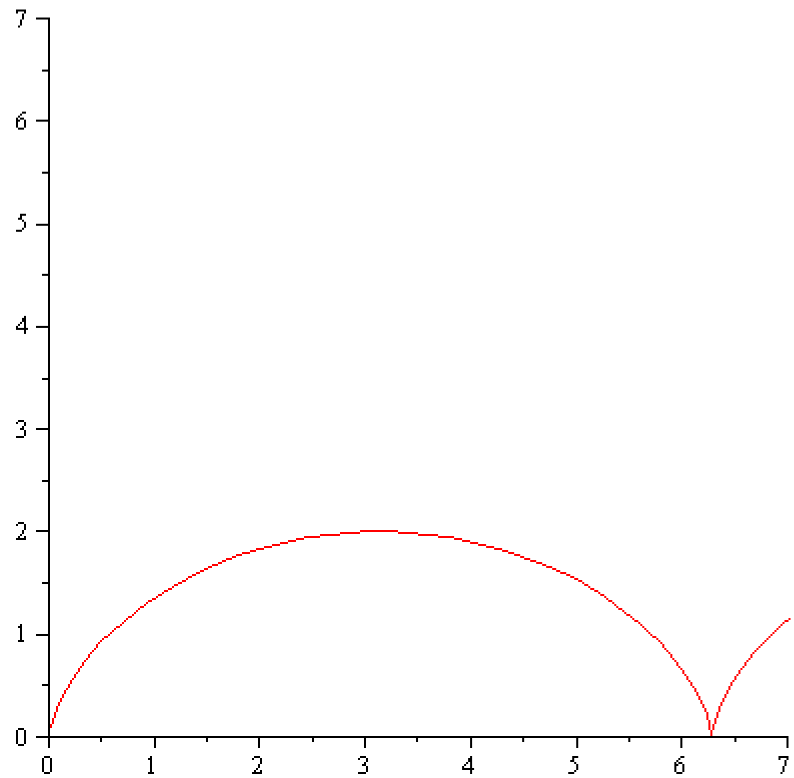


Figura 2.20 Cicloida cu $a = 1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = ctg\,\frac{t}{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(ctg\,\frac{t}{2}\right)\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(ctg\,\frac{t}{2}\right)\cdot\frac{1}{dx/dt} =$$

$$= -\frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}}\frac{1}{2}\frac{1}{a(1-\cos t)} = -\frac{1}{4a\sin^2\frac{t}{2}\sin^2\frac{t}{2}} = -\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}$$