Capitolul II

Calcul diferențial. Funcții de o singură variabilă

2.1 Noțiunea de derivată

Fie $y = f(x)$ o funcție definită pe (a,b) şi fie $x \in (a,b)$. Considerăm creşterea Δx a argumentului astfel încât $x + \Delta x \in (a,b)$. Creşterea Δx a argumentului va produce o creştere Δy a funcției $y = f(x)$:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad \Delta x \neq 0$$

Pentru *x* fixat, raportul precedent este o funcție de Δx adică

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \varphi(\Delta x)$$

Definiție: Dacă limita raportului $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ pentru $\Delta x \to 0$ există, aceasta se numeşte *derivata funcției* $y = f(x)$ în punctul *x* şi se notează $f'(x)$ sau $y'(x)$ sau y'_x. Astfel, prin definiție avem:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Exemple:

1. $y = x^2$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \Delta x$ $\quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$

Atunci, $y = x^2$ are derivată $y'(x) = 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2. $y = e^x$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \Delta x$ $\quad \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{e^x \left(e^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = e^x$

Atunci, $y = e^x$ are derivată $y'(x) = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Altă definiție: Fie $f(x)$ o funcție definită în x_0 şi pe o vecinătate Ω a punctului x_0. Atunci

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

cu condiția ca această limite să existe.

Observație: Spunem că o funcție $f(x)$ are derivată pe (a,b) dacă derivata $f'(x)$ există în fiecare punct $x \in (a,b)$.

Interpretarea geometrică a derivatei

Considerăm graficul funcției $y = f(x)$, definită pe (a,b) şi alegem două puncte $M\left(x, f(x)\right)$ şi $P\left(x+\Delta x, f(x+\Delta x)\right)$ pe acest grafic. Considerăm apoi, dreapta care trece prin punctele *M* şi *P*.

Presupunem că punctul *P* se deplasează pe curba $y = f(x)$, spre *M*, adică $\Delta x \to 0$. Atunci dreapta *MP* se deplasează până ce devine tangentă la curba $y = f(x)$ în *M*, adică dreapta *MT*.

Panta *k* a dreptei *MP* este:

$$k = tg\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Panta $tg\alpha$, a tangentei *MT* la curba $y = f\left(x\right)$ în *M*, este limita pantei dreptei *MP* pentru $P \to M$ sau $\Delta x \to 0$, adică

$$tg\alpha = \lim_{P \to M} tg\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x + \Delta x\right) - f\left(x\right)}{\Delta x} = f'\left(x\right)$$

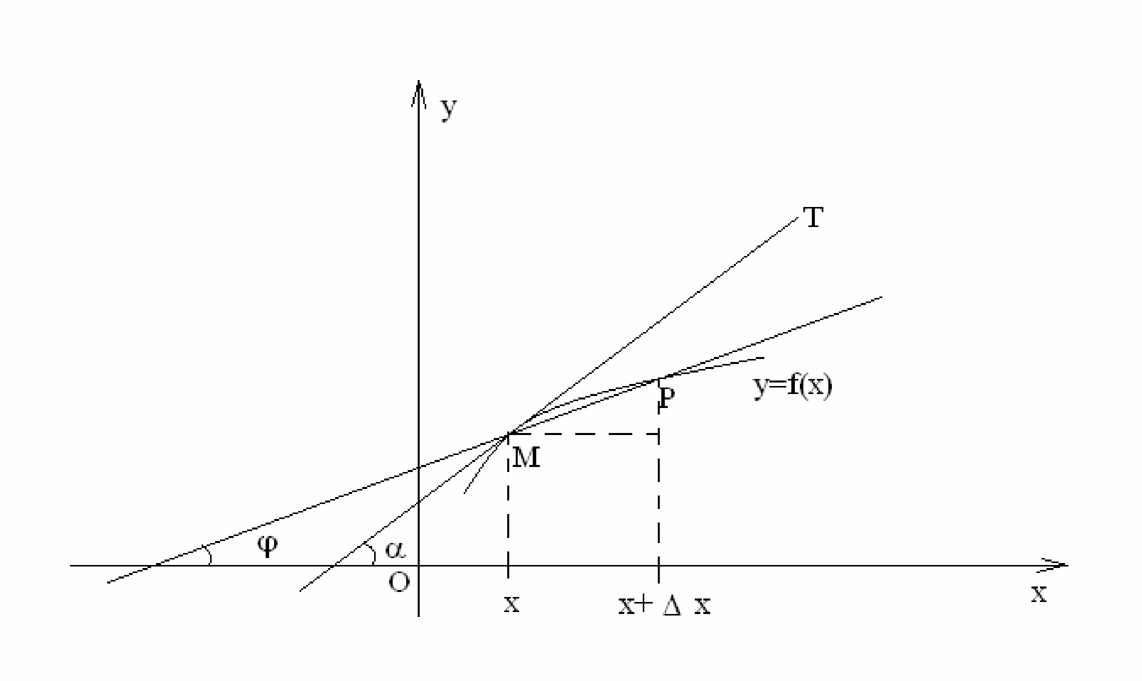


Figura 2.1

Derivata $f'\left(x\right)$ este panta tangentei la curba $y = f\left(x\right)$ în punctul de abscisă *x*.

Exerciții:

Pornind de la definiție, să se calculeze derivatele următoarelor funcții, în punctele specificate:

- □ $f(x) = \sqrt{5x+1}$ $\quad x_0 = 3$
- □ $f(x) = \ln\left(x^2 + 5x\right)$ $\quad x_0 = 1$
- □ $f(x) = tg\ x$ $\quad x_0 = \frac{\pi}{4}$

2.2 Ecuațiile tangentei şi normalei la o curbă

Tangenta Fie o curbă definită prin funcția $y = f(x)$ şi fie $M_0(x_0, f(x_0))$ un punct pe curbă. Presupunem că $f(x)$ are derivată în x_0 şi determinăm ecuația tangentei la curbă în punctul M_0.

Ecuația unei drepte care trece printr-un punct $M_0(x_0, y_0)$ este:

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

unde *k* este panta dreptei.

Panta k_T a tangentei la curba $y = f(x)$ în punctul M_0 este egală cu derivata $f'(x_0)$, astfel ecuația tangentei ia forma:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{cu} \quad y_0 = f(x_0)$$

Normala la o curbă într-un punct dat este dreapta care trece prin punct şi este perpendiculară pe tangenta la curbă în acest punct. Perpendicularitatea implică o relație între panta k_N a normalei şi panta k_T a tangentei, anume:

$$k_N = -\frac{1}{k_T} \quad \text{sau} \quad k_N = -\frac{1}{f'(x_0)}, \quad f'(x_0) \neq 0$$

Ecuația normalei la curba $y = f(x)$ în punctul $M_0(x_0, y_0)$ este:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \quad f'(x_0) \neq 0$$

Observație: Dacă $f'(x_0) = 0$, ecuația normalei este $x = x_0$

Exemplu:

Scrieți ecuațiile tangentei şi normalei la curba $y = x^2$ în punctul $O(0,0)$.

$$f(x) = x^2 \qquad f'(x) = 2x \qquad f'(0) = 0$$

Ecuația tangentei:

$$y - 0 = 0(x - 0) \quad \Rightarrow \quad y = 0$$ şi coincide cu axa Ox

Ecuația normalei:

$x = 0$ şi coincide cu axa Oy

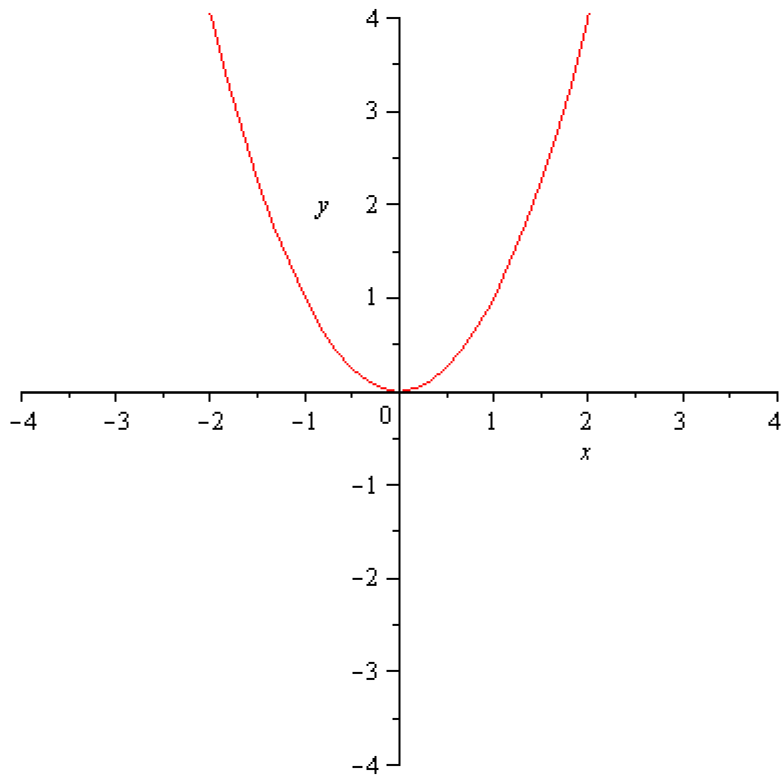


Figura 2.2 $f(x) = x^2$

Exerciții:

- □ Să se scrie ecuația tangentei la curba a cărei ecuație este $f(x) = \ln x + x^2 - 1$, în punctul (e, e^2).

□ Să se scrie ecuația normalelor la parabola care are ecuația $y = x^2 - 4x + 5$, în punctele de intersecție ale acesteia cu dreapta de ecuație $y = x + 1$.

2.3 O aplicație a derivatei în mecanică

Fie $s = s(t)$ legea mişcării rectilinii a unui punct material. Aceasta precizează distanța parcursă de punct funcție de timpul *t*. Fie

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$$

distanța parcursă de punctul material în intervalul de timp Δt.
Raportul $\Delta s / \Delta t$ defineşte *viteza medie* în intervalul Δt. *Viteza instantanee* a punctului material se defineşte ca limită a vitezei medii în intervalul Δt pentru $\Delta t \to 0$, adică

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t)$$

In concluzie, viteza $v(t)$ este egală cu derivata spațiului *s* în raport cu timpul *t*, adică $v(t) = s'(t)$.

Exemplu:

Considerăm legea mişcării rectilinii $s = t^2$, unde *s* este distanța în metri şi *t* este timpul în secunde. Calculați viteza la $t = 3s$.

$$v = s'(t) = 2t, \quad v(t) = 2t, \quad v(3) = 2 \cdot 3 = 6m/s$$

2.4 Derivate laterale

Derivata la dreapta $f'(x+0)$ a funcției $y = f(x)$ în punctul *x* este:

$$f'(x+0)=\lim_{\Delta x\to 0,\Delta x>0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

iar derivata la stânga $f'(x-0)$ a funcției $y=f(x)$ în punctul x este:

$$f'(x-0)=\lim_{\Delta x\to 0,\Delta x<0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

cu condiția ca limitele să existe.

Proprietate: Pentru ca $f'(x)$ să existe este necesar şi suficient ca funcția $y=f(x)$ să aibă derivate laterale în punctul x şi acestea să coincidă, adică

$$f'(x+0)=f'(x-0)=f'(x)$$

Exemplu:

$$f(x)=|x|$$

Considerăm $x=0$ $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\begin{cases}1,\Delta x>0\\-1,\Delta x<0\end{cases}$$

Derivatele laterale în $x=0$:

$$f'(0+0)=\lim_{\Delta x\to 0,\Delta x>0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=1$$

$$f'(0-0)=\lim_{\Delta x\to 0,\Delta x<0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=-1$$

Derivatele laterale sunt distincte. In consecință, $f(x)=|x|$ nu are derivată în $x=0$. Geometric, nu există tangentă la curba $y=|x|$ în punctul $O(0,0)$.

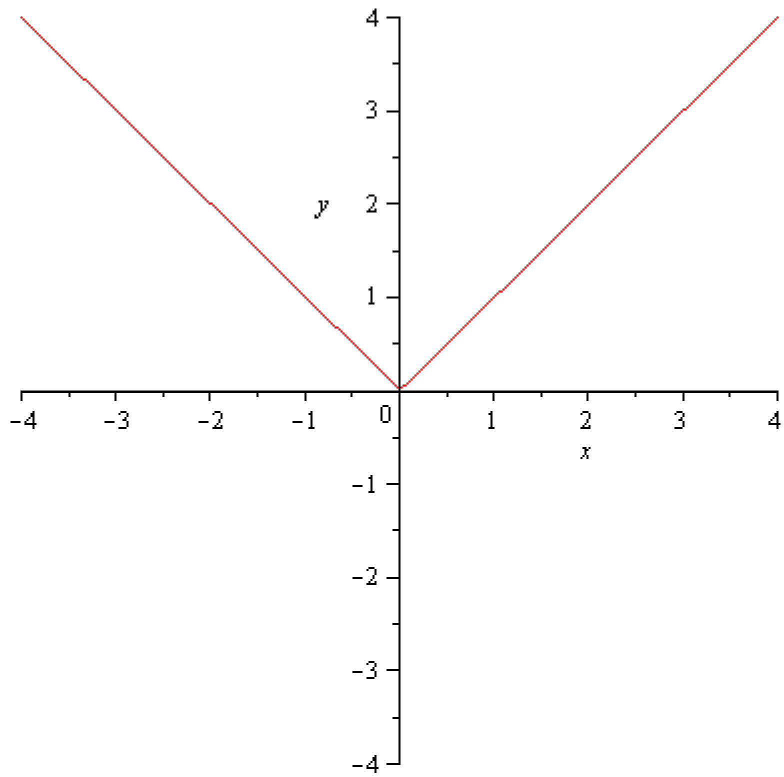


Figura 2.3 $f(x)=|x|$

Exerciții:

Să se studieze derivabilitatea următoarelor funcții:

$$f(x)=\begin{cases}\ln(1+2x), & x\in\left(-\dfrac{1}{2},0\right]\\ 2x, & x\in(0,+\infty)\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+5x+2}, & x\in[0,2]\\ \dfrac{9}{8}x+\dfrac{7}{4}, & x\in(2,+\infty)\end{cases}$$

Fie $f(x)$ o funcție *continuă* în x_0. Spunem că $f(x)$ are *derivată infinită* în x_0, dacă în acest punct are loc:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\pm\infty$$

In această situație tangenta la curba $y = f(x)$ în punctul $(x_0, f(x_0))$ este perpendiculară pe axa *Ox*.

Exemplu:

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

Considerăm $x = 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}$$

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$$

Tangenta la curba $y = \sqrt[3]{x}$ în punctul $(0,0)$ coincide cu axa *Oy*.

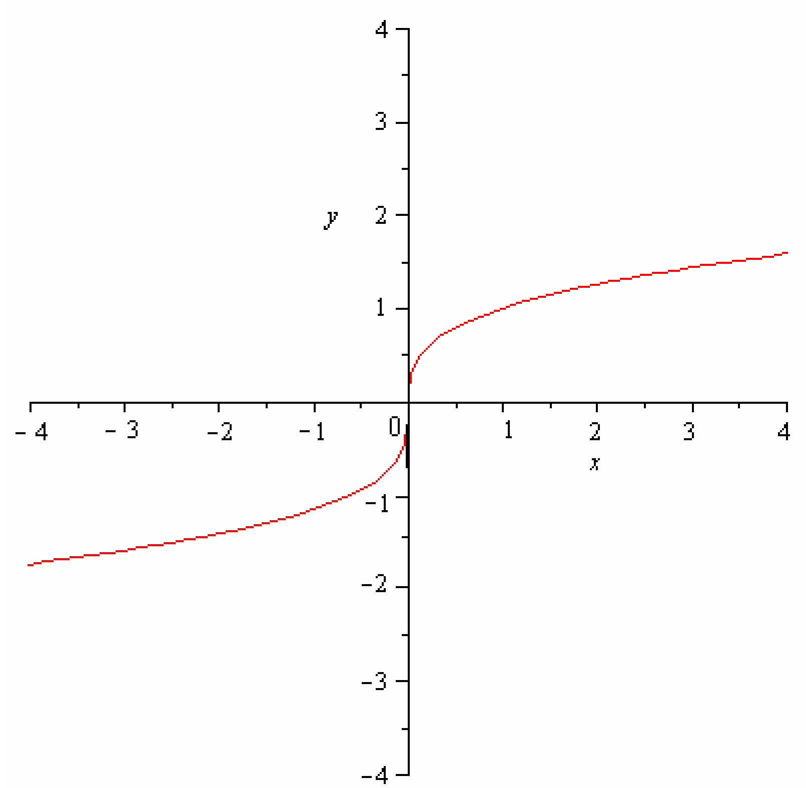


Figura 2.4 $f(x) = \sqrt[3]{x}$

De reținut: Dacă o funcție $f(x)$ are derivată finită în x_0, atunci există o tangentă la graficul $y = f(x)$ în punctul $M_0\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ şi ecuația acestei tangente este:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

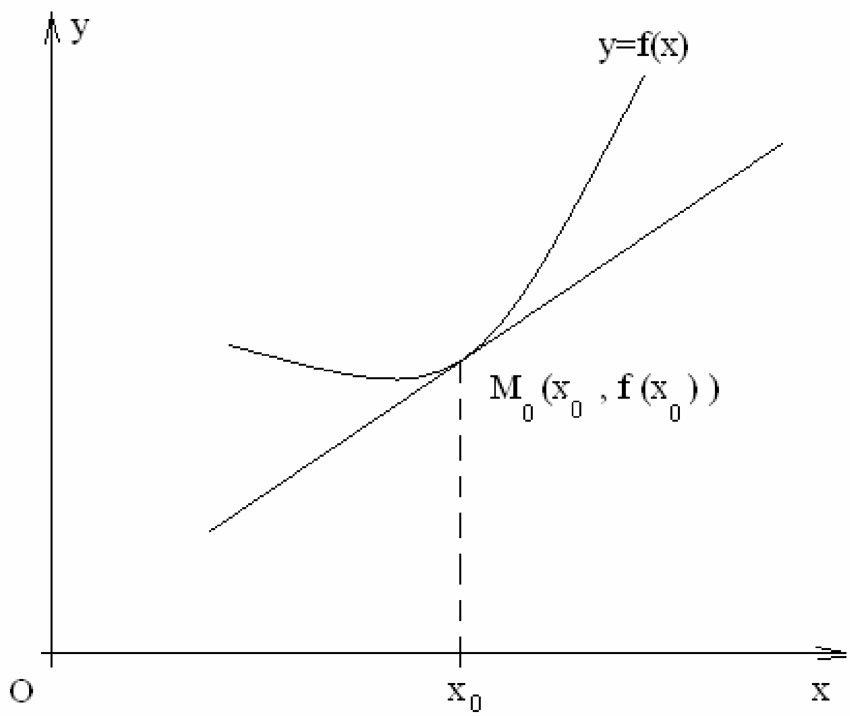


Figura 2.5

Definiție:

O funcție $f(x)$ este *netedă* pe (a,b) dacă $f(x)$ şi $f'(x)$ sunt continue pe (a,b).

Dacă o funcție $f(x)$ este continuă în x_0 şi are derivate laterale diferite în x_0, $f'(x_0 - 0) \neq f'(x_0 + 0)$, atunci în punctul $M_0\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ curba $y = f(x)$ nu admite tangentă. In această situație, curba $y = f(x)$ nu este netedă, iar prin punctul $M_0\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ trec două drepte, una tangentă la ramura stângă a curbei şi alta tangentă la ramura dreaptă a curbei. Punctul $M_0\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ se numeşte *punct unghiular*.

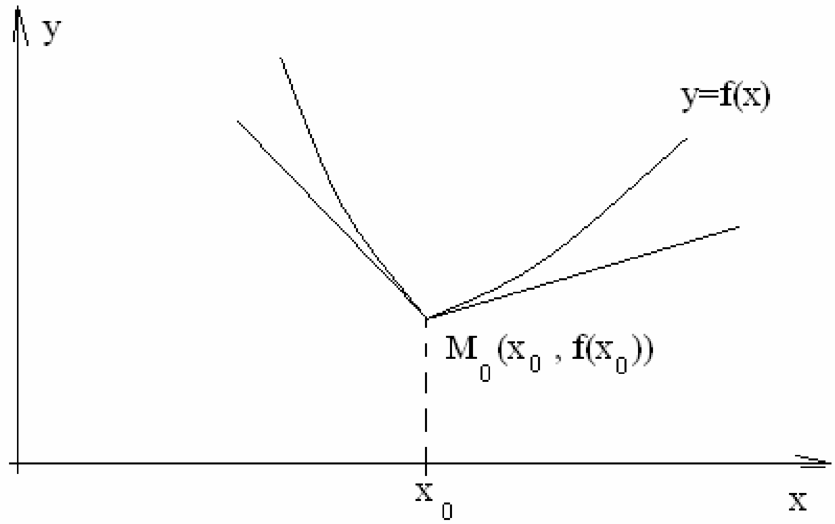


Figura 2.6

Exemplu: Funcția $y = |x|$ are un punct unghiular în $O(0,0)$

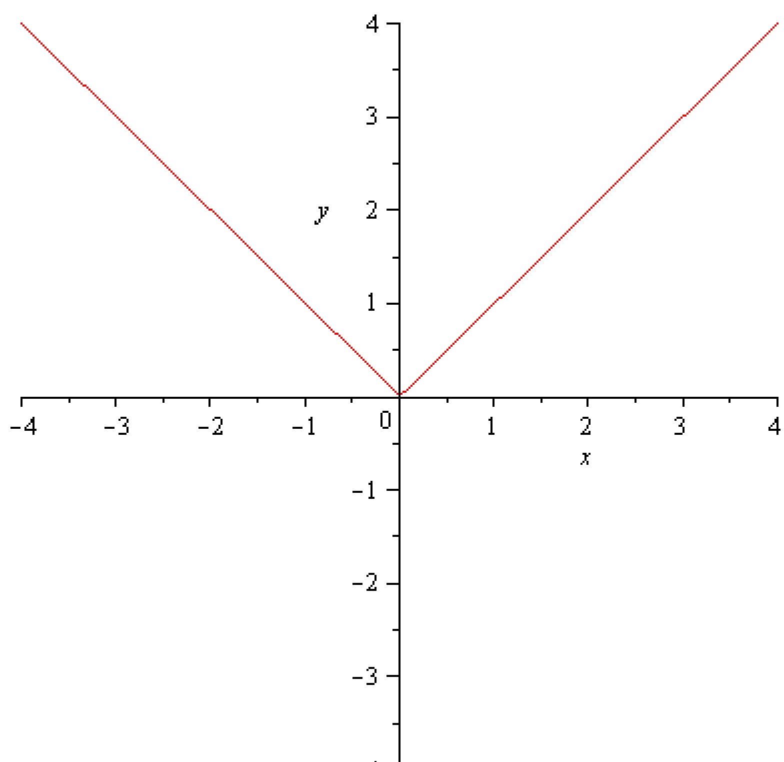


Figura 2.7 $f(x) = |x|$

Dacă o funcție $f(x)$ este continuă în x_0 şi are derivată infinită în x_0, putem distinge cazurile:

1) $f'(x_0) = +\infty$
2) $f'(x_0) = -\infty$
3) $f'(x_0 - 0) = -\infty \quad f'(x_0 + 0) = +\infty$
4) $f'(x_0 - 0) = +\infty \quad f'(x_0 + 0) = -\infty$

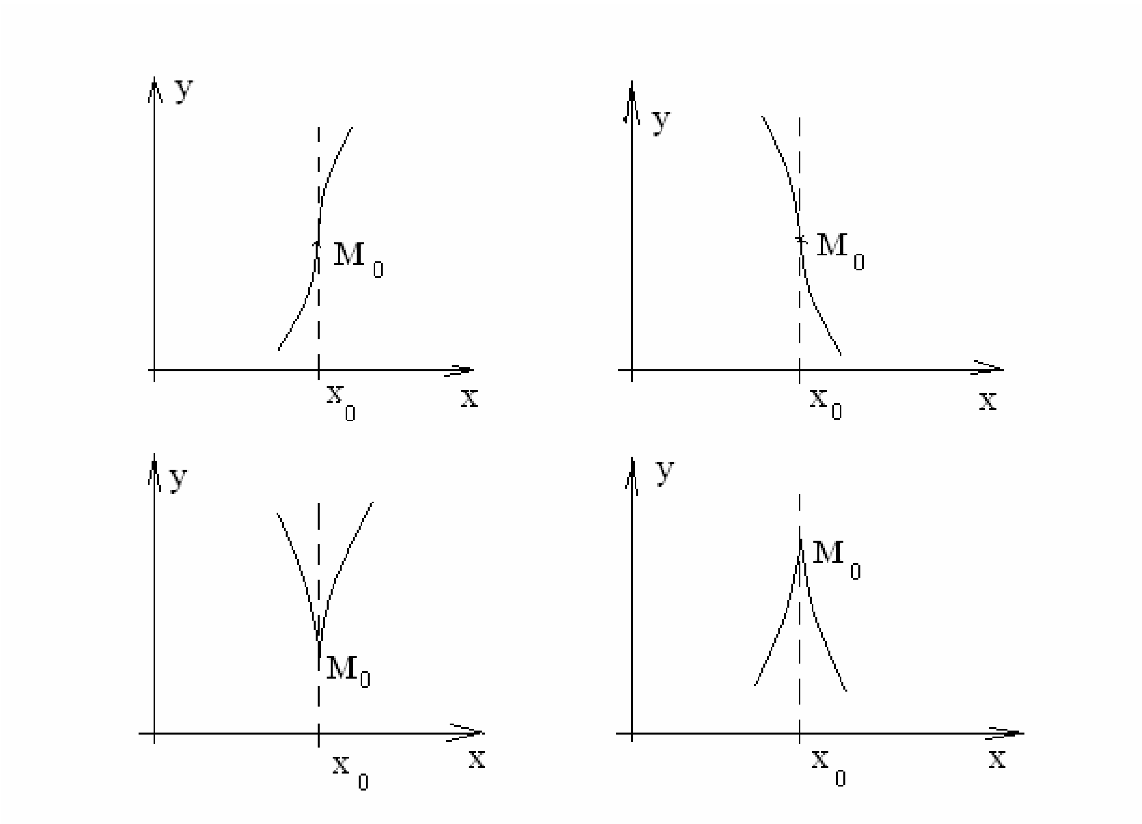


Figura 2.8

2.5 Funcții diferențiabile

Fie $f(x)$ o funcție definită pe (a,b) şi fie $x \in (a,b)$. Considerăm o creştere Δx a argumentului x astfel încât $x + \Delta x \in (a,b)$. Creşterea Δx a argumentului produce o creştere Δy pentru funcție:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Definiție: Funcția $f(x)$ se numeşte *diferențiabilă* în punctul $x \in (a,b)$ dacă creşterea funcției $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$, corespunzătoare creşterii Δx admite o reprezentare de forma

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

unde A este un număr independent de Δx, dar în general dependent de x şi $\alpha(\Delta x) \to 0$ pentru $\Delta x \to 0$.

Exemplu:

$$f(x) = x^2$$

Pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ şi $\forall \Delta x$

$$\Delta y = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x \Delta x$$

$$A = 2x \quad \alpha(\Delta x) = \Delta x$$

Cu definiția, $f(x) = x^2$ este diferențiabilă $\forall x \in \mathbb{R}$.

Teorema 1: Pentru ca o funcție $y = f(x)$ să fie diferențiabilă într-un punct x este necesar şi suficient ca funcția să aibă derivată finită $f'(x)$ în punctul x.

Demonstrație:

$\Rightarrow$ Considerăm $y = f(x)$ diferențiabilă în x $\Rightarrow$ o creştere Δx în x produce o creştere Δy a funcției care poate fi scrisă

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$$

unde A este o constantă pentru un x dat şi $\alpha(\Delta x) \to 0$ pentru $\Delta x \to 0$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A = f'(x)$$

Deci, derivata funcției în punctul x există.

$\Leftarrow$ Considerăm că funcția are derivata $f'(x)$ în punctul $x \Rightarrow \exists \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$

Cu teorema 1 de la operații cu limite avem

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$$

unde $\alpha(\Delta x) \to 0$ pentru $\Delta x \to 0$. Atunci

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

Deoarece $f'(x)$ este independent de Δx şi $\alpha(\Delta x) \to 0$ pentru $\Delta x \to 0 \Rightarrow$ funcția este diferențiabilă în x.

Observație: Această teoremă stabileşte o corespondență unu-la-unu între noțiunea de funcție diferențiabilă într-un punct şi noțiunea de funcție cu derivată finită în acelaşi punct. In consecință, operația de calcul a derivatei unei funcții se numeşte şi diferențierea unei funcții.

Continuitatea funcțiilor diferențiabile

Teorema 2: Dacă o funcție $y = f(x)$ este diferențiabilă într-un punct *x*, atunci funcția este continuă în punctul *x*.

Demonstrație:

Considerăm $y = f(x)$ diferențiabilă în $x \Rightarrow$ o creştere Δx în *x* produce o creştere Δy a funcției care poate fi scrisă

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

unde *A* este o constantă pentru un *x* dat şi $\alpha(\Delta x) \to 0$ pentru $\Delta x \to 0$.

$\Rightarrow \quad \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, adică funcția este continuă în *x*.

Reciproca nu este adevărată. Dacă $f(x)$ este continuă în *x*, nu este necesar să fie şi difereţiabilă în *x*.

Exemplu: $f(x) = |x|$ este continuă în $x = 0$, dar nu are derivată în $x = 0$, deci nu este nici diferențiabilă în acest punct.

Diferențiala

Fie $y = f(x)$ o funcție diferențiabilă în punctul *x*. Atunci o creştere Δx în *x* produce o creştere Δy a funcției care poate fi scrisă

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

unde $\alpha(\Delta x) \to 0$ pentru $\Delta x \to 0$.

Dacă $A \neq 0$, partea liniară $A\Delta x$ a lui Δy se numeşte *diferențiala* lui $y = f(x)$ şi se notează cu *dy* sau $df(x)$

$$dy = A\Delta x$$

$A\Delta x$ este *partea liniară principală* a lui Δy, deoarece $\alpha(\Delta x)\Delta x$ este un infinitezimal de ordin mai mare decât $A\Delta x$ pentru $\Delta x \to 0$.

Dacă $A = 0$, diferențiala este nulă.

Din demonstrația teoremei 1 avem $A = f'(x)$, ceea ce duce la

$$dy = f'(x)\Delta x$$

Observație: Diferențiala unei variabile independente *x* este

$$dx = \Delta x$$

Atunci, diferențiala funcției $y = f(x)$ se poate scrie:

$$dy = f'(x)dx$$

Din această scriere rezultă imediat *notația Leibniz* pentru derivată în forma unui raport de două diferențiale:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Definiție: Spunem că o funcție $y = f(x)$ este diferențiabilă pe (a,b) dacă funcția este diferențiabilă în orice punct din (a,b).

Interpretarea geometrică a diferențialei

Fie $y = f(x)$ o funcție diferențiabilă pe (a,b). Desenăm tangenta la curba $y = f(x)$ într-un punct M de abscisă x şi considerăm un punct M_1 cu abscisa $x+dx$. Desigur, $f'(x) = tg\varphi$. Considerăm triunghiul MPQ, în care

$$PQ = MP \cdot tg\varphi = f'(x)dx = dy$$

Astfel, diferențiala $dy = f'(x)dx$ a funcției $y = f(x)$ este creşterea ordonatei tangentei la curba $y = f(x)$ în M când x are creşterea dx.

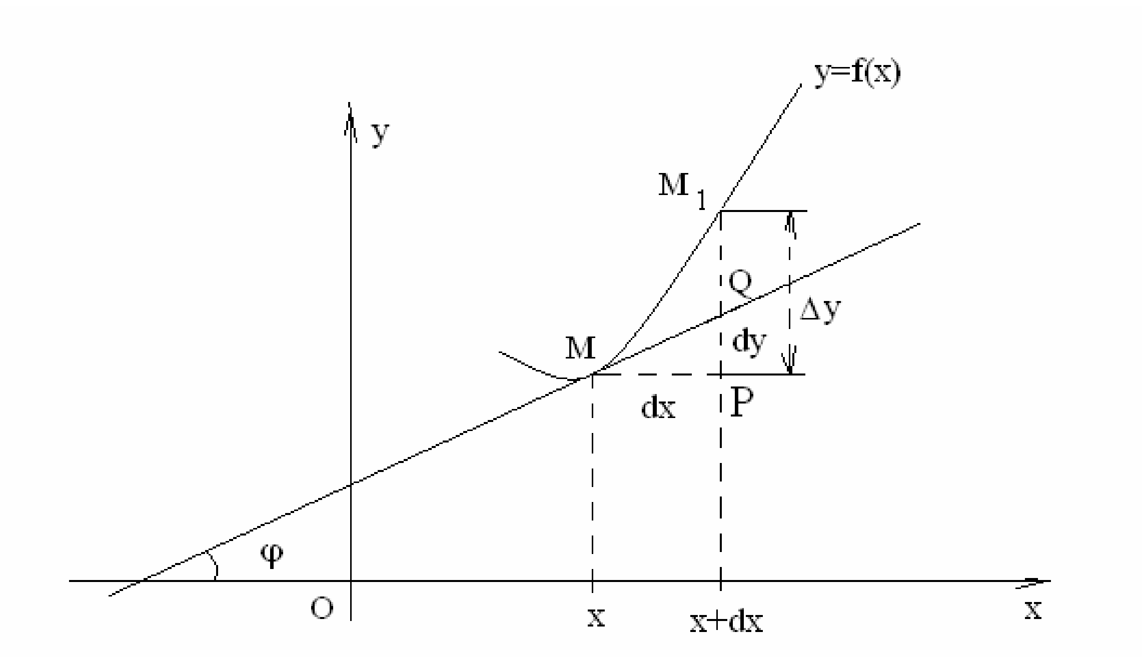


Figura 2.9

2.6 Reguli de diferențiere

□ **Derivata unei funcții constante**

Funcția $y = C = ct$, $\forall x \in (a,b)$ are derivata $y' = 0$, $\forall x \in (a,b)$.
Într-adevăr, $\forall x \in (a,b)$, $\forall \Delta x$ astfel încât $x + \Delta x \in (a,b)$, are loc

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C - C}{\Delta x} = 0, \quad \forall x \in (a,b)$$

În concluzie, $\left(C\right)' = 0$ şi $dC = 0$

□ Derivata sumei de funcţii

Fie $u\left(x\right)$ şi $v\left(x\right)$ două funcţii diferenţiabile în *x*. Atunci, suma $y\left(x\right) = u\left(x\right) + v\left(x\right)$ este şi ea diferenţiabilă în *x* şi are loc:

$$y'\left(x\right) = \left(u\left(x\right) + v\left(x\right)\right)' = u'\left(x\right) + v'\left(x\right)$$
$$d\left(u + v\right) = du + dv$$

Demonstraţie:

Cu definiţia derivatei avem:

$$\left(u + v\right)'\left(x\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u + v)(x + \Delta x) - \left(u + v\right)(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x) - u(x) - v(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}\right]$$

$$\left(u + v\right)'\left(x\right) = u'(x) + v'(x)$$

Rezultatul poate fi extins la un număr finit de funcţii diferenţiabile.

Exemplu:

$$y = e^x + x^2 + 2$$

□ Derivata produsului de funcţii

Fie $u\left(x\right)$ şi $v\left(x\right)$ două funcţii diferenţiabile în *x*. Atunci, produsul $y\left(x\right) = u\left(x\right) \cdot v\left(x\right)$ este şi el diferenţiabil în *x* şi are loc:

$$\left(u\left(x\right) \cdot v\left(x\right)\right)' = u'\left(x\right) \cdot v\left(x\right) + u\left(x\right) \cdot v'\left(x\right)$$

$$d\left(u \cdot v\right) = vdu + udv$$

Demonstrație:

Cu definiția derivatei avem:

$$\left(u \cdot v\right)'\left(x\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u \cdot v)(x+\Delta x) - \left(u \cdot v\right)(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) \cdot v(x+\Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x) + u(x+\Delta x) \cdot v(x+\Delta x) - u(x+\Delta x) \cdot v(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\left(\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}\right) v(x) + u(x+\Delta x)\left(\frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}\right)\right]$$

Cum limita sumei este suma limitelor, are loc:

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}\right) v(x) + \lim_{\Delta x \to 0} u(x+\Delta x)\left(\frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}\right)$$

$$\left(u \cdot v\right)'\left(x\right) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Unde, s-a folosit

$$\lim_{\Delta x \to 0} u\left(x + \Delta x\right) = u\left(x\right)$$

datorită continuității funcției $u(x)$. Demonstrația regulii de derivare a produsului presupune derivabilitatea funcțiilor *u* şi *v*, ceea ce implică continuitatea acestora.

Exemplu:

$$y = \left(x^2 - 2\right)\left(e^x + 2\right)$$

Observație: Un factor constant iese în fața derivatei şi diferențialei, adică

$$\left(Cu\left(x\right)\right)' = Cu'\left(x\right)$$
$$d\left(Cu\left(x\right)\right) = Cdu$$

Regula produsului poate fi generalizată la un număr finit de funcții diferențiabile:

$$\left(u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)\right)' = u_1'(x)u_2(x)\cdots u_n(x)+u_1(x)u_2'(x)\cdots u_n(x)+\ldots+u_1(x)u_2(x)\cdots u_n'(x)$$

□ **Derivata raportului de funcții**

Fie $u(x)$ şi $v(x)$ două funcții diferențiabile în x şi $v(x)\neq 0$ în x. Atunci, raportul $y(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ este şi el diferențiabil în x şi are loc:

$$y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu-udv}{v^2}, \quad v(x)\neq 0$$

Exemplu:

$$y = \frac{e^x-1}{x^2+3}$$

2.7 Derivatele unor funcții elementare

□ Funcția exponențială $y=a^x \quad (a>0,\ a\neq 1)$ definită $\forall x\in\mathbb{R}$

Pentru $\forall x$, $\forall \Delta x$, creşterea funcției este

$$\Delta y = a^{x+\Delta x}-a^x = a^x\left(a^{\Delta x}-1\right)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} a^x\,\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = a^x\ln a$$

$$\Rightarrow \quad \left(a^x\right)' = a^x\ln a$$

Caz particular: $\left(e^{x}\right)' = e^{x}$

□ Funcția logaritmică $y = \ln x$, $(x > 0)$

Pentru $\forall x$, $\forall \Delta x$, astfel încât $x + \Delta x > 0$ creşterea funcției este

$$\Delta y = \ln\left(x + \Delta x\right) - \ln x = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{x \frac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$$

Observație: $\log_a x = \log_a e \cdot \ln x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$

$$\left(\log_a x\right)' = \log_a e \left(\ln x\right)' = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x \ln a}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}$$

□ Funcția putere $y = x^{\alpha}$, $(\alpha \in \mathbb{R})$ definită $\forall x > 0$

Pentru $\forall x$, $\forall \Delta x$, creşterea funcției este

$$\Delta y = \left(x + \Delta x\right)^{\alpha} - x^{\alpha} = x^{\alpha}\left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1\right]$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} x^{\alpha} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1}{\Delta x} = x^{\alpha} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1}{x \frac{\Delta x}{x}} = x^{\alpha} \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1}{\frac{\Delta x}{x}} = x^{\alpha - 1} \alpha$$

Unde am folosit limita $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\alpha} - 1}{x} = \alpha$

$$\Rightarrow \quad \left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

□ Funcții trigonometrice $y = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$

Pentru $\forall x$, $\forall \Delta x$, creşterea funcției este

$$\Delta y = \sin\left(x + \Delta x\right) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos x$$

$$\Rightarrow \quad \left(\sin x\right)' = \cos x$$

Similar, $\qquad \left(\cos x\right)' = -\sin x$

$$\left(tg\ x\right)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x\ \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

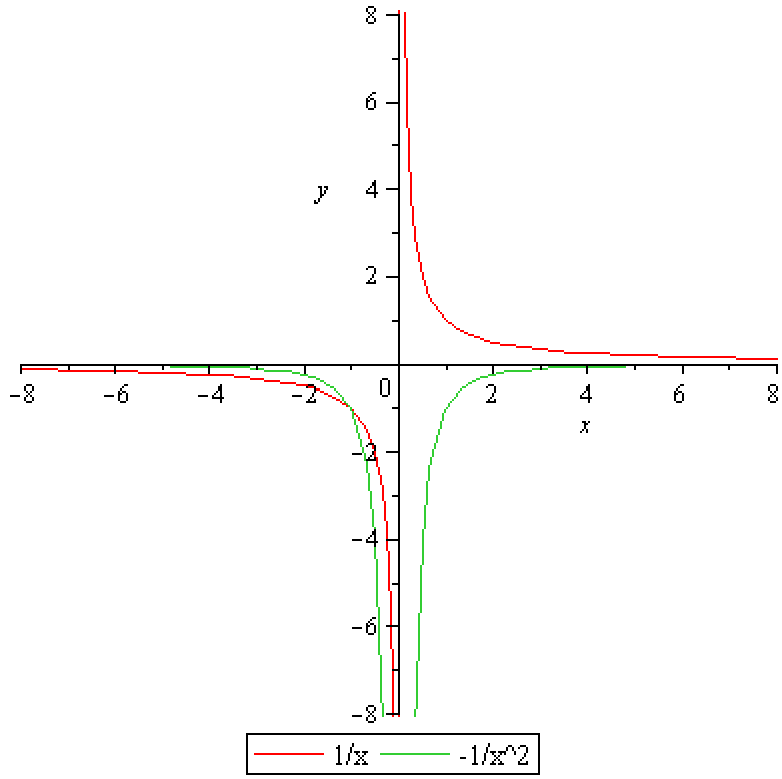
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \left(tg\ x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

Similar, $\qquad \left(ctg\ x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq n\pi$

Exercițiu:

Reprezentați grafic $f(x)=\frac{1}{x}$, $x \neq 0$ şi $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$.



Observație: Graficele funcțiilor $f(x)$ şi $f'(x)$ sunt diferite. Mai mult, $f(x)$ este funcție impară iar $f'(x)$ este funcție pară. În general, derivata unei funcții impare este o funcție pară şi vice-versa.