1.4 Funcții de o variabilă. Definiții

Funcția este un obiect matematic care determină şi este complet determinat de următoarele elemente:

X o mulțime de numere reale x şi o lege, o regulă care asociază la fiecare număr $x \in X$ un număr real y. In acest fel că am definit o funcție pe X şi scriem

$$y = f(x) \quad \text{sau} \quad y = y(x), \ x \in X \qquad (1)$$

Mulțimea X se numeşte *domeniu de definiție* al funcției, iar mulțimea Y a valorilor y pe care le ia funcția, se numeşte *domeniu de valori* sau *codomeniu.* Domeniul de definiție se notează şi cu $D(f)$.

O funcție este **bine definită** dacă sunt date:

(i) domeniul de definiție X
(ii) o regulă care asociază la fiecare $x \in X$ o valoare bine determinată $y = f(x)$.

Două funcții f şi g sunt *egale* dacă $D(f) = D(g)$ şi identitatea $f(x) = g(x)$ rămâne adevărată pentru toți $x \in D(f) = D(g)$.

Exemple de funcții:

a) un şir $\{a_n\}$ este o funcție definită pe mulțimea numerelor naturale $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, astfel

$$f(n) = a_n, \ \ n \in \mathbb{N}.$$

b) $$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Domeniul de definiție: $(-\infty, +\infty)$
Domeniul de valori: $\{-1, 0, +1\}$

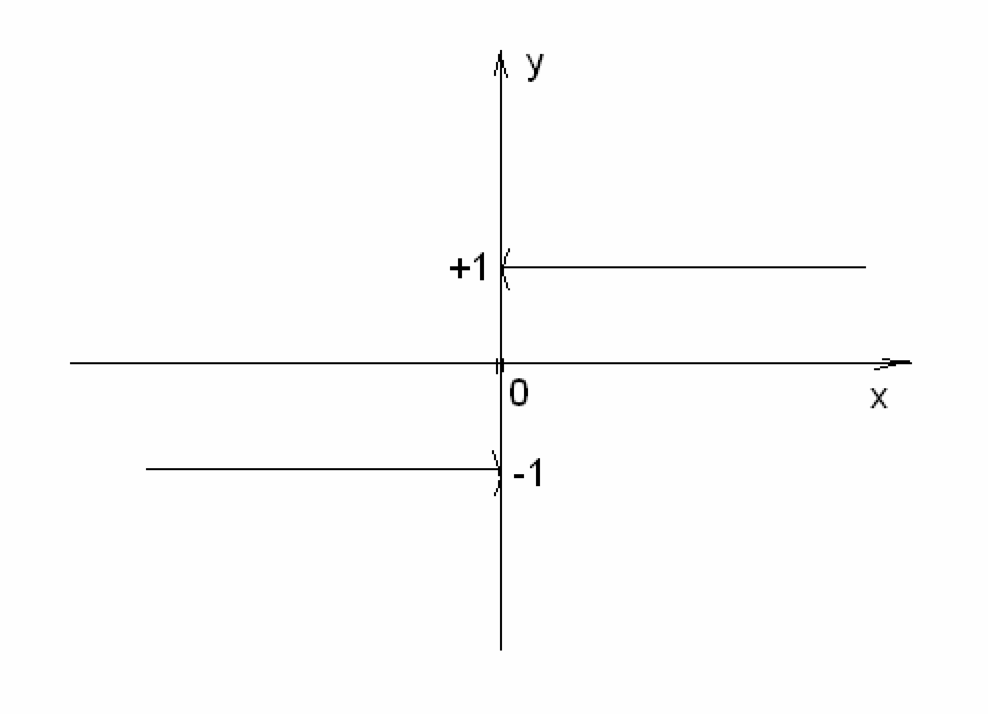

Figura 1.5 $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$

c) $y = [x]$ unde x este un număr real şi $[x]$ este cel mai mare întreg care nu-l excede pe x. Domeniul de definiție: $\mathbb{R}$

Domeniul de valori: $\mathbb{Z}$

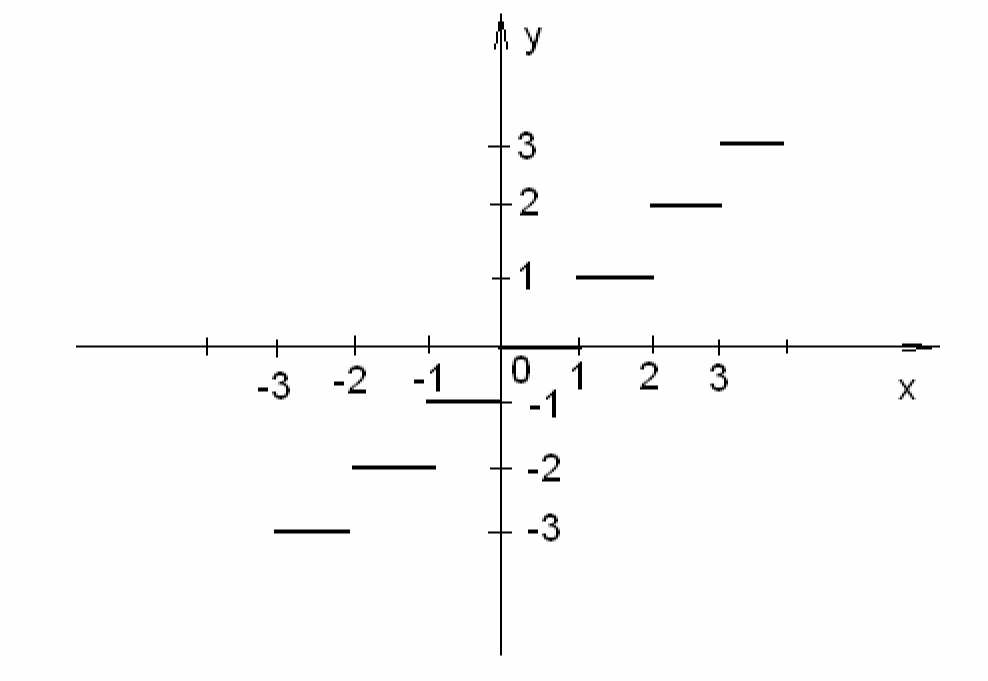

Figura 1.6 $f(x) = [x]$

Reprezentări pentru funcții

O funcție poate fi specificată printr-o formulă, printr-un grafic sau printr-un tabel. Respectiv, vom vorbi despre o reprezentare analitică, grafică sau tabelară.

a) *reprezentarea analitică* O funcție $y = f(x)$ este reprezentată analitic dacă este definită printr-o formulă care specifică la ce operații trebuie supus fiecare $x \in D(f)$ pentru a obține valoarea funcției în acel punct, notată cu *y*.
De exemplu, funcțiile

$$y = \frac{x}{x^2 + 1} \quad \text{pentru } x \in (-\infty, +\infty)$$

$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{pentru } x \in [-1, +1]$$

sunt reprezentate analitic.

Observație: Nu orice formulă definește o funcție. De exemplu:

$$y = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x^2 - 4}$$

nu definește o funcție deoarece pentru orice număr real *x* cel puțin un radical nu are valori reale.

O funcție poate fi definită prin formule diferite pe porțiuni diferite ale domeniului de definiție.
De exemplu, presupunem că un tren pleacă din stația *A* la momentul $t = 0$ și parcurge timp de *2h,* cu viteza *100km/h* , distanța până la stația *B*, unde staționează o oră. Apoi, parcurge o altă distanță timp de *3h*, cu viteza *80km/h*. Funcția $s = f(t)$ care exprimă poziția trenului, măsurată în kilometri, față de stația *A*, la momentul *t,* este definită pe porțiuni cu trei formule distincte:

$$f(t) = \begin{cases} 100t, & t \in [0,2] \\ 200, & t \in (2,3] \\ 200 + 80t, & t \in (3,6] \end{cases} \qquad (3)$$

b) *reprezentarea grafică* Graficul unei funcții $y = f(x)$ se obține desenând punctele cu coordonatele (x, y) unde *x* trebuie să fie în domeniul de definiție a lui *f* și $y = f(x)$.

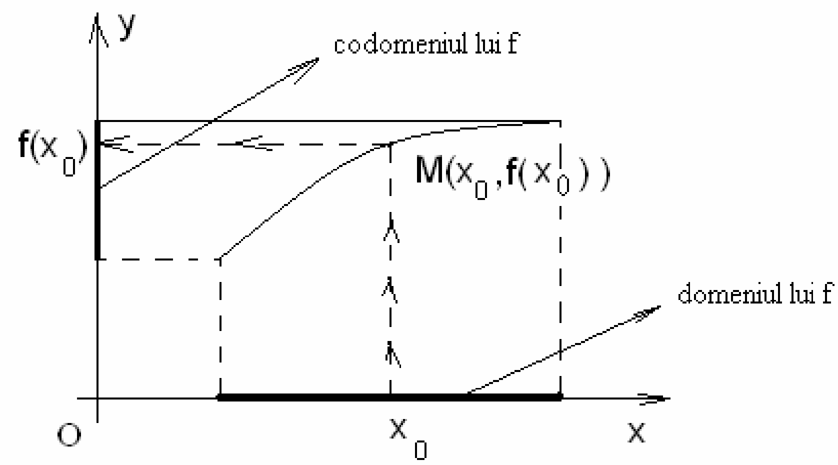

Figura 1.7

Spunem că o funcție are reprezentare grafică dacă este specificată prin graficul ei.

Observație: Nu toate funcțiile pot fi reprezentate grafic. De exemplu, funcția Dirichlet

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases} \tag{4}$$

nu admite reprezentare grafică.

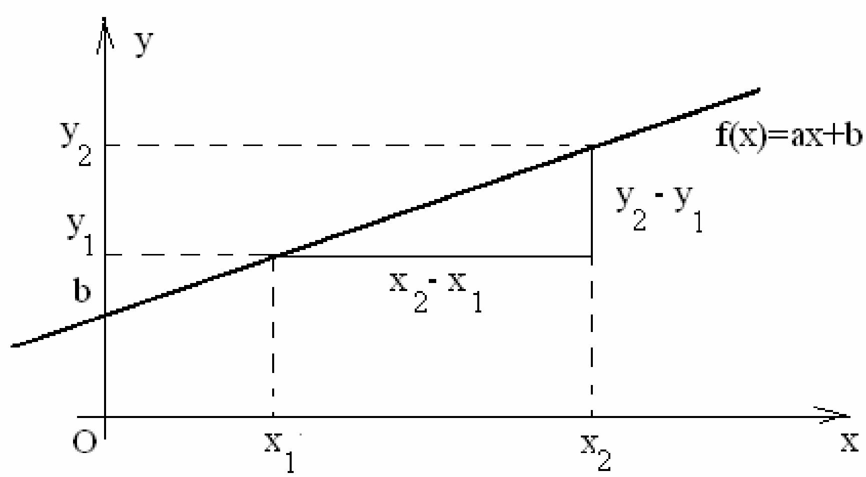

Figura 1.8 $f(x)=ax+b$

Caz particular: Funcția liniară este o funcție definită analitic de formula:

$$f(x)=ax+b$$

în care *a* şi *b* sunt constante. Graficul acestei funcții este o dreaptă. Constantele *a* şi *b* sunt panta dreptei şi intersecția cu axa *Oy* (ordonata). Reciproc, orice dreaptă care nu este verticală (paralelă cu axa *Oy*) este graficul unei funcții liniare. Dacă cunoaştem două puncte de pe dreaptă (x_1, y_1) şi (x_2, y_2), atunci putem calcula panta dreptei:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

c)reprezentare tabelară O funcție poate fi specificată printr-un tabel. De exemplu, dacă măsurăm temperatura aerului la fiecare oră, timp de 24 de ore, atunci fiecărui moment de timp $t = 0,1,2,\ldots,24$ îi corespunde un număr *T*.

t	0	1	2	...
T	T_0	T_1	T_2	...

Notăm funcția astfel obținută $T = f(t)$.

Exerciții:

Să se stabilească domeniul maxim de definiție al funcțiilor:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x - 2}} \qquad\qquad f(x) = \lg\left[\lg(3 - x) - 1\right]$$

1.5 Limita unei funcții într-un punct

Conceptul de limită este fundamental în analiza matematică. Limita unei funcții într-un punct este o generalizare a limitei unui şir de numere. In esență, funcția *f* are limita *A* în punctul x_0, dacă pentru orice punct *x* suficient de apropiat de x_0, imaginea lui *x* prin funcția *f*, este suficient de apropiată de *A*. Cu alte notații:

$$f(x) \to A \quad \text{atunci când } x \to x_0$$

Exmplu:
Dacă $f(x)=x+3$, atunci $\lim_{x\to 4} f(x)=7$, deoarece dacă înlocuim numere apropiate de 4 în funcție, atunci $f(x)$ va fi aproape de 7.

În cele ce urmează vom da definiția riguroasă a limitei unei funcții într-un punct. Aceasta e greu de digerat, dar după exemple va deveni mai umană.

Definiție: (Cauchy) Fie $f(x)$ o funcție definită pe o vecinătate Ω a punctului x_0, cu o posibilă excepție în x_0. Atunci, un număr A este limita funcției $f(x)$ în punctul x_0, dacă pentru $\forall \varepsilon > 0$, oricât de mic, $\exists \delta > 0$ (dependent de ε) astfel încât

$$|f(x)-A| < \varepsilon \tag{5}$$

pentru toți x cu $|x-x_0| < \delta$ şi $x \neq x_0$.

Notație: $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$

Cu simboluri logice , definiția limitei poate fi rescrisă:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0, \quad \forall x, x \neq x_0, \quad |x-x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)-A| < \varepsilon$$

Observații:

- □ În definiția dată apare valoarea absolută, deoarece $|x-y|$ înseamnă distanța dintre punctele x şi y pe dreapta reală. $|x-x_0| < \delta$ înseamnă că distanța dintre x şi x_0 este mai mică decât δ.

- □ Ce sunt ε şi δ în această definiție? Cantitatea ε ne spune cât de aproape vrem să fie $f(x)$ de limita A, iar cantitatea δ ne spune cât de aproape de x_0 trebuie să-l alegem pe x ca să obținem acest lucru. Ca să demonstrăm că $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, alegem ε şi-l determinăm pe δ.

Exemplu:

$$f(x)=2x+3 \qquad x_0=1 \qquad \lim_{x\to 1} f(x)=5$$

Intr-adevăr, fie $\varepsilon > 0$ un număr arbitrar. Inegalitatea din definiție este

$$|(2x+3)-5| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |2x-2| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad 2|x-1| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x-1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Considerăm $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/2$ şi avem $|x-1| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x)-5| < \varepsilon$. Asfel, conform definiției, numărul 5 este limita funcției $f(x) = 2x+3$ în punctul $x_0 = 1$. Pentru orice $\varepsilon > 0$, avem $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/2$ care pentru $|x-1| < \delta$ ne garantează $|(2x+3)-5| < \varepsilon$.

Interpretare geometrică pentru limita unei funcții într-un punct:

Fie o funcție $f(x)$ specificată printr-un grafic, astfel încât valorile lui $f(x)$ sunt egale cu ordonatele punctelor curbei M_1M pentru $x < x_0$ şi cu ordonatele punctelor curbei MM_2 pentru $x > x_0$. Fie $f(x_0)$ egal cu ordonata punctului *N*.

Presupunem graficul lui $f(x)$ obținut din curba *bună* M_1MM_2, înlocuind punctul *M* cu *N*.

Vom arăta că funcția $f(x)$ are limita în punctul x_0 egală cu numărul *A*, ordonata punctului *M*.

Intr-adevăr, fie $\varepsilon > 0$ un număr arbitrar, oricât de mic, şi fixăm punctele $A-\varepsilon$, A, $A+\varepsilon$ pe axa *y*. Fie *P* şi *Q* punctele de intersecție ale graficului lui $f(x)$ cu dreptele $y = A-\varepsilon$ şi $y = A+\varepsilon$ şi fie $x_0 - h_1$ şi $x_0 + h_2$ ($h_1 > 0, h_2 > 0$) abscisele punctelor *P* şi *Q*.

Pentru orice $x \neq x_0$ din intervalul $(x_0 - h_1, x_0 + h_2)$ valoarea funcției $f(x)$ se află între $A-\varepsilon$ şi $A+\varepsilon$, adică

$$A-\varepsilon < f(x) < A+\varepsilon$$

Fie $\delta = \min\{h_1, h_2\}$. Atunci, intervalul $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ este conținut în (x_0-h_1, x_0+h_2).

In concluzie, inegalitatea $A-\varepsilon < f(x) < A+\varepsilon$, echivalentă cu $|f(x)-A| < \varepsilon$ este garantată $\forall x, x \neq x_0$ din intervalul $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, adică $\forall x$ care verifică condiția $0 < |x-x_0| < \delta$. Conform definiției,

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

Remarcă: Funcția $y = f(x)$ are limita A în punctul x_0 dacă pentru orice bandă, oricât de îngustă, dintre dreptele $y = A - \varepsilon$ şi $y = A + \varepsilon$, există $\delta > 0$ astfel încât graficul lui $y = f(x)$ se află în bandă pentru orice $x \neq x_0$ din $\delta -$vecinătatea lui x_0.

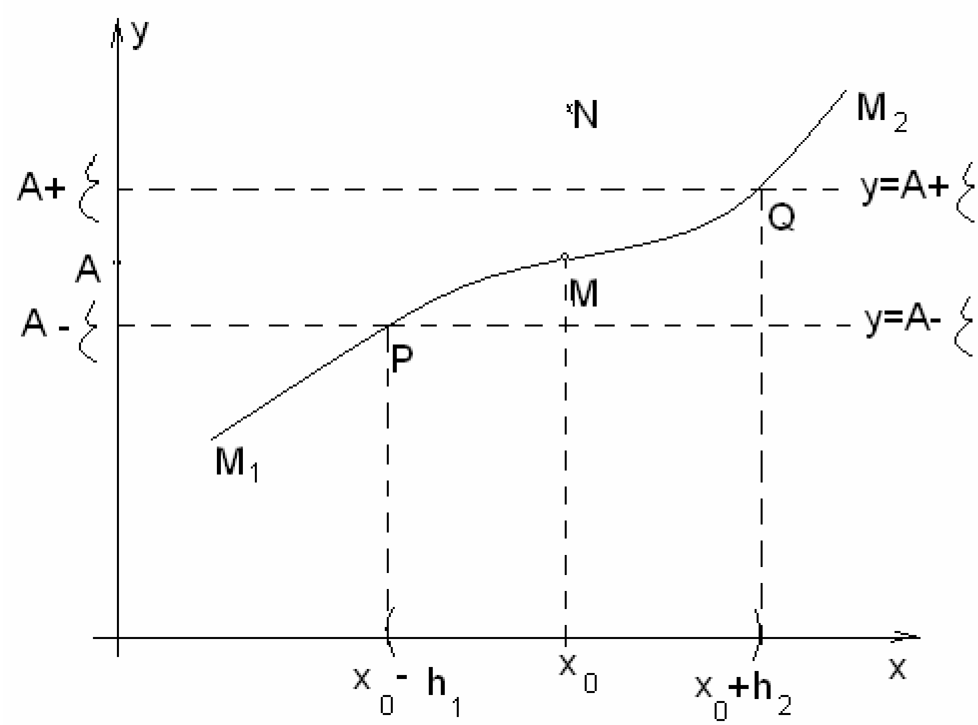

Figura 1.9

Exerciții: Folosind definiția limitei într-un punct, să se demonstreze că:

$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0 \qquad \lim_{x \to \frac{5}{2}} (2x+1) = 6$$

Alt exemplu:

$$f(x) = x^2 \qquad x_0 = 1 \qquad \lim_{x \to 1} f(x) = 1$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta(\varepsilon) = ?, \quad \forall x, x \neq 1, \quad |x-1| < \delta \quad \Rightarrow \quad |x^2 - 1| < \varepsilon$$

În demonstrarea acestei limite, se pune problema cât de mic trebuie să fie $|x-1|$ pentru a garanta $|x^2-1|<\varepsilon$. Începem cu estimarea diferenței $|x^2-1|$:

$$|x^2-1|=|(x-1)(x+1)|=|x-1|\cdot|x+1|$$

Pe măsură ce x se apropie de 1, factorul $|x-1|$ devine mic, şi dacă factorul $|x+1|$ ar fi o constantă (de exemplu 2 ca în exemplul precedent), atunci am putea determina pe δ ca mai înainte, prin împărțirea lui ε cu constanta.

Printr-un truc putem înlocui factorul $|x+1|$ cu o constantă. Anume, totdeauna alegem pe δ astfel încât $\delta\le 1$. Dacă facem asta, atunci vom avea:

$$|x-1|<\delta\le 1\text{, adică } |x-1|<1$$

iar $0<x<2$. Atunci,

$$|x^2-1|=|x-1|\cdot|x+1|<3|x-1|$$

Dacă vrem să fim siguri că $|x^2-1|<\varepsilon$, atunci acest calcul arată că ar trebui ca $3|x-1|<\varepsilon$, adică

$$|x-1|<\frac{1}{3}\varepsilon$$

Astfel ar trebui să alegem $\delta\le\frac{1}{3}\varepsilon$. Şi să nu uităm să alegem un $\delta\le 1$. Dacă am considerat un ε pentru care $\frac{1}{3}\varepsilon>1$, atunci alegem $\delta=1$ în loc de $\delta=\frac{1}{3}\varepsilon$. În concluzie, vom alege:

$$\delta=\min\left(1,\frac{1}{3}\varepsilon\right)$$

Am arătat astfel că dacă alegem δ în acest mod, atunci $|x-1|<\delta$ garantează $|x^2-1|<\varepsilon$, pentru orice alegere a lui ε.

Observații:

1) In general, valoarea lui δ depinde de ε, adică $\delta=\delta(\varepsilon)$.

2) Atunci când determinăm limita unei funcții într-un punct x_0 nu ținem cont de ce se întâmplă în punctul x_0.

Limita funcției $f(x)$ în punctul x_0 este independentă de valoarea funcției în punctul x_0. Mai mult, funcția poate să nu fie definită în x_0.

Orice două funcții egale pe o vecinătate a lui x_0, cu o posibilă excepție în x_0, unde acestea pot fi diferite sau chiar nedefinite, au aceeaşi limită pentru $x \to x_0$ sau nu au limită.

Numărul limită A furnizează informații despre comportarea funcției într-o vecinătate a punctului x_0.

Exemple:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{x}$

$f(x) = \frac{x}{x} = 1$, $\forall x \neq 0$ şi nu este definită în $x = 0$

Din definiția limitei funcției în punctul $x = 0$, punctul $x = 0$ este exclus.

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0} 1 = 1$$

2) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2$, $\forall x \neq 2$ şi nu este definită în $x = 2$

Din definiția limitei funcției în punctul $x = 2$, punctul $x = 2$ este exclus.

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4$$

3) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ unde, $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

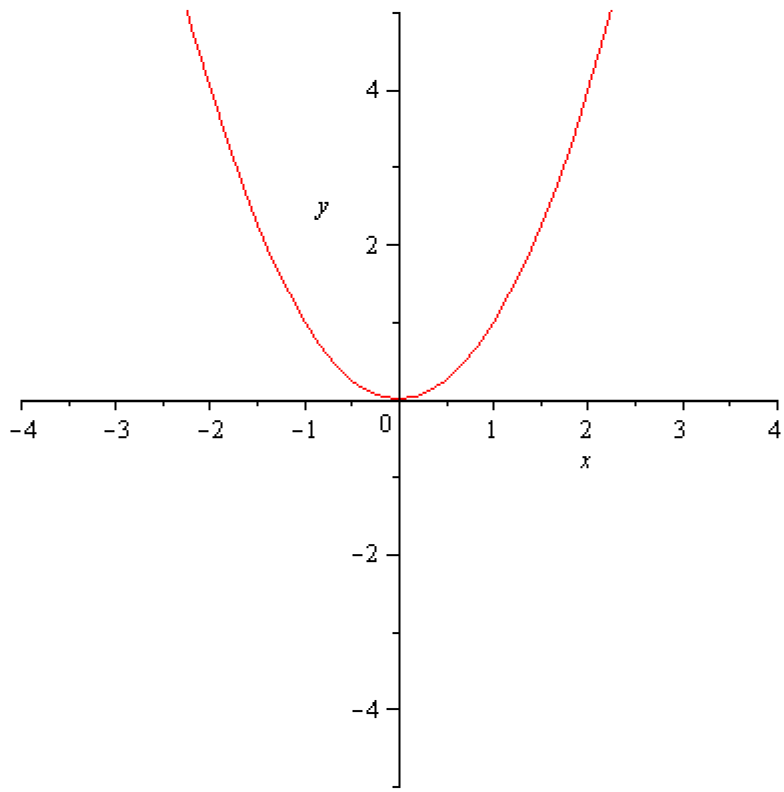

Figura 1.10

Funcția $g(x)=x^2$, $x\in\mathbb{R}$ este egală cu $f(x)$ peste tot, mai puțin în $x=0$ şi $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} g(x)=0$$

Definiție: (cu şiruri) Fie $f(x)$ o funcție definită pe o vecinătate Ω a punctului x_0, cu o posibilă excepție în x_0. Şi fie $\{x_n\}$ cu $x_n\in\Omega$ şi $x_n\neq x_0$, un şir de numere convergent la x_0. Atunci, un număr A este limita funcției $f(x)$ în punctul x_0 dacă pentru orice şir $\{x_n\}\to x_0$, şirul corespunzător imagine $\{f(x_n)\}$ converge la A.

Exemplu: $f(x)=\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ definită pe $\mathbb{R}-\{0\}$

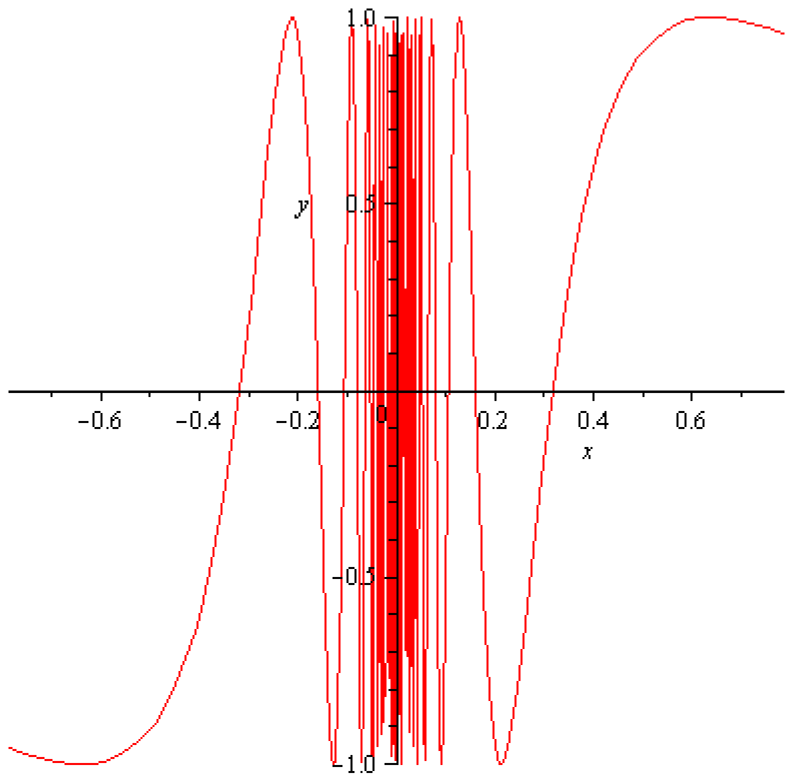

Figura 1.11 $f(x)=\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$$x_n=\frac{1}{n\pi}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0 \qquad\qquad f(x_n)=\sin n\pi=0$$

$$x'_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0 \qquad\qquad f(x'_n)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=1$$

Am considerat două şiruri $\{x_n\}$ şi $\{x'_n\}$ convergente la $x_0=0$ pentru care şirurile corespunzătoare imagine au limite diferite $\{f(x_n)\}\to 0$ şi $\{f(x'_n)\}\to 1$. Conform definiției cu şiruri, rezultă că funcția nu are limită în $x_0=0$.

Teorema 1: Fie $f(x)$ o funcție care are limită în punctul x_0. Atunci limita este unică.

Definiție: O funcție $f(x)$ este *mărginită* pe o vecinătate a unui punct x_0 dacă există numerele $M>0$ şi $\delta>0$ astfel încât

$$|f(x)|\le M\,,\quad \forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta) \tag{6}$$

vecinătate îpecare funcția este definită.

Teorema 2: Fie $f(x)$ o funcție care are limită finită în x_0. Atunci, $f(x)$ este mărginită pe o vecinătate a lui x_0, adică $\exists M > 0$ şi $\exists \delta > 0$ astfel încât

$$|f(x)| \le M \ , \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Demonstrație:

Fie $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \quad \Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0$ de exemplu $\varepsilon = 1$, $\exists \delta > 0$ astfel încât

$$|f(x) - A| < 1 \quad \text{pentru } x \ne x_0 \text{ şi } |x - x_0| < \delta$$

Dar, $\quad 1 > |f(x) - A| \ge \big||f(x)| - |A|\big| \ge |f(x)| - |A| \qquad \Rightarrow \qquad |f(x)| < |A| + 1$

Fie $M = |A| + 1$ dacă funcția nu este definită în x_0 şi fie $M = \max\{|A| + 1, |f(x_0)|\}$ dacă funcția este definită în x_0.

$$\Rightarrow \qquad |f(x)| \le M \ , \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Observație: Conform teoremei 2, existența limitei finite a unei funcții implică mărginirea acesteia. Reciproca nu este totdeauna adevărată, adică o funcție poate să fie mărginită pe o vecinătate a lui x_0 dar să nu aibă limită în x_0. De exemplu, $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ este mărginită pe o vecinătate a lui $x_0 = 0$ deoarece $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \ne 0$ dar $f(x)$ nu are limită în $x_0 = 0$.

Limite şi inegalități

Urmează două teoreme care compară limitele a diferite funcții.

Teorema 3: Fie $f(x) \le \varphi(x)$, $\forall x \in \Omega$, Ω o vecinătate a punctului x_0 , cu o excepție posibilă în x_0 şi presupunem că $f(x)$ şi $\varphi(x)$ au limită în x_0 . Atunci:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \le \lim_{x \to x_0} \varphi(x)$$

Caz particular: $f(x)=0$ În acest caz teorema precedentă spune că dacă $\varphi(x)$ este pozitivă, atunci şi limita sa va fi pozitivă.

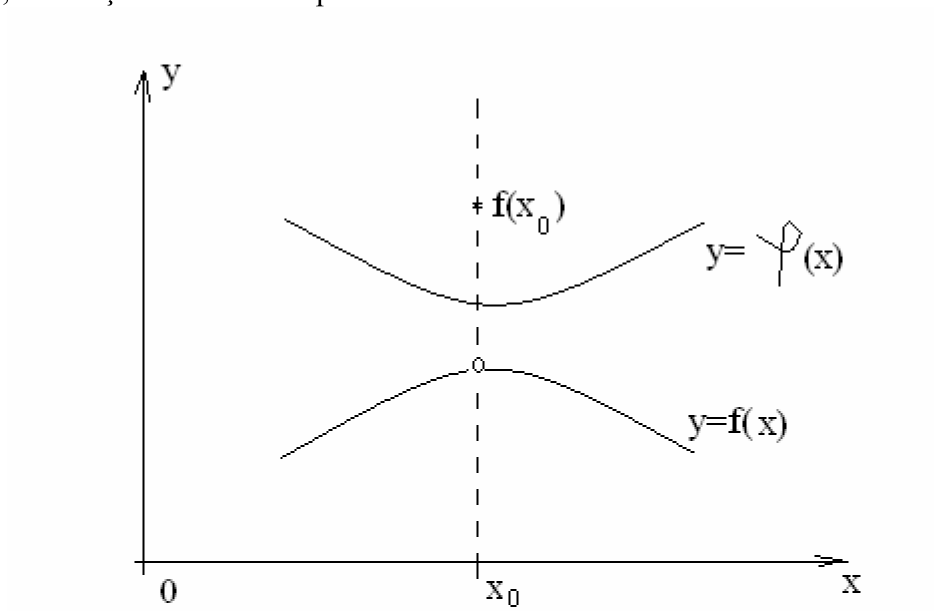

Figura 1.12

Teorema 4 (sandwich)**:** Fie $\varphi(x)\le f(x)\le \psi(x)$, $\forall x\in\Omega$, Ω o vecinătate a punctului x_0, cu o excepţie posibilă în x_0 şi presupunem că $\varphi(x)$ şi $\psi(x)$ au limita A în x_0. Atunci şi $f(x)$ are limita A în x_0 .

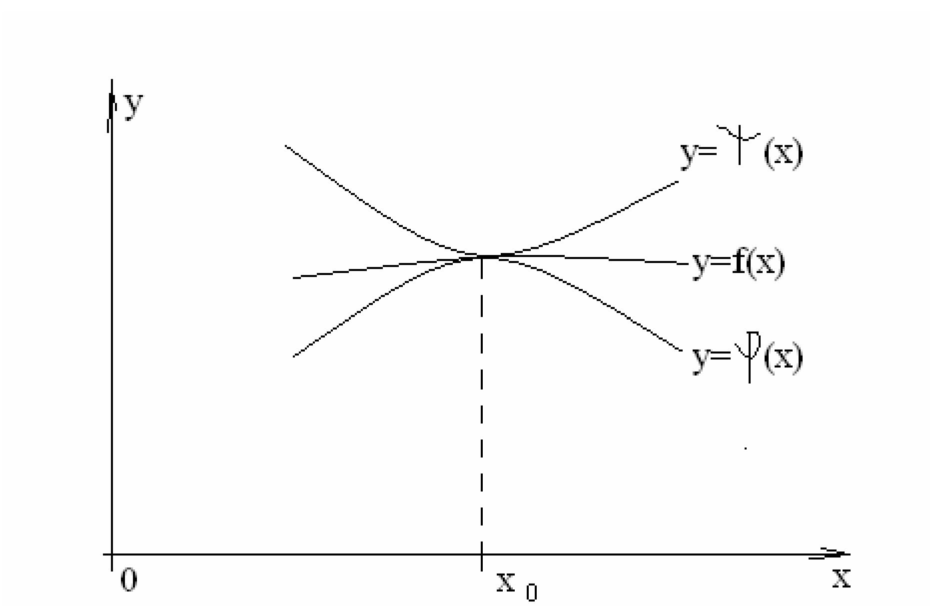

Figura 1.13

Exemplu:

$$\varphi(x) = -|x| \qquad f(x) = x\cos\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \psi(x) = |x|$$

$$-|x| \le x\cos\frac{1}{x} \le |x|$$

$$\lim_{x\to 0}\left(-|x|\right) = \lim_{x\to 0}|x| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0$$

Observație: Limita funcției $\cos\frac{1}{x}$ pentru $x \to 0$ nu există. Înmulțind funcția cu *x* situația se schimbă.

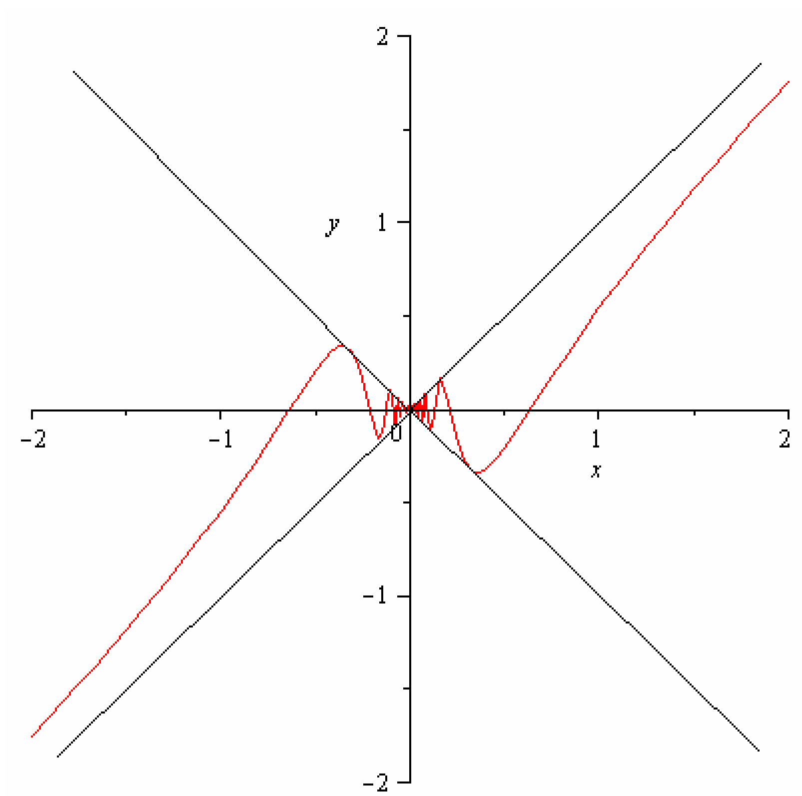

Figura 1.14 $f(x) = x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

1.6 Limita unei funcții când variabila tinde la infinit

Fie $f(x)$ o funcție definită pe toată dreapta reală sau pentru x cu $|x| > K$ cu $K > 0$ astfel încât să putem calcula valorile funcției pentru x oricât de mare.

Definiție: Spunem că numărul A este limita funcției $f(x)$ când x tinde la infinit şi scriem

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$$

dacă $\forall\varepsilon > 0$ există un număr $N > 0$ a.î. $|f(x) - A| < \varepsilon$ pentru $\forall x$ cu $|x| > N$.

Cazuri particulare:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N > 0 \text{ a.î. } |f(x) - A| < \varepsilon, \forall x, x > N$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N > 0 \text{ a.î. } |f(x) - A| < \varepsilon, \forall x, x < -N$$

Interpretare geometrică: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ înseamnă, fiind dată o bandă, oricât de îngustă, între dreptele $y = A - \varepsilon$ şi $y = A + \varepsilon$, există o dreaptă $x = N > 0$ a.î. pentru toți $x > N$ graficul lui $y = f(x)$ să fie conținut în bandă. Spunem că curba $y = f(x)$ tinde asimptotic la dreapta $y = A$ pentru $x \to +\infty$.

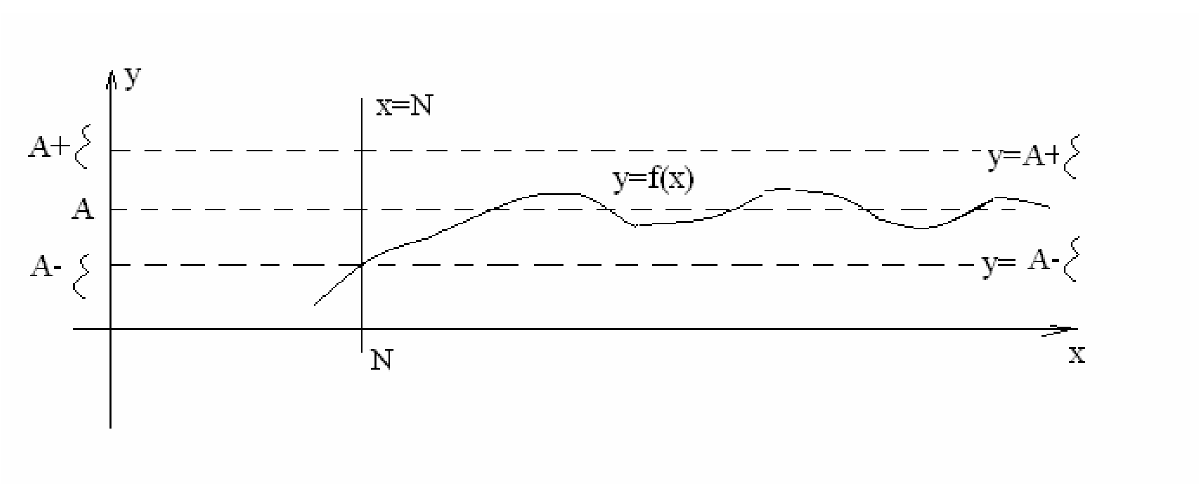

Figura 1.15

Exemplu:

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

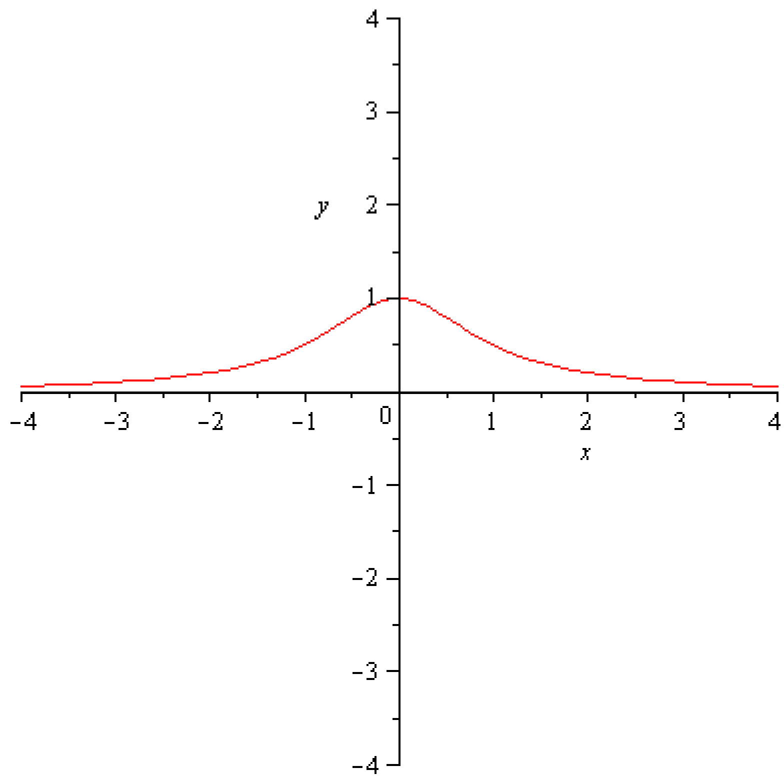

Figura 1.16 $\quad f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

Exerciții:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

Să se calculeze următoarele limite:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x \right) \qquad \lim_{x \to \pm\infty} x\left(\sqrt{x^2+1} - x \right) \qquad \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2} \right)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x}$$