1.11 Noțiunea de continuitate într-un punct

Definiție: Fie $f(x)$ o funcție definită pe o vecinătate Ω a punctului x_0. Funcția $f(x)$ este *continuă în x_0* dacă:

(i) $f(x)$ are limită în x_0

(ii) limita lui $f(x)$ în x_0 este egală cu valoarea funcției în punctul x_0, $f(x_0)$

Adică

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (1)$$

Observație: Deoarece $x_0 = \lim_{x \to x_0} x$, relația precedentă se poate rescrie

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right) \qquad (2)$$

Se observă că pentru o funcție continuă simbolurile *lim* şi *f* pot fi permutate.

Definiție: (cu ε, δ) Fie $f(x)$ o funcție definită pe o vecinătate Ω a punctului x_0. Funcția $f(x)$ este *continuă în x_0* dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad (3)$$

pentru $\forall x$ care verifică $|x - x_0| < \delta$ şi $x \in \Omega$.

Cu simboluri logice, ultima definiție poate fi rescrisă:

$f(x)$ continuă în x_0 $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $\forall x \in \Omega$, $|x - x_0| < \delta$

$\Rightarrow$ $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Observații: In general $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ şi definiția continuității nu cere ca $x \neq x_0$.

Fie $y = f(x)$ o funcție definită pe o vecinătate Ω a punctului x_0.

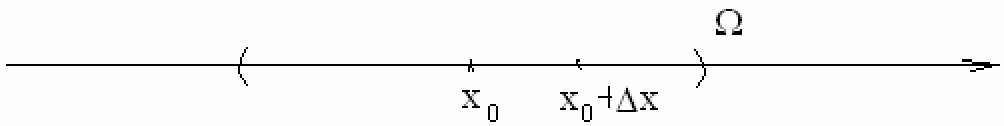


Figura 1.27

Considerăm punctul $x = x_0 + \Delta x$ din Ω, care diferă de punctul x_0 cu o cantitate pozitivă sau negativă notată Δx. Cantitatea Δx este *creşterea* sau *incrementul* argumentului x în x_0. Diferența

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \qquad (4)$$

se numeşte *creşterea* sau *incrementul* funcției $f(x)$ în x_0 corespunzător creşterii Δx a variabilei independente x.

In termeni de creşteri, continuitatea lui $f(x)$ în x_0, adică

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (5)$$

devine

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) \qquad (6)$$

Sau

$$\lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0 \qquad (7)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \qquad (8)$$

Definiție: Fie $f : \Omega \to \mathbb{R}$. $f(x)$ *continuă* în $x_0 \in \Omega$ dacă creşterea sau incrementul funcției $f(x)$ în x_0 corespunzător creşterii Δx a variabilei independente x tinde la zero pentru $\Delta x \to 0$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \qquad (9)$$

Exemplu:

$y = x^2$ este continuă în fiecare punct al dreptei reale.

Intr-adevăr, pentru orice creştere Δx a argumentului x în punctul x_0 avem

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 = (2x_0 + \Delta x)\Delta x$$

$\Rightarrow$ $\Delta y \to 0$ pentru $\Delta x \to 0$ $\Rightarrow$ funcția este continuă în fiecare punct x_0 al dreptei reale.

Definiție: (cu şiruri) Fie $f : E \to \mathbb{R}$ şi fie $x_0 \in E$. $f(x)$ *continuă* în $x_0 \in E$ dacă pentru orice şir $\{x_n\}$, $x_n \in E$ convergent la x_0, şirul corespunzător imagine $\{f(x_n)\}$ converge la $f(x_0)$.

Exemplu: Funcția Dirichlet este discontinuă în orice punct.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Intr-adevăr, fie x_0 un număr irațional cu $f(x_0) = 0$ şi oricare ar fi x_0, există un şir $\{x_n\}$ de numere raționale care converge la x_0. Dar, cu definiția funcției $f(x_n) = 1$, $\forall n$

$\Rightarrow$ şirul $\{f(x_n)\} = \{1\}$ converge la unu şi deci $\{f(x_n)\}$ nu converge la $f(x_0)$

In concluzie, funcția nu este continuă în x_0 irațional. Analog se verifică faptul că funcția nu este continuă în x_0 rațional.

Proprietăți ale funcțiilor continue într-un punct

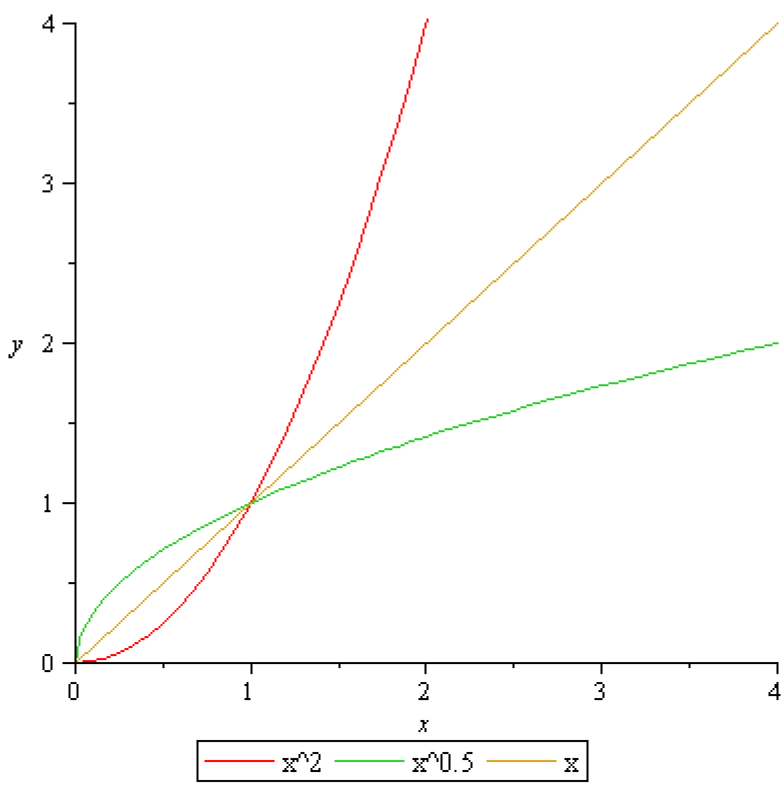
Teorema 1: Dacă o funcție $f(x)$ este continuă în x_0 şi dacă $f(x_0) > A$ (sau $f(x_0) < A$), atunci $\exists\delta$ astfel încât $f(x) > A$ (sau $f(x) < A$) pentu $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Teorema 2: Dacă o funcție $f(x)$ este continuă în x_0 şi dacă $f(x_0) \neq 0$, atunci există o vecinătate $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ a lui x_0 astfel încât $f(x)$ nu se anulează şi are semn constant pe toată vecinătatea.

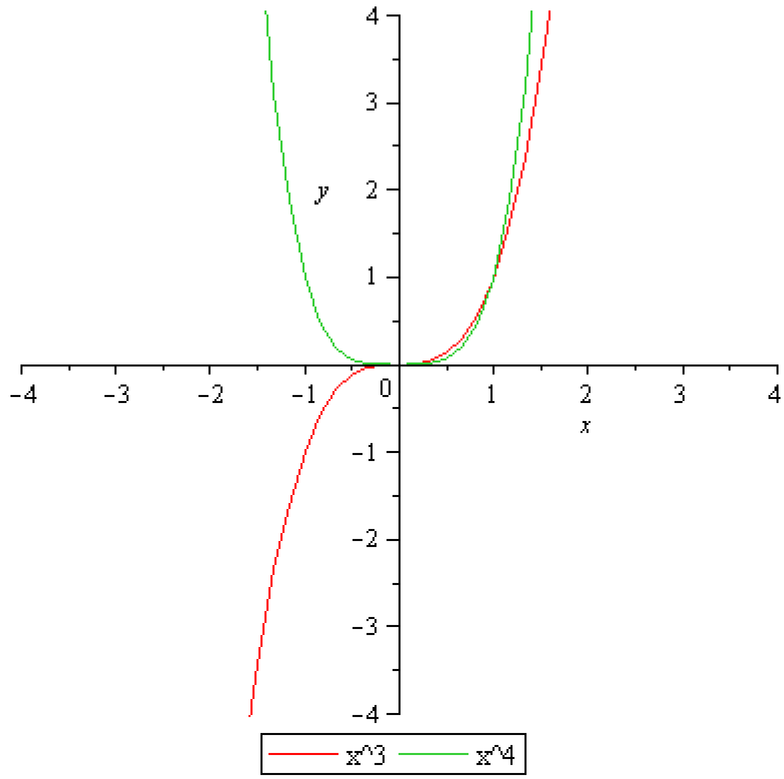
Continuitatea funcțiilor elementare

Funcțiile *elementare de bază* sunt:

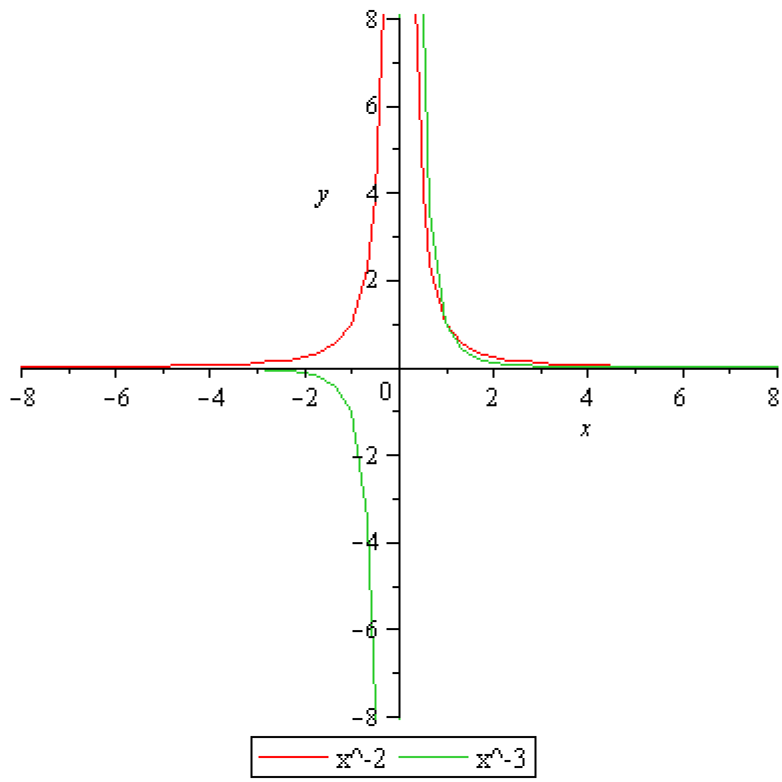
1) Funcția putere $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in R$, $x > 0$



Dacă exponenții sunt numere întregi pozitive, atunci funcția putere este definită pe toată dreapta reală. De exemplu:



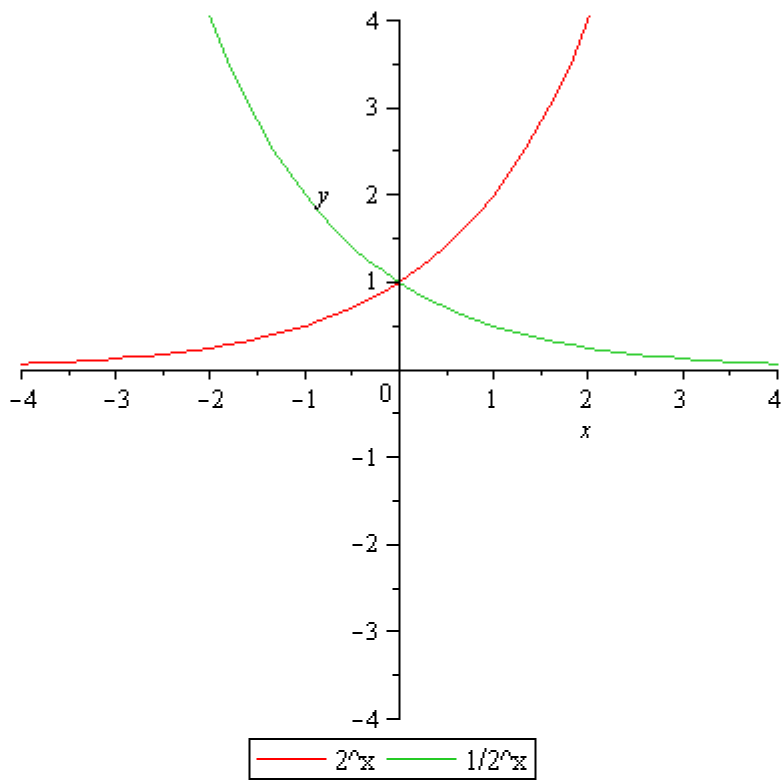
Dacă exponenții sunt numere întregi pozitive, atunci funcția putere este definită pe dreapta reală, fără zero. De exemplu:



Dacă $\alpha = \pm \frac{p}{q}$ cu p,q întrgi pozitivi, atunci funcția putere este definită pe $\mathbb{R}$ pentru q impar şi pe $[0, +\infty)$ pentru q par.

2) Funcția exponențială $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in R$

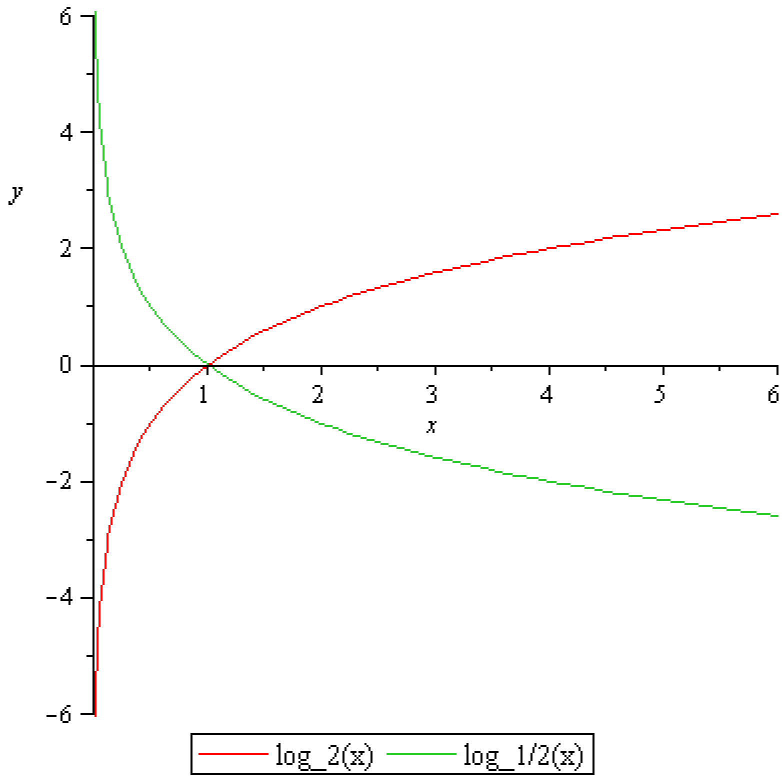
Este monoton crescătoare pentru $a > 1$ şi monoton descrescătoare pentru $a \in (0,1)$.
Pentru bază supraunitară, $2 \in (1, +\infty)$ în exemplul de mai jos, funcția este crescătoare, iar pentru bază subunitară, $1/2 \in (0,1)$ în exemplul de mai jos, funcția este descrescătoare.



3) Funcția logaritmică $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$

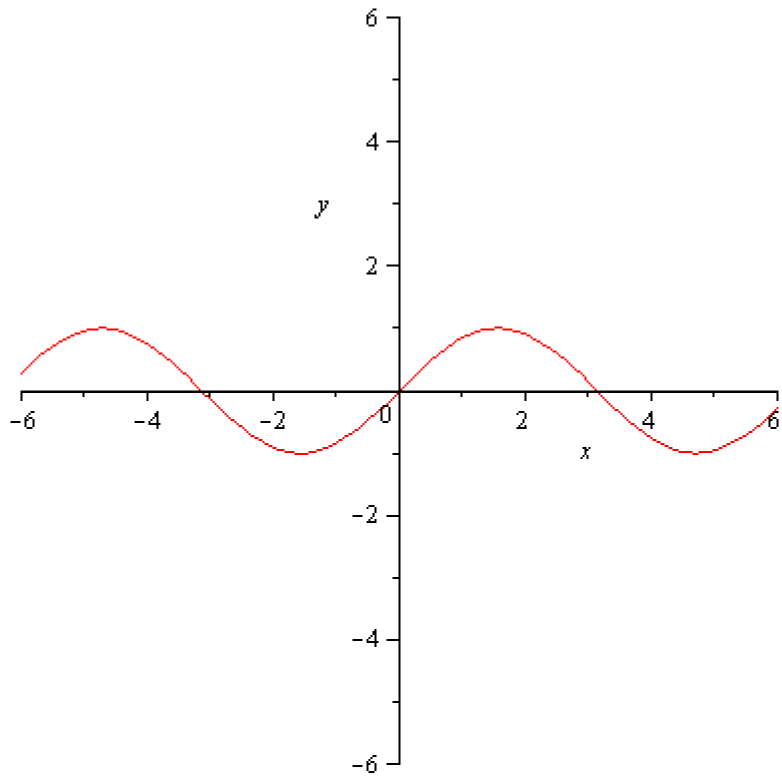
Este monoton crescătoare pentru $a > 1$ şi monoton descrescătoare pentru $a \in (0,1)$.

Observație: În figura de mai jos baza logaritmului este o dată supraunitară, anume $2 \in (1, +\infty)$, deci funcția logaritmică considerată va fi una crescătoare şi apoi subunitară adică $\frac{1}{2} \in (1, \infty)$ şi funcția va fi una descrescătoare.

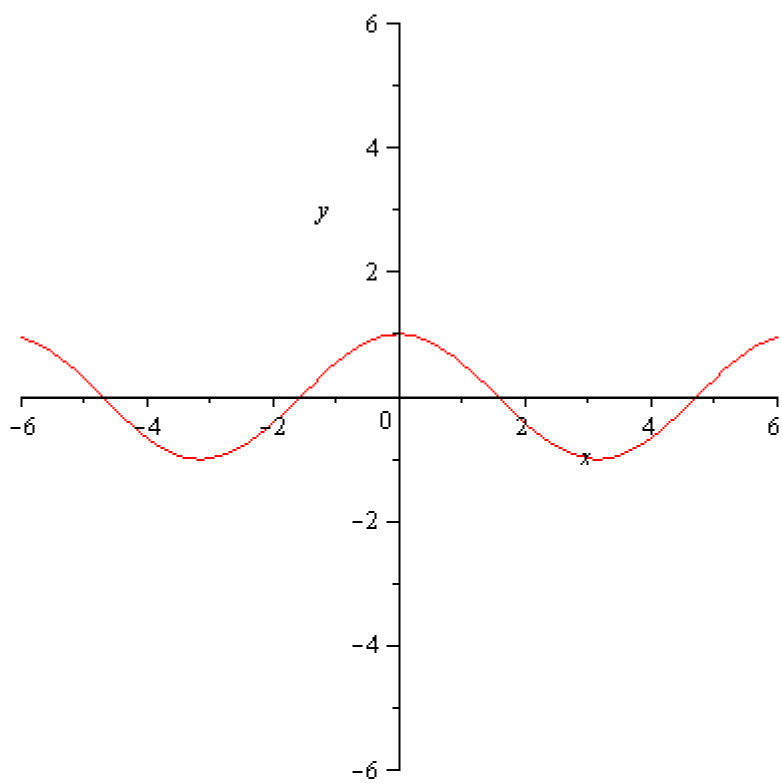


4) Funcțiile trigonometrice

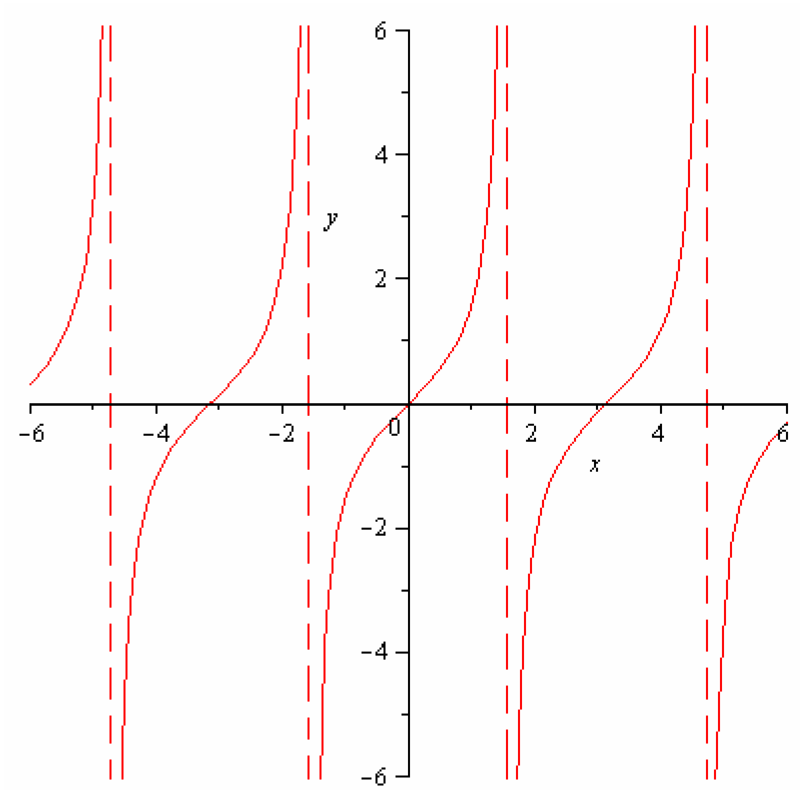
a) $y = \sin x$, $x \in R$, o funcție periodică cu perioada $T = 2\pi$



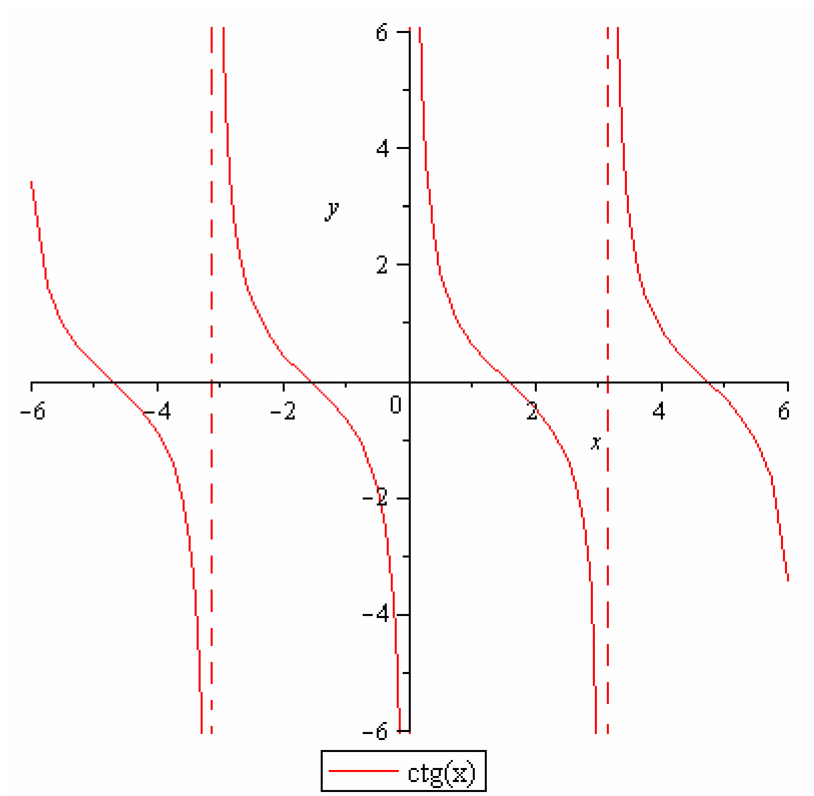
b) $y = \cos x$, $x \in R$, o funcție periodică cu perioada $T = 2\pi$



c) $y = tgx$, $x \in R - \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \right\}$

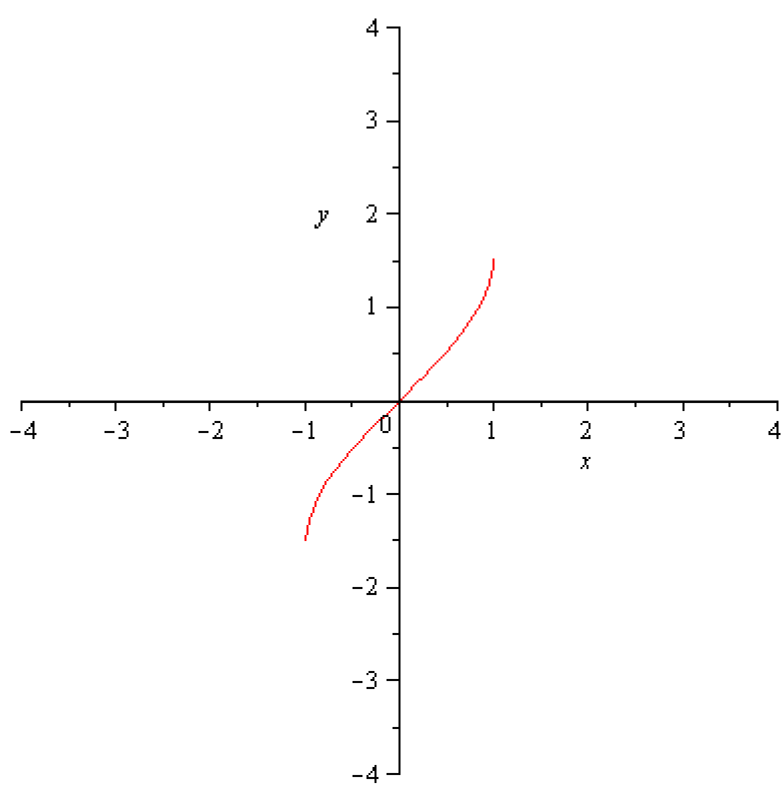


d) $y = ctgx$, $x \in R - \{ n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \}$

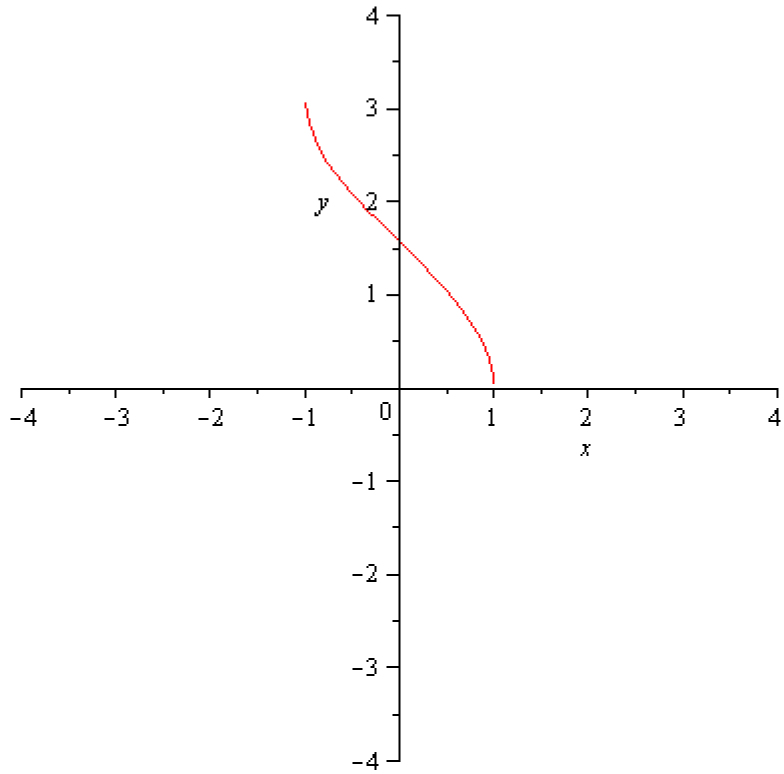


5) funcțiile trigonometrice inverse:

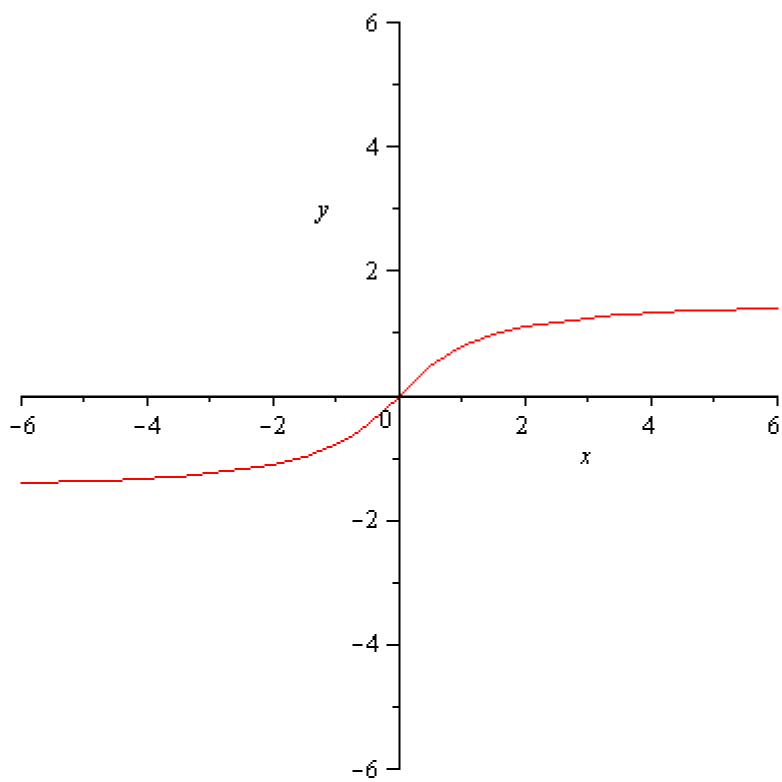
a) $y = \arcsin x$, $x \in [-1,+1]$



b) $y = \arccos x$, $x \in [-1, +1]$



c) $y = arctgx$, $x \in R$



d) $y = arcctgx$, $x \in R$

Obsevație: Funcțiile obținute din acestea, printr-un număr finit de operații aritmetice și prin compuneri funcție de funcție, se numesc *funcții elementere*.

Proprietate: Funcțiile elementare de bază sunt *continue* în fiecare punct al domeniului de definiție.

Operații cu funcții continue într-un punct

Teorema 3: Fie $f(x)$ și $g(x)$ două funcții definite pe o vecinătate a punctului x_0. Dacă $f(x)$ și $g(x)$ sunt continue în x_0 , atunci suma $f(x)+g(x)$, diferența $f(x)-g(x)$, produsul $f(x)\cdot g(x)$ și raportul $f(x)/g(x)$ cu $g(x_0)\neq 0$ sunt continue în x_0.

Exerciții:

Să se arate că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

Calculați: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{5x}$

1.12 Funcții compuse

Fie E o mulțime de numere reale și fie $u=\varphi(x)$ o funcție definită pe E. Notăm cu E_1 mulțimea de valori a funcției u pentru $x \in E$. Mai mult, fie $y = f(u)$ o funcție definită pe E_1. Atunci, la fiecare $x \in E$ îi corespunde un $u \in E_1$, care la rândul său este asociat cu o valoare $y = f(u)$. Astfel, valoarea y este o funcție de x și este definită pe E. Spunem că y este o *funcție compusă* de x și scriem

$$y = f[\varphi(x)]$$

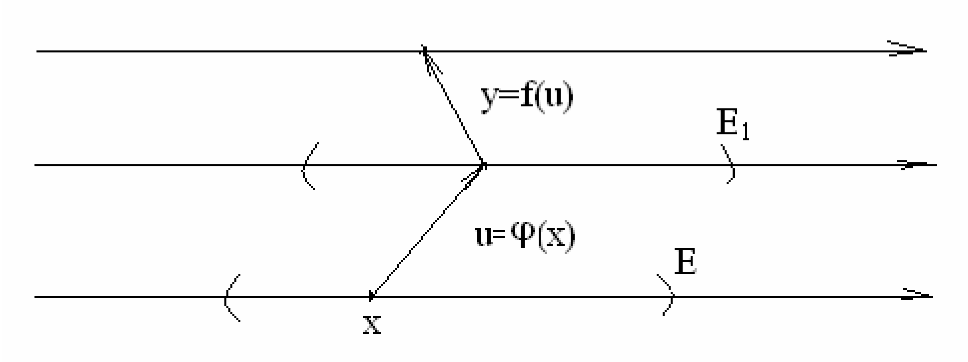


Figura 1.28

Exemple: $u = \sin x$ şi $y = e^{u}$ atunci $y = e^{\sin x}$ este o funcţie compusă de *x*.

$u = 10x$ şi $y = \sin u$ atunci $y = \sin(10x)$ este o funcţie compusă de *x*.

Teorema 1: Dacă $u = \varphi(x)$ are $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = A$ şi dacă $y = f(u)$ este o funcţie continuă în punctul $u = A$, atunci funcţia compusă $y = f[\varphi(x)]$ are limita $f(A)$ în punctul x_0, adică

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = f(A)$$

sau echivalent

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = f\left[\lim_{x \to x_0} \varphi(x)\right]$$

Observaţie: Această ultimă relaţie indică regula de calcul a limitei unei funcţii compuse.

Exemplu:

$$\lim_{x \to o} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Intr-adevăr, $y = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$ este o funcţie compusă din $y = \ln u$ şi $u = (1+x)^{\frac{1}{x}}$. Deoarece $\lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ şi $y = \ln u$ este continuă în $u = e$, teorema 1 implică

$$\lim_{x\to o}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln e=1$$

Teorema 2: Fie $u=\varphi(x)$ o funcție continuă în x_0 şi fie $y=f(u)$ o funcție continuă în $u_0=\varphi(x_0)$. Atunci, funcția compusă $y=f[\varphi(x)]$ este continuă în x_0.

Exerciții: Exercițiile următoare folosesc

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \text{ şi } \lim_{x\to x_0}\left(1+\alpha(x)\right)^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e \text{ dacă } \lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0 \text{ şi } \alpha(x)\neq 0\,, x\neq x_0$$

- ☐ $\lim_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{ctg^2 x}$
- ☐ $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$
- ☐ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$
- ☐ $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{x}$
- ☐ $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{3x}$
- ☐ $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin nx}$

1.13 Puncte de discontinuitate

Fie $f(x)$ o funcție definită pe o vecinătate a punctului x_0. Dacă $f(x)$ este continuă în x_0, atunci

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

sau în termeni de limite laterale

$$\lim_{x\to x_0, x<x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0, x>x_0} f(x)=f(x_0)$$

Definiție: O funcție $f(x)$ are o *discontinuitate* în punctul x_0 dacă $f(x)$ nu este continuă în x_0 şi x_0 se numeşte *punct de discontinuitate*.

Observație: Funcția poate să nu fie definită în punctul de discontinuitate.

Clasificarea punctelor de discontinuitate

Definiție: Punctul x_0 este *punct de discontinuitate care poate fi înlăturată* pentru funcția $f(x)$ dacă funcția are limite laterale egale în x_0 dar diferite de $f(x_0)$, adică

$$\lim_{x\to x_0, x<x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0, x>x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

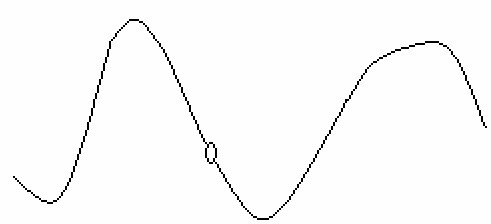


Figura 1.29

Observație: Este suficient să modificăm funcția doar în punctul x_0 astfel încât funcția să devină continuă în punctul x_0 .

Dacă $f(x)$ are în punctul x_0 o discontinuitate care poate fi înlăturată, atunci funcția

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0 \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x), & x = x_0 \end{cases}$$

numită *prelungita prin continuitate* a funcției $f(x)$ în x_0, este continuă în punctul x_0. Discontinuitatea din x_0 a fost înlăturată modificând valoarea lui $f(x)$ în punctul x_0.

Exemplu:

$$f(x)=\begin{cases}|x|, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}$$

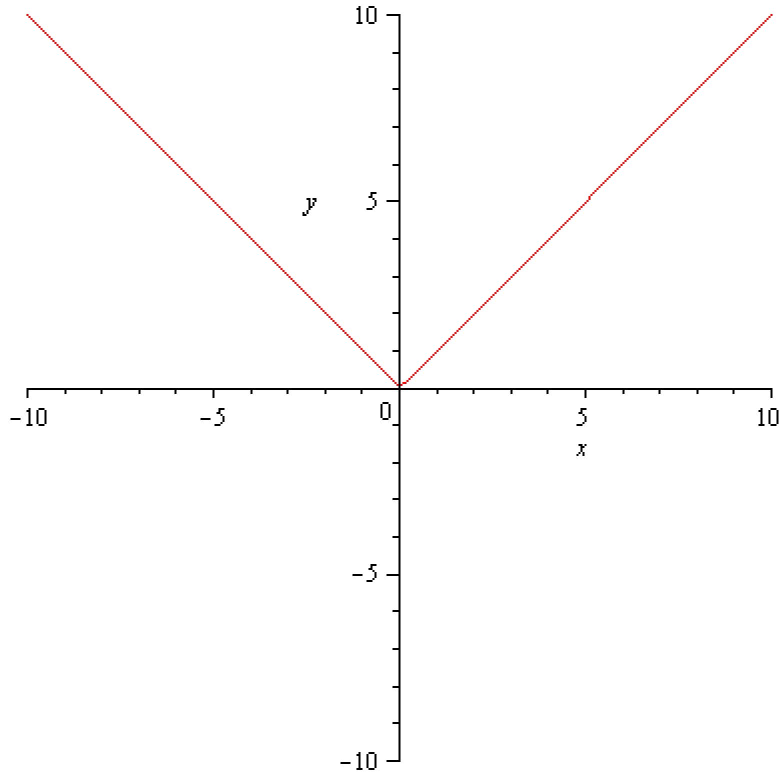


Figura 1.30

$$\lim_{x\to 0, x<0} f(x)=\lim_{x\to 0, x>0} f(x)=0\neq 1=f(0)$$

$\Rightarrow$ $x=0$ este discontinuitate care poate fi înlăturată. Dacă modificăm funcția în $x=0$, considerând $f(0)=0$, atunci $F(x)=|x|$ este continuă în $x=0$.

Definiție: Dacă limitele laterale ale lui $f(x)$ în x_0 sunt finite şi diferite, adică

$$\lim_{x\to x_0, x<x_0} f(x)\neq \lim_{x\to x_0, x>x_0} f(x)$$

Atunci punctul x_0 este o discontinuitate în care funcția are *un salt*. Saltul funcției în punctul x_0 este

$$f(x_0+0)-f(x_0-0)$$

Exemplu:

$$f(x)=\frac{2}{1+e^{1/x}}, \quad x\neq 0 \quad \text{şi} \quad f(0)=1$$

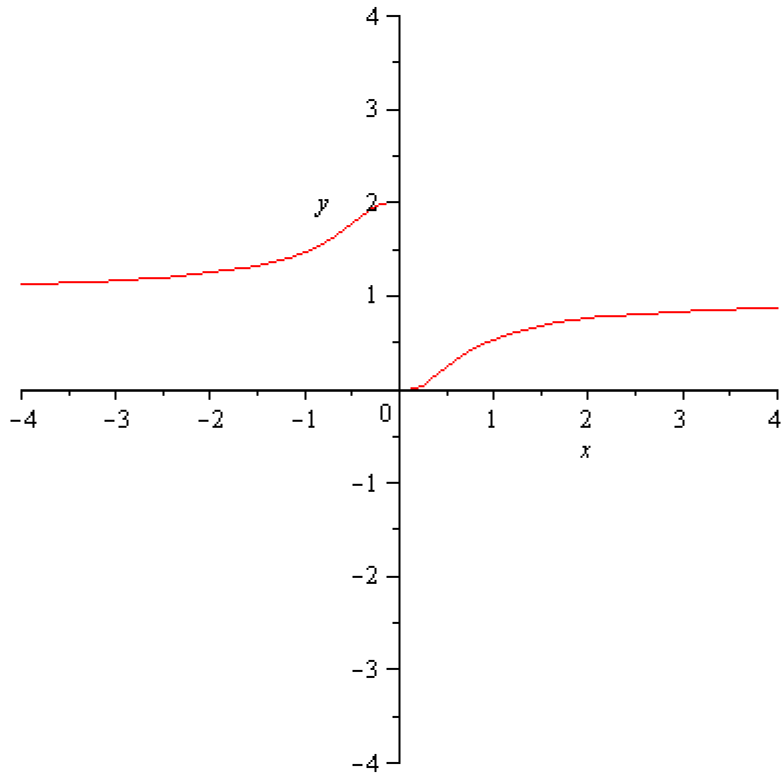


Figura 1.31

Această funcţie are salt în $x=0$ deoarece $\lim\limits_{x\to 0, x<0} f(x)=2$ şi $\lim\limits_{x\to 0, x>0} f(x)=0$

Punctele de discontinuitate care pot fi înlăturate şi punctele în care funcţia are salt se numesc *puncte de discontinuitate de speța I*. Toate celelalte sunt *puncte de discontinuitate de speța II*. In punctele de discontinuitate de speta I limitele laterale există şi sunt finite. In punctele de discontinuitate de speța II, limita la stânga şi (sau) limita la dreapta fie nu există fie sunt infinite.

Exemple:

1. $f(x)=\frac{1}{x}$, $x\neq 0$ punctul $x=0$ este o discontinuitate de speța II, limitele laterale în $x=0$ sunt infinite.

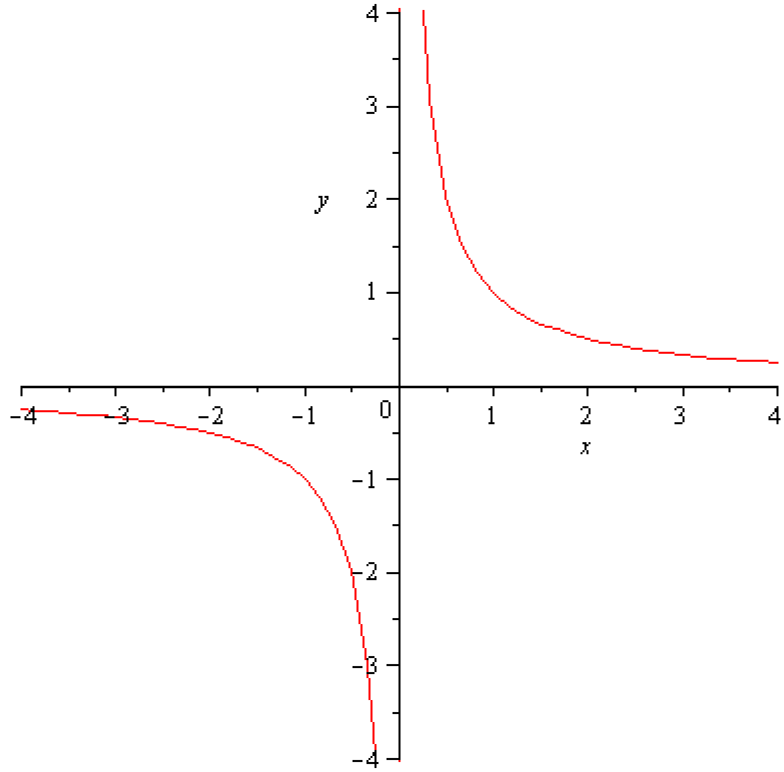


Figura 1.32 $f(x) = 1/x$

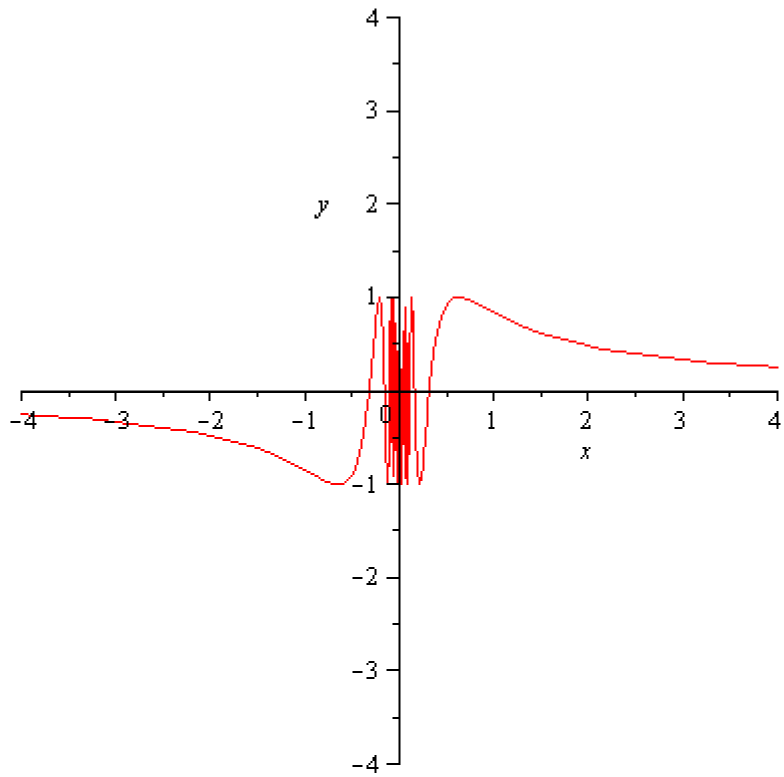


Figura 1.33 $f\left(x\right) = \sin(1/x)$

2. $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $x\neq 0$ punctul $x=0$ este o discont. de speța II, limitele laterale nu există în $x=0$.

3. Pentru funcția Dirichlet, toate punctele reale sunt discontinuități de speța II.

Continuitate laterală

Definiție: Spunem că funcția $f(x)$ este *continuă la stânga* în x_0, dacă

$$\lim_{x\to x_0, x<x_0} f(x)=f(x_0)$$

şi este *continuă la dreapta* în x_0, dacă

$$\lim_{x\to x_0, x>x_0} f(x)=f(x_0)$$

Proprietate: $f(x)$ este continuă în x_0 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ este continuă la stânga şi la dreapta în x_0.

Exerciții:

- Să se studieze continuitatea funcțiilor:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x+2}}}, & x\neq -2\\ 0, & x=-2\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}arctg\dfrac{\pi}{2-x}, & x\neq 2\\ \alpha, & x=2\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{|x|}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

☐ Fie

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & x\in[0,1]\\ 3ax+3, & x\in(1,2]\end{cases}$$

Să se determine constanta *a*, astfel încât funcția să fie continuă pe segmentul $[0,2]$. Să se reprezinte grafic funcția obținută.

1.14 Continuitate pe un interval închis

O funcție $f(x)$ este continuă pe un interval deschis (a,b) dacă $f(x)$ este continuă în fiecare punct al intervalului. Notăm mulțimea tuturor funcțiilor continue pe un interval deschis (a,b) cu $C(a,b)$.

O funcție $f(x)$ este continuă pe un interval închis $[a,b]$ dacă $f(x)$ este continuă pe un interval deschis (a,b) şi dacă funcția este continuă la stânga în *b* şi la dreapta în *a*. Notăm mulțimea tuturor funcțiilor continue pe un interval închis $[a,b]$ cu $C[a,b]$.

Teorema 1: Fie $f(x)$ o funcție continuă pe un interval închis $[a,b]$ şi fie $f(a)$ şi $f(b)$ două numere cu semne diferite. Atunci există cel puțin un punct $c\in(a,b)$ astfel încât $f(c)=0$.

Interpretare geometrică: Dacă $f(a)f(b)<0$, atunci punctele $(a,f(a))$ şi $(b,f(b))$ sunt în semiplane diferite relativ la axa *x* şi graficul funcției continue $f(x)$ intersectează axa *x* în cel puțin un punct.

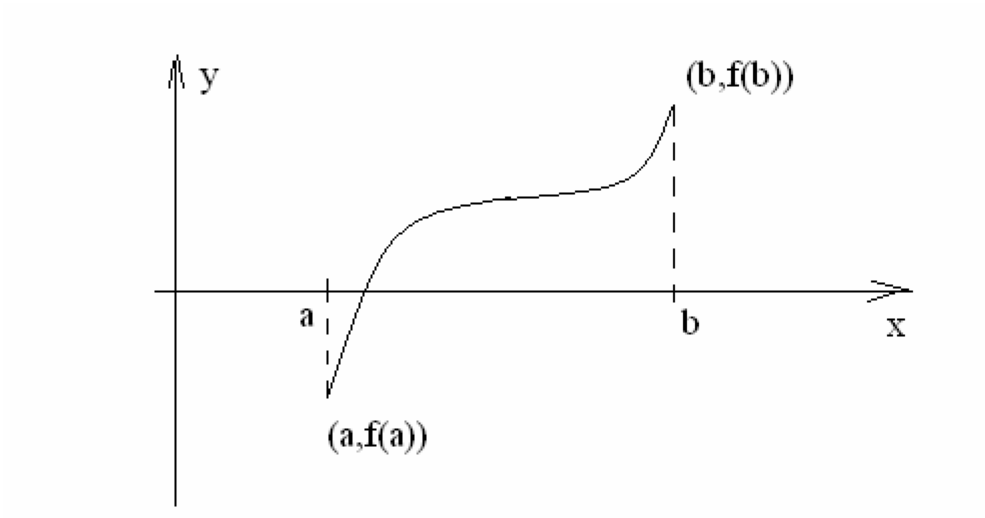


Figura 1.34

Aplicație: Considerăm o ecuație polinomială de grad impar cu coeficienți reali.

$$P_{2n+1}(x) = a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \ldots + a_{2n+1} = 0$$

Presupunem $a_0 > 0$.

$$\lim_{x \to +\infty} P_{2n+1}(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} P_{2n+1}(x) = -\infty$$

Deoarece funcția polinomială este continuă pe $\mathbb{R}$, polinomul $P_{2n+1}(x)$ se anulează în cel puțin un punct. In concluzie, polinomul de grad impar cu coeficienți reali are cel puțin o rădăcină reală.

Observație: Teorema 1 poate fi folosită pentru a determina dacă un polinom are rădăcini reale, iar în caz afirmativ să determinăm valorile aproximative ale acestora.

Exemplu:

$$P_3(x) = x^3 + x - 1$$

Polinomul are grad impar, deci are cel puțin o rădăcină reală.

$$P_3(0) = -1 < 0 \qquad P_3(1) = +1 > 0$$

La capetele intervalului $[0,1]$ polinomul $P_3(x)$ ia valori cu semne opuse $\overset{Teorema 1}{\Rightarrow}$ polinomul are o rădăcină reală în $(0,1)$.

Mijlocul intervalului este $\xi_1 = \frac{1}{2}$ și $P_3\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8} < 0 \quad P_3(1) = 1 > 0$

$\Rightarrow$ rădăcina căutată este în intervalul $\left(\frac{1}{2},1\right)$

Mijlocul acestui nou interval este $\xi_2 = \frac{3}{4}$ și $P_3\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{11}{64} > 0 \quad P_3\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8} < 0$

$\Rightarrow$ rădăcina căutată este în intervalul $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$

Procesul poate continua şi obţinem un şir de intervale deschise cu lungimi din ce în ce mai mici. Cu fiecare pas eroarea absolută în stabilirea rădăcinii scade.

Teorema 2 (a valorilor intermediare)**:**

Fie $f(x)$ o funcție continuă pe un interval închis $[a,b]$ şi fie $f(a) = A$ şi $f(b) = B$. Dacă C este orice număr dintre A şi B, atunci există cel puțin un punct $\alpha \in (a,b)$ astfel încât $f(\alpha) = C$. Cu alte cuvinte, dacă $f(x)$ este continuă pe $[a,b]$ atunci ia toate valorile intermediare dintre $f(a)$ şi $f(b)$, adică funcția are proprietatea lui Darboux.

Demonstrație:

Considerăm funcția $\varphi(x) = f(x) - C$ şi fixăm $A < B$ şi $A < C < B$. Funcția $\varphi(x)$ este continuă pe $[a,b]$ şi

$$\varphi(a) = f(a) - C = A - C < 0$$

$$\varphi(b) = f(b) - C = B - C > 0$$

$\overset{Teorema 1}{\Rightarrow} \quad \exists \alpha \in (a,b)$ atfel încât $\varphi(\alpha) = f(\alpha) - C = 0 \quad \Rightarrow \quad f(\alpha) = C$

Interpretare geometrică: Este evidențiată în figura 1.35.

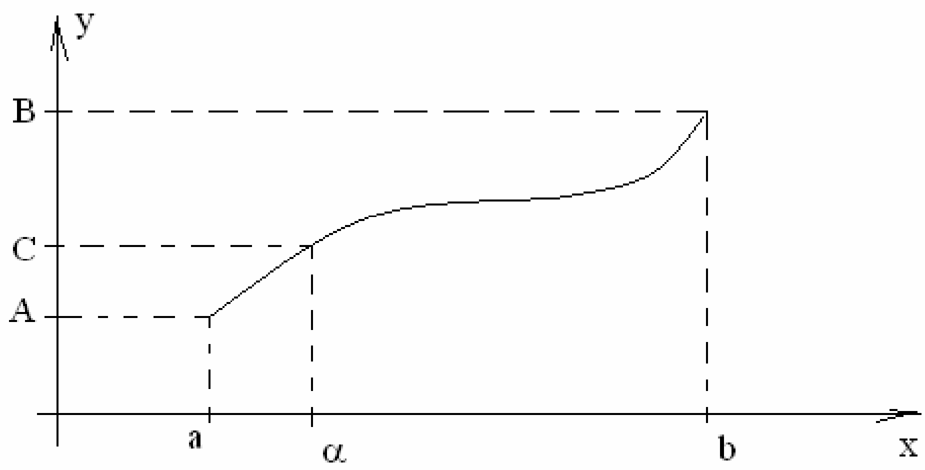


Figura 1.35

Teorema 3 Dacă $f(x)$ este o funcție continuă pe un interval închis $[a,b]$, atunci $f(x)$ este mărginită pe intervalul închis $[a,b]$, adică există un număr $K>0$ astfel încât

$$|f(x)| \le K, \quad \forall x \in [a,b]$$

Observație: Ipoteza de continuitate pe interval *închis* este foarte importantă în enunțul acestei teoreme. De exemplu, funcția $f(x)=\frac{1}{x}$, $x \in (0,1]$ este continuă pe $(0,1]$ dar nu este mărginită pe $(0,1]$.

Teorema 4 Dacă $f(x)$ este o funcție continuă pe un interval închis $[a,b]$, atunci $f(x)$ își atinge infimum și supremum pe $[a,b]$, adică $\exists \xi, \eta \in [a,b]$ astfel încât

$$f(\xi) = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$$

$$f(\eta) = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$$

În această situație $f(\xi) \le f(x) \le f(\eta)$, $\forall x \in [a,b]$.

Pentru a sublinia importanța ipotezelor din această teoremă, considerăm următoarele exemple:

Exemple:

1. $f(x) = x$, $x \in (0,1)$

$f(x) = x$ continuă pe $(-1,1)$

Nu-şi atinge supremum $\sup\limits_{x \in (-1,1)} x = 1$, adică nu există $x_0 \in (-1,1)$ astfel încât $f(x_0) = 1$. Analog, nu-şi atinge infimum $\inf\limits_{x \in (-1,1)} x = -1$.

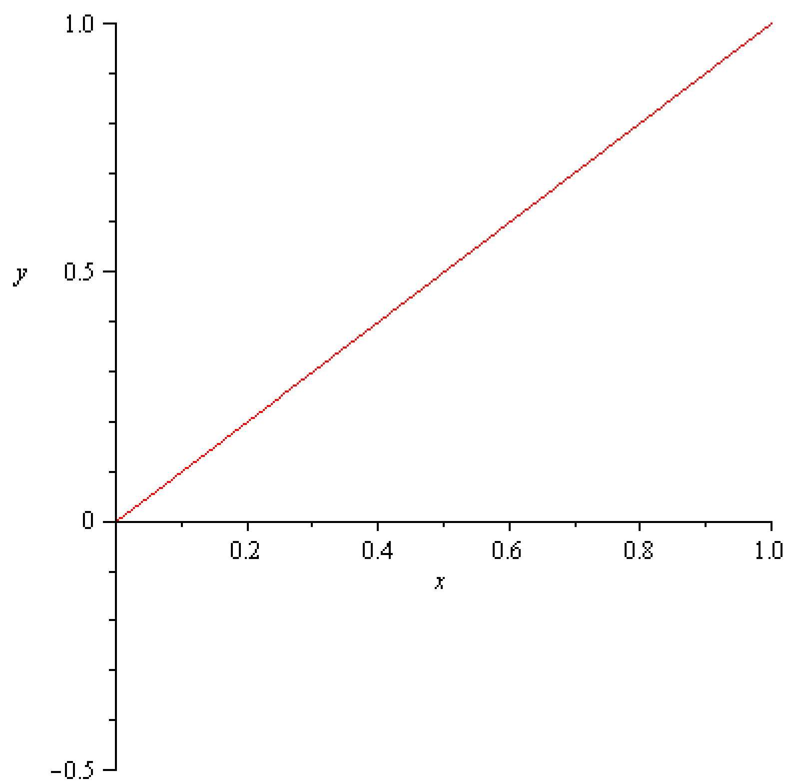


Figura 1.36

2. $f(x)=x-[x],\ x\in[0,1]$

Supremum $\sup\limits_{x\in[0,1]} f(x)=1$ nu este atins pe $[0,1]$ deoarece funcția nu este continuă pe $[0,1]$.

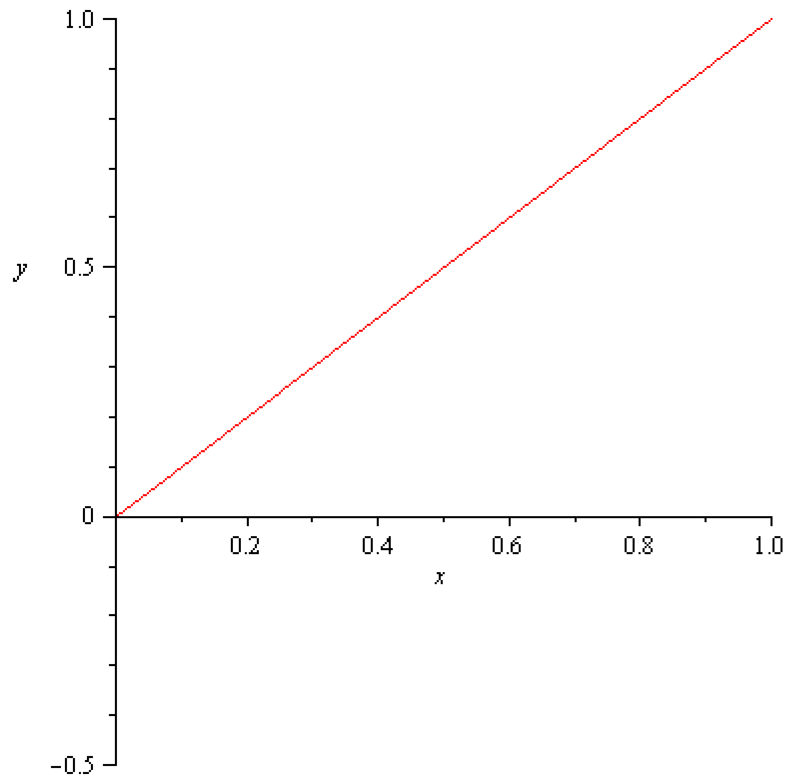


Figura 1.37