1.7 Noțiunea de infinitezimal

Fie $\alpha(x)$ o funcție definită pe o vecinătate Ω a punctului x_0, cu o posibilă excepție în x_0.

Definiție: Funcția $\alpha(x)$ este o funcție *infinit mică* sau un *infinitezimal*, pentru $x \to x_0$ dacă $\alpha(x)$ are în punctul x_0 limita zero, adică $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

Exemplu: $\alpha(x) = x - 1$ este un infinitezimal pentru $x \to 1$, deoarece $\lim\limits_{x \to 1}(x-1) = 0$

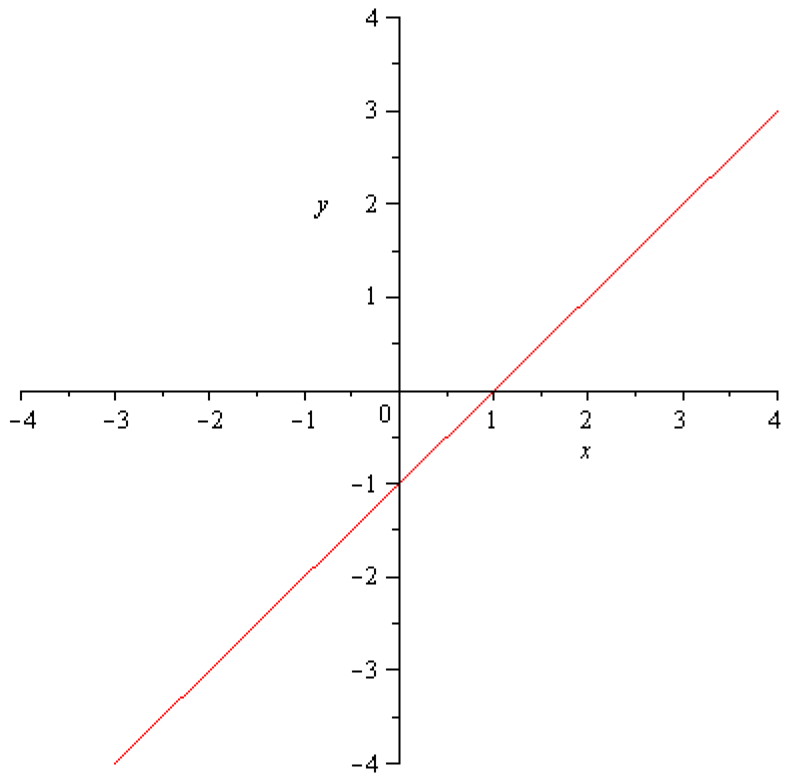


Figura 1.17 $\alpha(x) = x - 1$

Altă definiție: $\alpha(x)$ *infinitezimal*, pentru $x \to x_0$ $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ astfel încât $|\alpha(x)| < \varepsilon$ pentru $\forall x, x \neq x_0$ şi $|x - x_0| < \delta$.

Observație: Analog, pot fi definiți infinitezimali pentru $x \to \infty$. De exemplu:

□ $\alpha(x)=\frac{1}{x}$, $x \neq 0$ este un infinitezimal pentru $x \to \infty$, deoarece $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

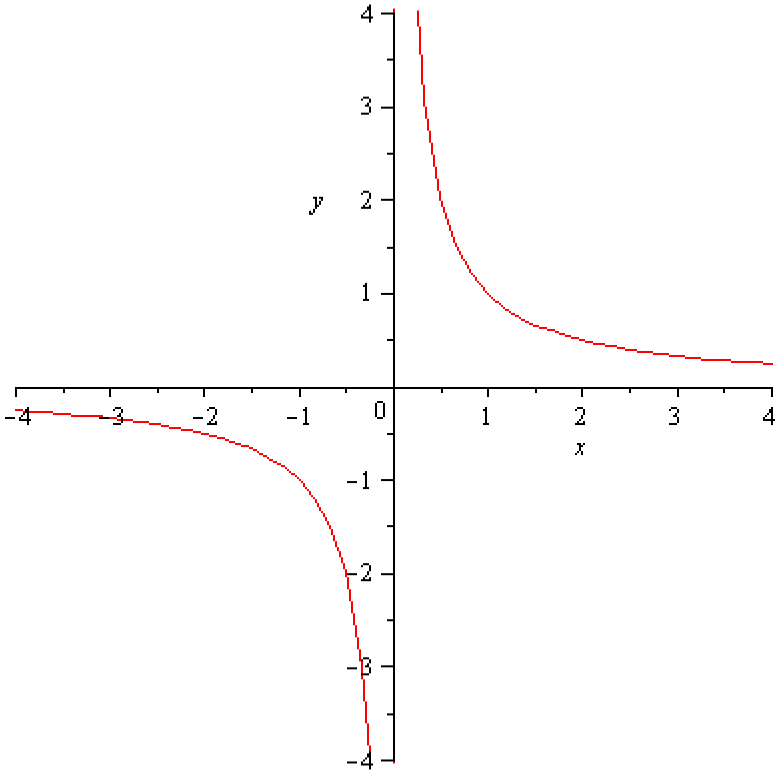


Figura 1.18 $\alpha(x)=\frac{1}{x}$

□ $\alpha(x)=e^{-x}$ este un infinitezimal pentru $x \to +\infty$, deoarece $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}=0$

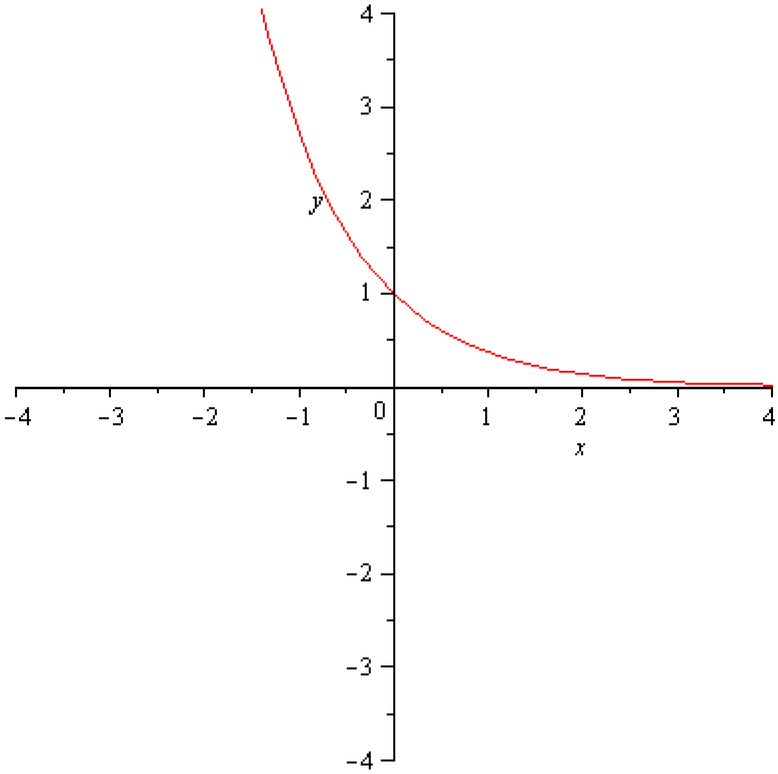


Figura 1.19 $\alpha(x)=e^{-x}$

Infinitezimali. Proprietăți.

Teorema 1 Dacă $\alpha(x)$ şi $\beta(x)$ sunt infinitezimali pentru $x \to x_0$, atunci şi suma $\alpha(x)+\beta(x)$ este infinitezimal pentru $x \to x_0$.

Teorema 2 Dacă $\alpha(x)$ este un infinitezimal pentru $x \to x_0$ şi dacă o funcție $f(x)$ este mărginită pe o vecinătate a lui x_0, atunci produsul $\alpha(x)f(x)$ este un infinitezimal pentru $x \to x_0$.

Exemplu: Funcția $y = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$ poate fi considerată ca un produs de funcții $\alpha(x)=x$ şi $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Funcția $\alpha(x)$ este un infinitezimal pentru $x \to 0$ şi $f(x)$ este mărginită pe orice vecinătate a punctului $x=0$. Atunci, cu teorema 2, $y = x\sin\frac{1}{x}$ este un infinitezimal pentru $x \to 0$ şi are loc

$$\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

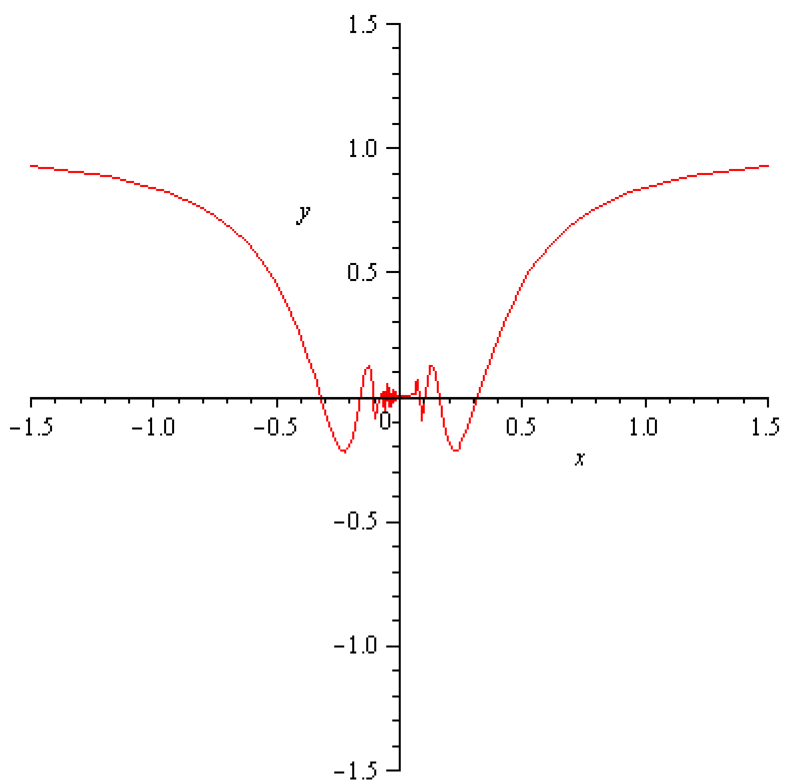


Figura 1.20 $y = x\sin\frac{1}{x}$

Remarcă: Dacă o funcție $\alpha(x)$ este un infinitezimal pentru $x \to x_0$ şi dacă o funcție $f(x)$ are limită finită în x_0, atunci produsul $\alpha(x)f(x)$ este un infinitezimal pentru $x \to x_0$.

Teorema 3: Dacă o funcție $\alpha(x)$ este un infinitezimal pentru $x \to x_0$ şi dacă o funcție $f(x)$ are limită nenulă în x_0, atunci raportul $\alpha(x)/f(x)$ este un infinitezimal pentru $x \to x_0$.

Observație: Condiția $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq 0$ din teorema 3, este esențială.

Exemplu: $\alpha(x) = x \quad f(x) = x^2$

$\alpha(x)$ infinitezimal pentru $x \to 0$
$f(x)$ are limită nulă în $x = 0$, adică $f(x)$ este un infinitezimal pentru $x \to 0$

$\frac{\alpha(x)}{f(x)} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$, $\quad x \neq 0$ nu este un infinitezimal pentru $x \to 0$.

Observație: In general, raportul a doi infinitezimali nu este un infinitezimal.

1.8 Noțiunea de infinit

Definiție: Fie $f(x)$ o funcție definită pe o vecinătate a punctului x_0, cu o posibilă excepție în x_0. Funcția $f(x)$ este *infinită* pentru $x \to x_0$, dacă pentru orice număr $M > 0$, oricât de mare, există un număr $\delta > 0$ astfel încât

$$|f(x)| > M$$

pentru $x \neq x_0$, $|x - x_0| < \delta$

Notație: $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$

Observație: Atunci când spunem că limita lui $f(x)$ este *A*, înțelegem că numărul *A* este finit.

Cu simboluri logice putem rescrie definiția noțiunii de infinit:

$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \iff \forall M > 0,\ \exists \delta > 0$ astfel încât $\forall x, x \neq x_0,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M$.

Cazuri particulare:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty \iff \forall M>0,\ \exists\delta>0 \text{ astfel încât } \forall x, x\neq x_0,\ |x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)>M.$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty \iff \forall M>0,\ \exists\delta>0 \text{ astfel încât } \forall x, x\neq x_0,\ |x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)<-M.$$

Exemple:

1) $f(x)=\frac{1}{x}$, $\forall x\neq 0$ este infinită pentru $x\to 0$

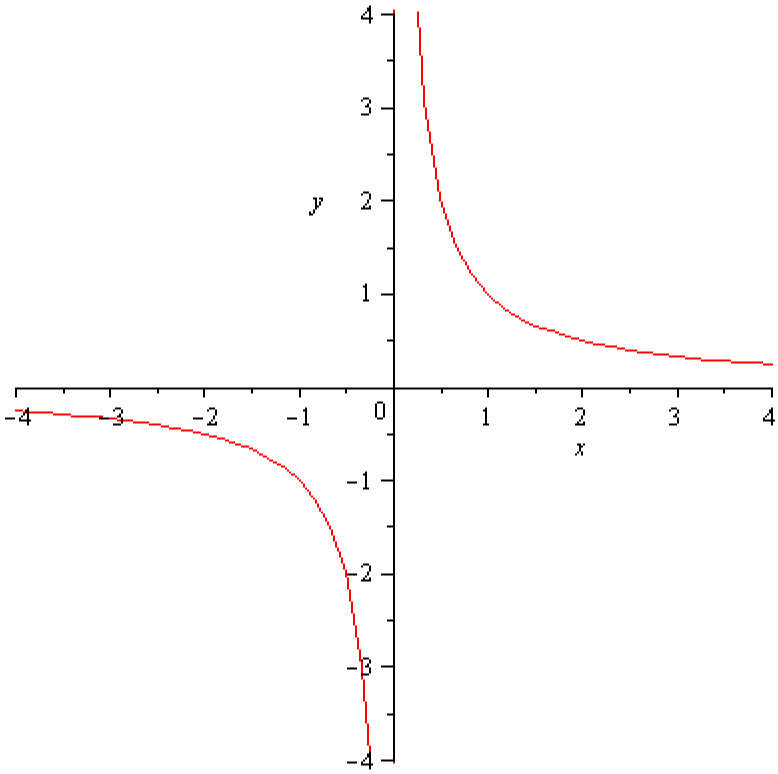


Figura 1.21 $f(x)=\frac{1}{x}$

Intr-adevăr, fie $M>0$, oricât de mare. Pentru ca $|f(x)|>M \iff \left|\frac{1}{x}\right|>M \iff \frac{1}{|x|}>M$ să aibă loc este necesar şi suficient ca:

$$|x|=|x-0|<\frac{1}{M}$$

Considerăm $\delta = \dfrac{1}{M}$ şi avem:

$\forall M > 0$, $\exists \delta > 0,\ \delta = \dfrac{1}{M}$ astfel încât $\forall x, x \neq 0$, $|x-0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x)| > M$.

2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $\forall x \neq 0$ este infinită pentru $x \to 0$

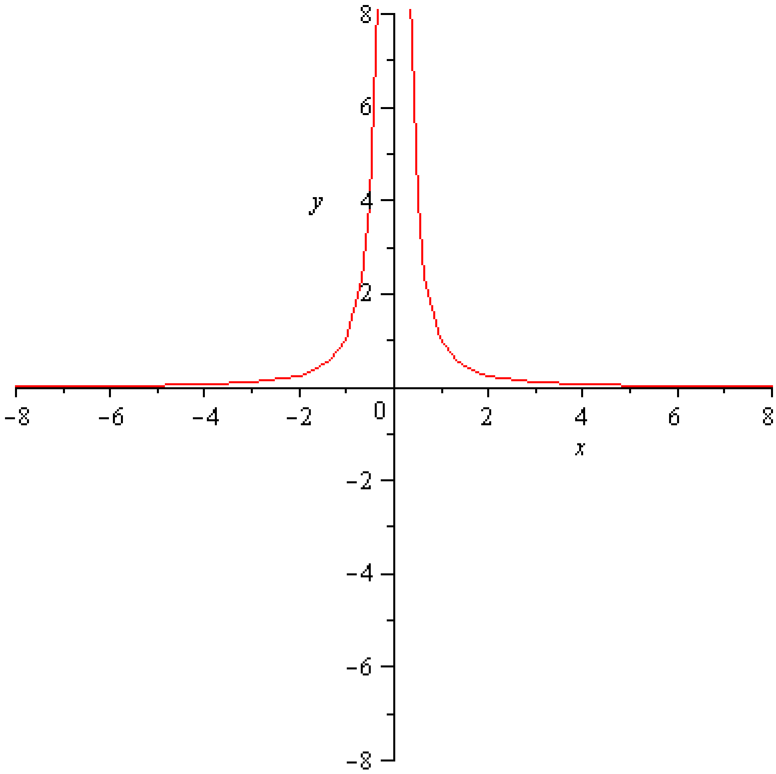


Figura 1.22 $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Intr-adevăr, fie $M > 0$, oricât de mare. $\exists \delta(M) = ?$ astfel încât $\forall x, x \neq 0$, $|x-0| < \delta \ \Rightarrow$ $f(x) > M$.

Pentru ca $f(x) > M \ \Leftrightarrow\ \dfrac{1}{x^2} > M \ \Leftrightarrow\ x^2 < \dfrac{1}{M} \ \Leftrightarrow\ x^2 - \dfrac{1}{M} < 0$ să aibă loc este necesar şi suficient ca:

$$x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{M}}, \frac{1}{\sqrt{M}} \right) \ \Leftrightarrow\ |x| < \frac{1}{M} \quad \text{deci} \quad \delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$$

$\forall M > 0$, $\exists \delta > 0,\ \delta = \dfrac{1}{\sqrt{M}}$ astfel încât $\forall x, x \neq 0$, $|x-0| < \delta \ \Rightarrow\ f(x) > M$.

Interpretare geometrică:

Funcția $f(x)$ este *infinită* pentru $x \to x_0$, dacă fiind dată o bandă orizontală, oricât de lată, între dreptele $y = -M$ și $y = +M$, există două drepte verticale $x = x_0 - \delta$ și $x = x_0 + \delta$ astfel încât graficul lui $y = f(x)$, $x \neq x_0$ se află în afara benzii orizontale pentru $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

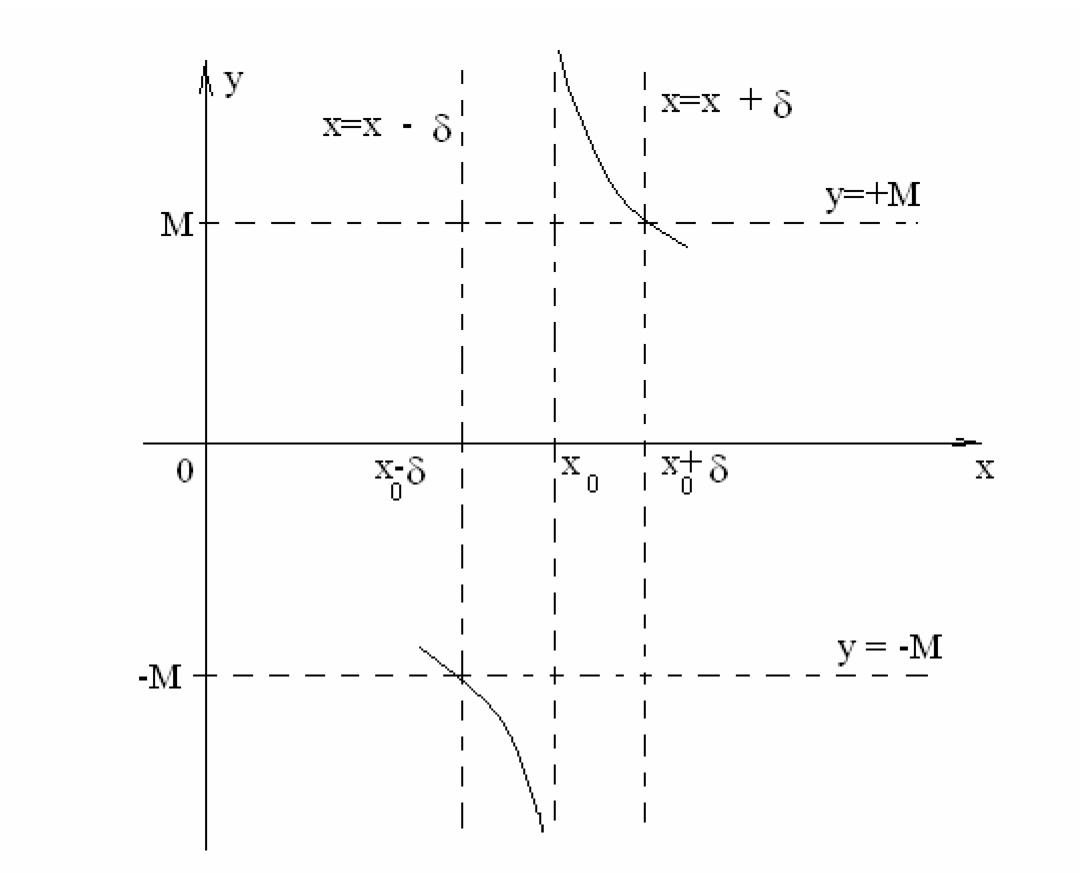


Figura 1.23

Definiție: Spunem că o funcție $f(x)$ este infinită pentru $x \to \infty$ și scriem $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ dacă pentru orice $M > 0$, oricât de mare, există un număr $N > 0$ astfel încât

$$|f(x)| > M, \quad \forall x, |x| > N$$

Exemplu: $f(x) = x$ este infinită pentru $x \to \infty$

Intr-adevăr, $\forall M > 0$, $\exists N > 0$, $N = M$ astfel încât $|f(x)| = |x| > M$ pentru $\forall x$, $|x| > N$

Relații între infinitezimal şi infinit

Teorema 1: Dacă o funcție $f(x)$ este infinit pentru $x \to x_0$, atunci funcția $\alpha(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ este un infinitezimal pentru $x \to x_0$.

Demonstrație:

Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar oricât de mic.
Deoarece $f(x)$ este infinit pentru $x \to x_0$, atunci pentru $\forall M > 0$, fie $M = \dfrac{1}{\varepsilon}$, $\exists \delta > 0$ a.î.

$$|f(x)| > M = \frac{1}{\varepsilon} \text{ pentru } x \neq x_0,\ |x - x_0| < \delta$$

Cu definiția $\alpha(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ avem

$$|\alpha(x)| = \frac{1}{|f(x)|} < \frac{1}{M} = \varepsilon$$

Astfel, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ astfel încât $|\alpha(x)| < \varepsilon$ pentru $\forall x, x \neq x_0$ şi $|x - x_0| < \delta$.

Teorema2: Dacă o funcție $\alpha(x)$ este un infinitezimal pentru $x \to x_0$ şi dacă $\alpha(x)$ este diferit de zero pe vecinătatea $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ a lui x_0, cu o excepție posibilă în x_0, atunci funcția $f(x) = \dfrac{1}{\alpha(x)}$ este un infinit pentru $x \to x_0$.

Considerăm funcția rațională:

$$y(x) = \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n}, \qquad a_0 \neq 0,\ b_0 \neq 0$$

raportul a două polinoame în x de grade m şi n respectiv. Pentru $|x|$ suficient de mare, numitorul este diferit de zero şi astfel raportul are sens.

$$y(x)=\frac{x^m\left(a_0+a_1\frac{1}{x}+a_2\frac{1}{x^2}+\ldots+a_m\frac{1}{x^m}\right)}{x^n\left(b_0+b_1\frac{1}{x}+b_2\frac{1}{x^2}+\ldots+b_n\frac{1}{x^n}\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n}=\begin{cases}\infty, & m>n\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & m=n\\ 0, & m<n\end{cases}$$

1.9 Operații cu limite

Teorema 1: Fie $f(x)$ o funcție definită pe o vecinătate Ω a punctului x_0 cu o excepție posibilă în x_0 . Pentru ca funcția să aibă limita A în x_0 este necesar şi suficient ca funcția să admită reprezentarea

$$f(x)=A+\alpha(x)$$

unde $\alpha(x)$ este un infinitezimal pentru $x\to x_0$.

Exemplu:

$$f(x)=x \quad \text{şi} \quad x_0=2 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 2}f(x)=2$$

$$f(x)=2+(x-2)$$

unde 2 este numărul limită, iar $x-2$ este un infinitezimal pentru $x\to 2$.

Teorema2: Fie $f(x)$ şi $g(x)$ două funcții definite pe o vecinătate Ω a punctului x_0 cu o excepție posibilă în x_0 . Dacă $\lim_{x\to x_0}f(x)=A$ şi $\lim_{x\to x_0}g(x)=B$, atunci

a) $\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\pm g(x)\right]=A\pm B$

b) $\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=A\cdot B$

c) $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$, cu condiția ca $\lim_{x\to x_0}g(x)=B\neq 0$.

Demonstrație: Teorema 2 b)

Dacă $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ şi $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$, atunci cele două funcții admit reprezentările:

$$f(x) = A + \alpha(x) \qquad g(x) = B + \beta(x)$$

unde $\alpha(x)$, $\beta(x)$ sunt infinitezimal pentru $x \to x_0$.

$$f(x)\cdot g(x) = \big(A + \alpha(x)\big)\big(B + \beta(x)\big) =$$

$$= A\cdot B + A\cdot\beta(x) + B\cdot\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x)$$

Primul termen din sumă este o constantă, iar următorii trei sunt infinitezimal pentru $x \to x_0$.

Exemple:

1. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-4}{x+1} = \frac{0^2-4}{0+1}$

2. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 1+1 = 2$

3. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-1}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1} = \frac{1}{2}$

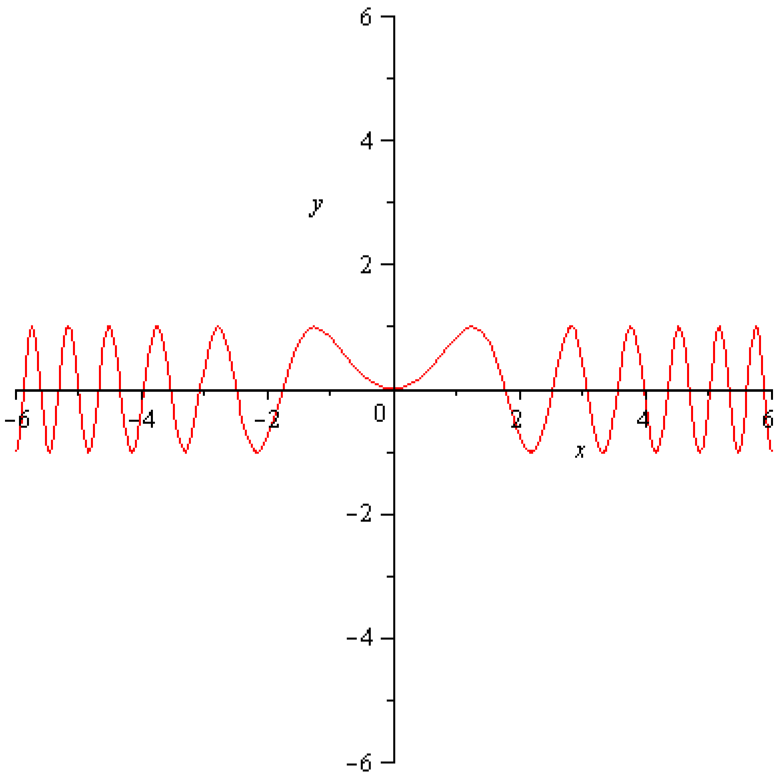
4. $f(x) = \sin x^2$ definită pe $\mathbb{R}$, pară şi mărginită deoarece $\left|\sin x^2\right| \le 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Acestă funcție se anulează în punctele $x = \pm\sqrt{n\pi}$, $n = 0,1,2,\ldots$ Considerăm două puncte consecutive, în care funcția se anulează: $\sqrt{n\pi}$ şi $\sqrt{(n+1)\pi}$ şi distanța dintre acestea:

$$d = \sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{\sqrt{(n+1)\pi} + \sqrt{n\pi}} = 0$$

Putem concluziona că distanța dintre astfel de două puncte consecutivetinde la zero şi $f(x) = \sin x^2$ nu este periodică.



$f(x) = \sin(x^2)$

1.10 Limite laterale

Definiție: Fie $f(x)$ o funcție definită pe intervalul (a, x_0). Atunci, numărul A este limita la stânga a funcției $f(x)$ în punctul x_0, dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

pentru $\forall x$ cu proprietatea $x_0 - \delta < x < x_0$.

Notație: $\lim\limits_{x \to x_0, x < x_0} f(x) = A$ sau $f(x_0 - 0) = A$

Definiție: Fie $f(x)$ o funcție definită pe intervalul (x_0, b). Atunci, numărul A este limita la dreapta a funcției $f(x)$ în punctul x_0, dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

pentru $\forall x$ cu proprietatea $x_0 < x < x_0 + \delta$.

Notație: $\lim\limits_{x \to x_0, x > x_0} f(x) = A$ sau $f(x_0 + 0) = A$

Fie $f(x)$ o funcție definită pe o vecinătate Ω a lui x_0, cu o posibilă excepție în x_0.

Proprietate: Pentru ca $f(x)$ să aibă limită în x_0 este necesar şi suficient ca cele două limite laterale ale lui $f(x)$ în x_0 să existe şi să coincidă, adică

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

Exemple:

1) $f(x) = \begin{cases} |x|, x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$

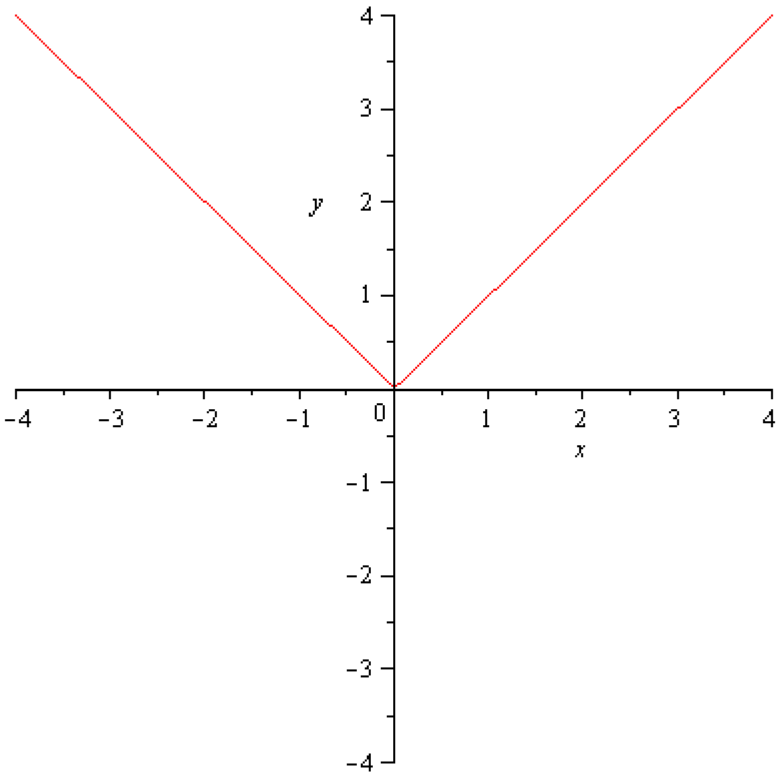


Figura 1.24

$$\lim_{x\to 0, x<0} f(x) = \lim_{x\to 0, x>0} f(x) = 0 \qquad \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

2) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{1/x}}, \quad x \neq 0$

$$\lim_{x\to 0, x<0} f(x) = 1 \qquad \lim_{x\to 0, x>0} f(x) = 0 \qquad \Rightarrow nu \ \exists \ \lim_{x\to 0} f(x)$$

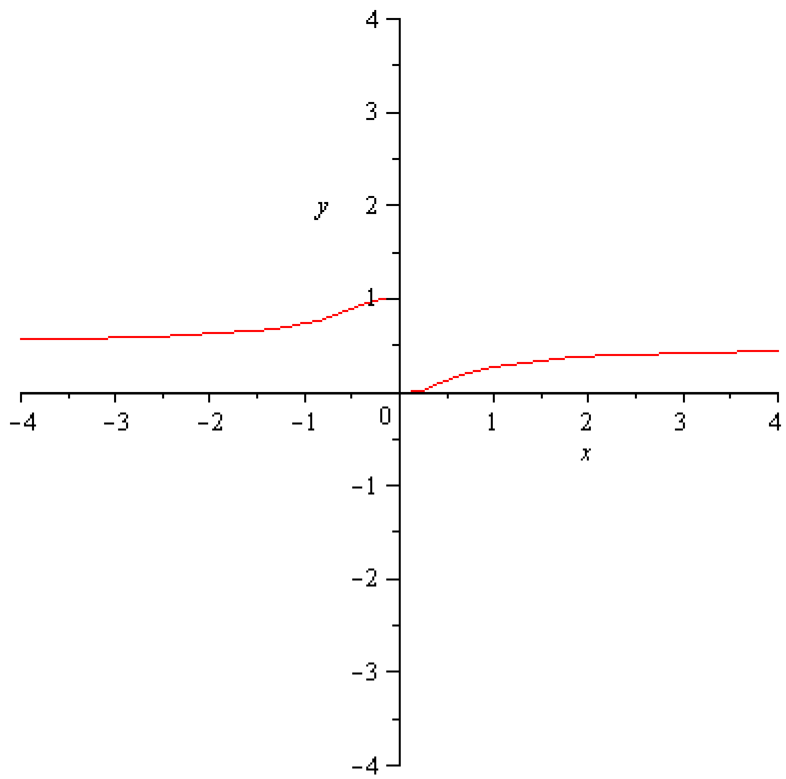


Figura 1.25 $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{1/x}}, \ x \neq 0$

3) $f(x) = e^{1/x}, \quad x \neq 0$

$$\lim_{x\to 0, x<0} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to 0, x>0} f(x) = +\infty \qquad \Rightarrow nu \ \exists \ \lim_{x\to 0} f(x)$$

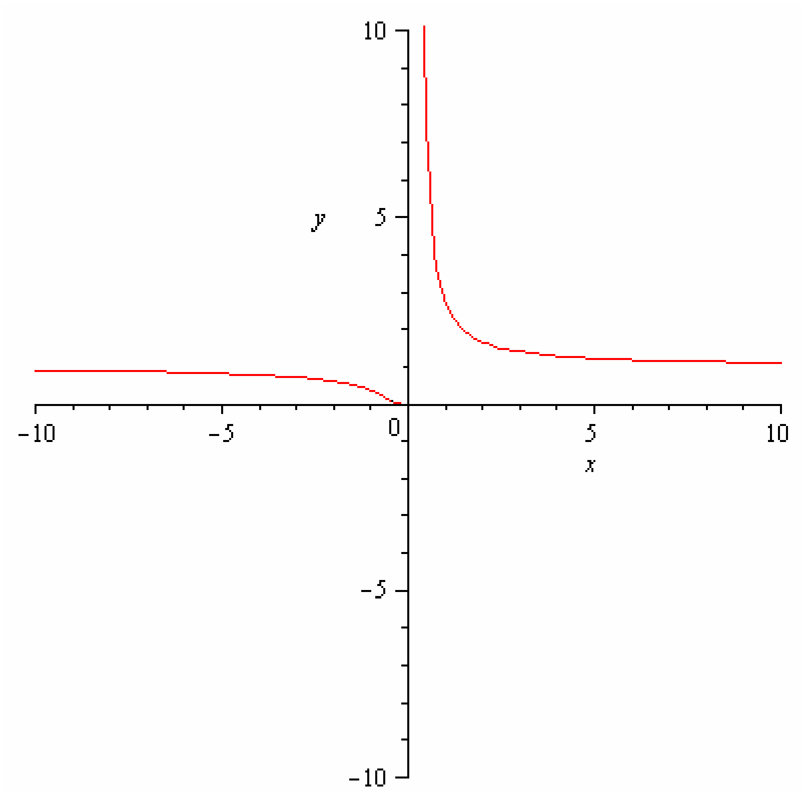


Figura 1.26 $f(x) = e^{\frac{1}{x}},\ x \neq 0$

Exerciții:

- Fie $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-2}}},\ x \neq 2$. Are funcția limită în $x_0 = 2$?

- Fie $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1},\ x \neq \pm 1$. Are funcția limită în $x_0 = -1$ şi $x_0 = 1$?