4.5 Derivatele funcțiilor compuse

Fie $z = f(x, y)$ o funcție definită pe domeniul *D* din planul *xy* şi fie *x* şi *y* funcții de o variabilă *t* astfel încât

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in (t_0, t_1).$$

Presupunem că $\forall t \in (t_0, t_1)$ punctul corespunzător $(x, y) \in D$. In aceste condiții, substituția lui $x = \varphi(t)$ şi $y = \psi(t)$ reduce funcția $z = f(x, y)$ la o funcție compusă

$$z = f\left[\varphi(t), \psi(t)\right]$$

care este funcție de o singură variabilă *t*.

Teorema 1: Dacă într-un punct *t* există derivatele

$$\frac{dx}{dt} = \varphi'(t) \quad \text{şi} \quad \frac{dy}{dt} = \psi'(t)$$

şi dacă funcția $z = f(x, y)$ este diferențiabilă în punctul (x, y) cu $x = \varphi(t)$ şi $y = \psi(t)$, atunci funcția compusă $z = f\left[\varphi(t), \psi(t)\right]$ are derivată $\frac{dz}{dt}$ în *t* şi

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \tag{1}$$

Exemplu: Calculați derivata funcției $z = x^2 + y^2$ unde $x = \sin t$ şi $y = t^3$

$$\frac{dz}{dt} = 2x \cdot \cos t + 2y \cdot 3t^2 = 2\sin t \cos t + 2t^3 3t^2 = \sin 2t + 6t^5$$

Considerăm o funcție $z = f(x, y)$ în care $y = \psi(x)$. Atunci z este o funcție compusă de x, $z = f(x, \psi(x))$ și

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \qquad (2)$$

unde $\frac{\partial z}{\partial x}$ este o derivată parțială a lui $z = f(x, y)$ în raport cu *x,* calculată considerând *y* constant. Derivata $\frac{dz}{dx}$ este derivata totală a lui $z = f(x, y)$ în raport cu variabila independentă *x*, calculată considerând *y* ca o funcție de x, adică $y = \psi(x)$.

Exemplu: Calculați $\frac{\partial z}{\partial x}$ și $\frac{dz}{dx}$ pentru funcția

$$z = arctg\frac{y}{x} \quad \text{unde} \quad y = x^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(arctg\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} \cdot 2x$$

$$= -\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{2x^2}{x^2 + y^2} = -\frac{x^2}{x^2 + x^4} + \frac{2x^2}{x^2 + x^4} = \frac{1}{1 + x^2}$$

In continuare, ne ocupăm de derivarea unor funcții compuse de mai multe variabile.

Fie $z = f(x, y)$ cu $x = \varphi(\xi, \eta)$ și $y = \psi(\xi, \eta)$. Atunci $z = f[\varphi(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta)]$ este o funcție compusă de două variabile. Presupunem că există derivatele parțiale continue $\frac{\partial x}{\partial \xi}$, $\frac{\partial x}{\partial \eta}$, $\frac{\partial y}{\partial \xi}$, $\frac{\partial y}{\partial \eta}$ într-un punct (ξ, η) și presupunem că $f(x, y)$ este diferențiabilă în punctul corespunzător (x, y) cu $x = \varphi(\xi, \eta)$ și $y = \psi(\xi, \eta)$.

Funcția compusă $z = z(\xi, \eta)$ are derivate parțiale $\frac{\partial z}{\partial \xi}$ și $\frac{\partial z}{\partial \eta}$ în punctul (ξ, η).

Derivând z în raport cu ξ, variabila η este considerată constantă, adică x și y devin funcții de o singură variabilă ξ, $x = \varphi(\xi, c)$ și $y = \psi(\xi, c)$ și formula (1) poate fi aplicată

$$\frac{\partial z}{\partial \xi}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \xi}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \eta}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \eta}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \eta} \qquad (3)$$

Exemplu: Calculați derivatele parțiale $\frac{\partial z}{\partial \xi}$ şi $\frac{\partial z}{\partial \eta}$ pentru funcția $z=x^2y-xy^2$, unde $x=\xi\eta$ şi $y=\frac{\xi}{\eta}$.

$$\frac{\partial z}{\partial \xi}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \xi}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \xi}=\left(2xy-y^2\right)\eta+\left(x^2-2xy\right)\frac{1}{\eta}=\left(2\xi\eta\frac{\xi}{\eta}-\frac{\xi^2}{\eta^2}\right)\eta+\left(\xi^2\eta^2-2\xi\eta\frac{\xi}{\eta}\right)\frac{1}{\eta}$$

$$=\xi^2\left(\left(2-\frac{1}{\eta^2}\right)\eta+\left(\eta^2-2\right)\frac{1}{\eta}\right)=\xi^2\left(3\eta-3\frac{1}{\eta}\right)=3\xi^2\left(\eta-\frac{1}{\eta}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \eta}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \eta}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \eta}=\left(2xy-y^2\right)\xi+\left(x^2-2xy\right)\cdot\left(-\frac{\xi}{\eta^2}\right)$$

$$=\left(2\xi\eta\frac{\xi}{\eta}-\frac{\xi^2}{\eta^2}\right)\xi+\left(\xi^2\eta^2-2\xi\eta\frac{\xi}{\eta}\right)\cdot\left(-\frac{\xi}{\eta^2}\right)=\xi^3\left(1+\frac{1}{\eta^2}\right)$$

Considerăm o funcție $u=f\left(x,y,z\right)$ unde $x=x\left(\xi,\eta\right)$, $y=y\left(\xi,\eta\right)$ şi $z=z\left(\xi,\eta\right)$ atunci u este o funcție compusă de două variabile $u=u\left(\xi,\eta\right)$ şi

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \eta} \qquad (4)$$

Considerăm $u=f\left(x,y,z\right)$ cu $z=z\left(x,y\right)$. Atunci:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} \qquad (5)$$

Observație: $\frac{\partial u}{\partial x}$ este o derivată parțială totală a lui *u* în raport cu variabila independentă *x*, iar $\frac{\partial f}{\partial x}$ este o derivată parțială a lui $u = f(x, y, z)$ în raport cu *x* calculată considerând *y* şi *z* constante.

Diferențialele funcțiilor compuse

Fie $z = f(x, y)$ o funcție diferențiabilă cu variabilele independente *x* şi *y*, atunci diferențiala totală *dz* a funcției *z* este:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \qquad (6)$$

unde $dx = \Delta x$ şi $dy = \Delta y$.

Mai departe, presupunem că $z = f(x, y)$ este o funcție *compusă*, în care $x = \varphi(\xi, \eta)$ şi $y = \psi(\xi, \eta)$ şi aceste funcții au derivate parțiale continue $\frac{\partial x}{\partial \xi}$, $\frac{\partial x}{\partial \eta}$, $\frac{\partial y}{\partial \xi}$, $\frac{\partial y}{\partial \eta}$ într-un punct (ξ, η). De asemenea presupunem că funcția *z* are derivate parțiale continue $\frac{\partial z}{\partial x}$ şi $\frac{\partial z}{\partial y}$ în punctul (x, y) corespunzător lui (ξ, η), astfel încât $z = f(x, y)$ este diferențiabilă în (x, y).
Atunci funcția compusă $z = f[\varphi(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta)]$ are în punctul (ξ, η) derivatele parțiale:

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

Din aceste relații se observă că $\frac{\partial z}{\partial \xi}$ şi $\frac{\partial z}{\partial \eta}$ sunt continue în punctul (ξ, η). Atunci funcția compusă $z = f[\varphi(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta)]$ este diferențiabilă în punctul (ξ, η) şi are loc:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta$$

În această relație substituim derivatele parțiale şi regrupăm termenii:

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) d\xi + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) d\eta$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta \right) + \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \right)$$

Prin ipoteză funcțiile $x = \varphi(\xi, \eta)$ şi $y = \psi(\xi, \eta)$ au derivate parțiale continue în punctul (ξ, η) şi deci sunt diferențiabile în punctul (ξ, η) şi are loc:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta$$

Rezultă:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \qquad (7)$$

Comparând cu (6), concludem că diferențiala totală a funcției $z = f(x, y)$ este exprimată prin formule de aceeaşi formă, fie că variabilele sale sunt independnte fie că sunt funcții de alte variabile (invarianța formei diferențialei).

4.6 Derivarea funcțiilor implicite

Considerăm ecuația $F(x, y) = 0$, în care $F(x, y)$ este o funcție de două varibile definită pe un domeniu *D* din planul *xy*. Presupunem că această ecuație defineşte în mod implicit funcția de o singură variabilă $y = y(x)$. Forma explicită a acesteia se obține rezolvând ecuația dată în *y*.

Exemplu: Ecuația $y - x = 0$ defineşte în mod implicit funcția $y = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Următoarea teoremă furnizează condiţii suficiente pentru ca ecuaţia $F(x,y)=0$ să fie rezolvabilă în y pe o vecinătate a unui punct dat x_0.

Teorema 1: Fie ecuaţia $F(x,y)=0$ şi fie îndeplinite condiţiile:

i) Funcţia $F(x,y)$ este definită şi continuă pe domeniul:

$$D:\begin{cases} x_0-\delta_1<x<x_0+\delta_1 \\ y_0-\delta_2<y<y_0+\delta_2 \end{cases}$$

unde $\delta_1>0$, $\delta_2>0$. Acesta fiind un dreptunghi cu centrul în (x_0,y_0).

ii) $F(x_0,y_0)=0$

iii) există derivatele parţiale continue $\frac{\partial F}{\partial x}$ şi $\frac{\partial F}{\partial y}$ pe *D*.

iv) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$

Atunci, $\forall\varepsilon>0$, suficient de mic, există o vecinătate $(x_0-\delta_0,x_0+\delta_0)$ a punctului x_0, pe care există o funcţie continuă, unic definită, $y=f(x)$ astfel încât $y_0=f(x_0)$, $|y-y_0|<\varepsilon$ şi funcţia verifică ecuaţia dată $F(x,f(x))=0$ pe vecinătatea lui x_0. Mai mult, funcţia $y=f(x)$ este continuu diferenţiabilă pe vecinătatea lui x_0 şi

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}},\qquad \text{unde } \frac{\partial F}{\partial y}\neq 0$$

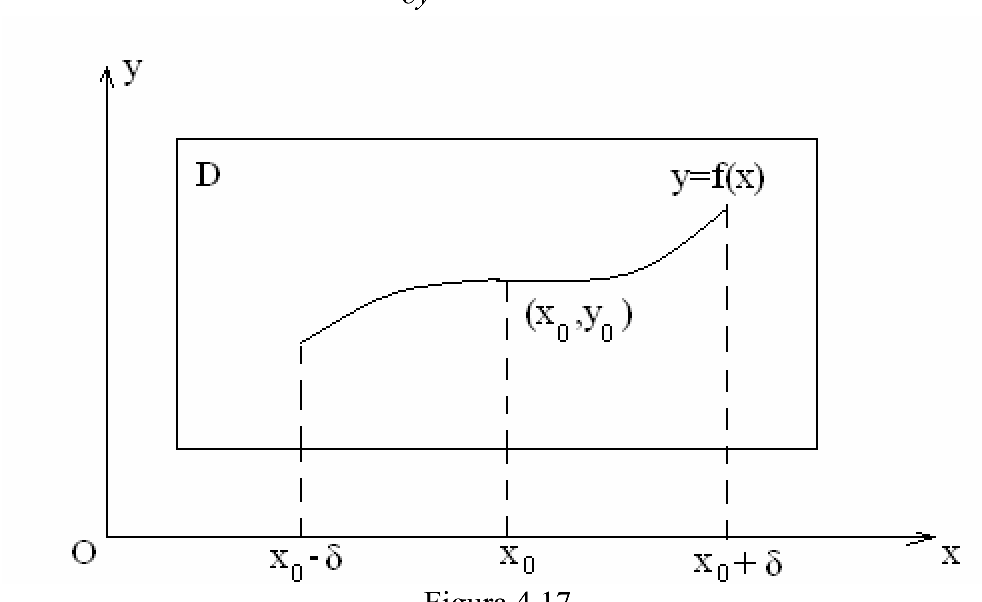

Figura 4.17

Exemplu: Calculați $\frac{dy}{dx}$ pentru funcția $y=f\left(x\right)$ definită implicit de ecuația $x^2+y^2-R^2=0$.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{2y}=-\frac{x}{y}, \quad y\neq 0$$

Similar teoremei precedente se poate formula o teoremă pentru funcția $z=f\left(x,y\right)$ definită implicit de ecuația $F\left(x,y,z\right)=0$.

Teorema 2: Fie ecuația $F\left(x,y,z\right)=0$ şi fie îndeplinite condițiile:

i) Funcția $F\left(x,y,z\right)$ este definită şi continuă pe domeniul:

$$D:\begin{cases} x_0-\delta_1<x<x_0+\delta_1 \\ y_0-\delta_2<y<y_0+\delta_2 \\ z_0-\delta_3<z<z_0+\delta_3 \end{cases}$$

unde $\delta_1>0$, $\delta_2>0$, $\delta_3>0$. Acesta fiind un paralelipiped dreptunghic cu centrul în $\left(x_0,y_0,z_0\right)$.

ii) $F\left(x_0,y_0,z_0\right)=0$

iii) există derivatele parțiale continue $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ şi $\frac{\partial F}{\partial z}$ pe *D*.

iv) $\frac{\partial F}{\partial z}\left(x_0,y_0,z_0\right)\neq 0$

Atunci, $\forall\varepsilon>0$, suficient de mic, există o vecinătate Ω a punctului $\left(x_0,y_0\right)$, pe care există o funcție continuă, unic definită, $z=f\left(x,y\right)$ astfel încât $z_0=f\left(x_0,y_0\right)$, $\left|z-z_0\right|<\varepsilon$ şi funcția verifică ecuația dată $F\left(x,y,f\left(x,y\right)\right)=0$ pe vecinătatea Ω. Mai mult, funcția $z=f\left(x,y\right)$ este derivate parțiale continue pe vecinătatea Ω şi formulele de calcul pentru derivatele parțiale ale funcției implicite sunt:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \qquad \frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$$

Exemplu: Calculați derivatele parțiale pentru funcția $z = f(x, y)$ definită implicit de ecuația $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{2z} = -\frac{y}{z} \quad , \quad z \neq 0$$

4.7 Plane tangente şi drepte normale la o suprafață

Fie S o suprafață definită de ecuația $F(x, y, z) = 0$.

Definiții:

- □ Punctul $M(x, y, z)$ de pe suprafața S se numeşte punct *regulat* (*nesingular*) al suprafeței S dacă toate cele trei derivate parțiale $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ şi $\frac{\partial F}{\partial z}$ în M există şi sunt continue şi cel puțin una dintre ele este diferită de zero.
- □ Punctul $M(x, y, z)$ este *singular* dacă toate cele trei derivate parțiale $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ şi $\frac{\partial F}{\partial z}$ se anulează în M sau dacă cel puțin una dintre ele nu există în M.

Exemplu:

Considerăm un con circular definit de ecuația: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$

$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$$
$$\frac{\partial F}{\partial z} = -2z$$

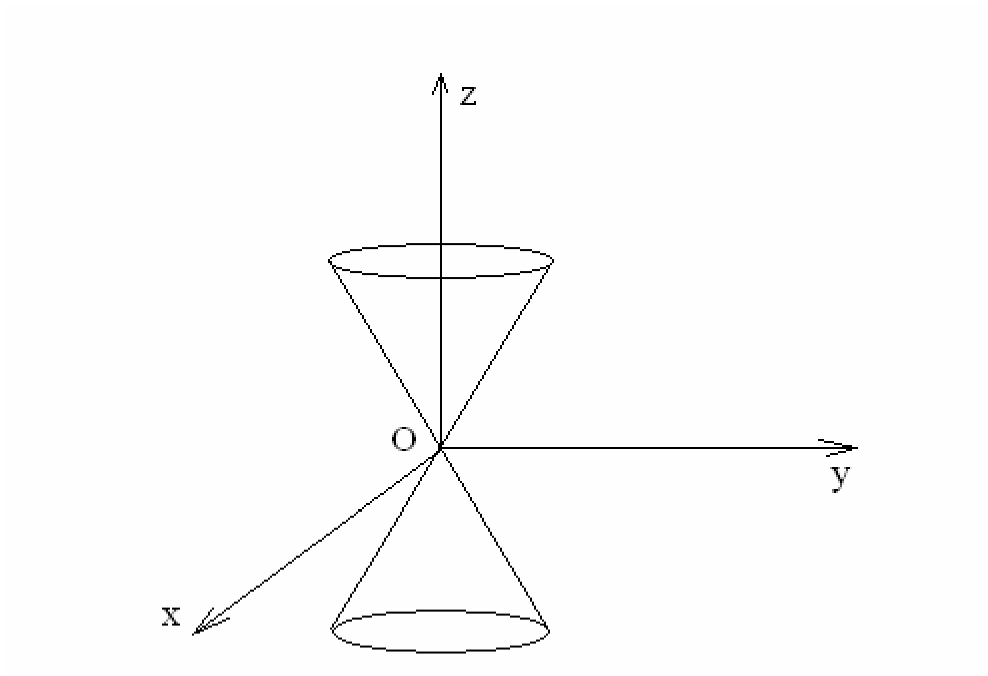

Figura 4.18

Singurul punct singular este originea O(*0,0,0*) în care toate cele trei derivate parţiale sunt nule.

Fie *L* o curbă în spaţiu definită de ecuaţiile parametrice:

$$L : \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t), \end{cases} \qquad t \in (\alpha, \beta)$$

Presupunem că $\varphi(t)$, $\psi(t)$ şi $\omega(t)$ au derivate continue care nu se anulează simultan pe (α, β) şi considerăm un punct nesingular $M_0(x_0, y_0, z_0)$ pe *L* definit de valoarea $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Atunci vectorul

$$\bar{\tau} = x'(t_0)\bar{i} + y'(t_0)\bar{j} + z'(t_0)\bar{k}$$

se află pe tangenta la curba *L* în punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Considerăm un punct nesingular *P* pe suprafaţa *S* şi ducem prin *P* o curbă *L* care aparţine suprafeţei *S*. Fie această curbă definită ca mai sus, de ecuaţiile parametrice

$$L:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t), \end{cases} \qquad t\in(\alpha,\beta)$$

Presupunem că $\varphi(t)$, $\psi(t)$ şi $\omega(t)$ au derivate continue care nu se anulează simultan pe (α,β).

Definiție: Tangenta la *L* în punctul *P* se numeşte *tangentă la suprafața S în punctul P.*

Deoarece curba *L* se află pe suprafața *S*, ecuațiile parametrice ale curbei pot fi substituite în ecuația $F(x,y,z)=0$ a suprafeței *S*:

$$F(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))=0$$

Derivăm această ecuație ca o funcție compusă de variabila *t* şi obținem:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}=0 \qquad (1)$$

Această relație este un produs scalar de doi vectori:

$$\overline{n}=\frac{\partial F}{\partial x}\overline{i}+\frac{\partial F}{\partial y}\overline{j}+\frac{\partial F}{\partial z}\overline{k}$$

$$\overline{\tau}=\frac{dx}{dt}\overline{i}+\frac{dy}{dt}\overline{j}+\frac{dz}{dt}\overline{k}$$

Vectorul $\overline{\tau}$ este vector tangent la curba *L* în punctul *P*. Vectorul $\overline{n}$ este independent de forma curbei ce trece prin punctul *P* şi depinde de coordonatele lui *P* şi de forma funcției $F(x,y,z)$ care defineşte suprafața.

Deoarece punctul *P* este nesingular, lungimea vectorului $\overline{n}$ este diferită de zero:

$$|\overline{n}|=\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}$$

Relație (*1*) implică $\overline{n}\cdot\overline{\tau}=0$, ceea ce înseamnă că vectorul $\overline{\tau}$ tangent la curba *L* în punctul *P* este perpendicular pe vectorul $\overline{n}$ în punctul *P*.

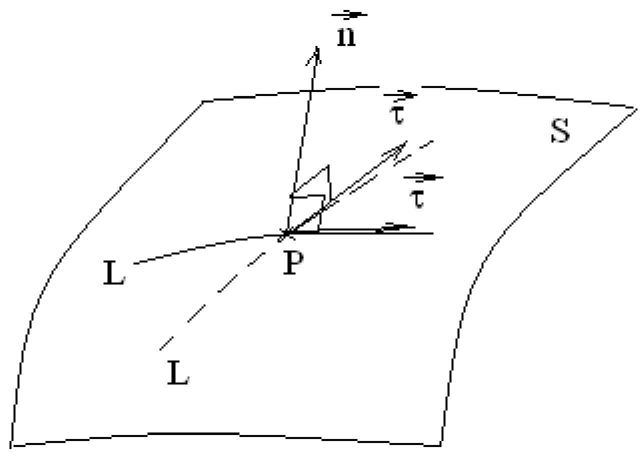

Figura 4.19

Acelaşi raționament este aplicabil la orice curbă de pe suprafața S care trece prin punctul P. Astfel, orice tangentă la suprafața S în punctul P este perpendiculară pe vectorul $\bar{n}$ şi astfel toate aceste tangente se află într-un acelaşi plan perpendicular pe vectorul $\bar{n}$.

Definiție: Planul format de toate tangentele la suprafața S într-un punct nesingular $P \in S$ se numeşte *plan tangent* la suprafață în punctul P.

Vectorul

$$\bar{n}\Big|_P = \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_P \bar{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_P \bar{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_P \bar{k}$$

Este un *vector normal* la planul tangent la suprafața $F(x, y, z) = 0$ în punctul P. *Ecuația planului tangent* la suprafața $F(x, y, z) = 0$ în punctul nesingular $P_0(x_0, y_0, z_0)$ este:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{(x_0, y_0, z_0)} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{(x_0, y_0, z_0)} \cdot (y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{(x_0, y_0, z_0)} \cdot (z - z_0) = 0$$

Observație: Dacă suprafața S este definită explicit de funcția $z = f(x, y)$, putem scrie:

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x} \qquad \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y} \qquad \frac{\partial F}{\partial z}=-1$$

Atunci ecuația planului tangent la suprafața $z=f(x,y)$ în punctul nesingular $P_0(x_0,y_0,z_0)$ este:

$$z-z_0=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}\cdot(x-x_0)+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}\cdot(y-y_0)$$

Interpretarea geometrică a diferențialei totale

Considerăm $x-x_0=\Delta x$ şi $y-y_0=\Delta y$ în ecuația de mai sus şi obținem:

$$z-z_0=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}\cdot\Delta x+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}\cdot\Delta y$$

Expresia din dreapta este diferențiala totală a funcției $z=f(x,y)$ în punctul $M_0(x_0,y_0)$ din planul *xy* adică $z-z_0=dz$.
Atunci, diferențiala totală a funcției $z=f(x,y)$ în punctul $M_0(x_0,y_0)$ corespunzătoare creşterilor Δx şi Δy este egală cu creşterea $z-z_0$ a coordonatei *z* a planului tangent la suprafață în $P_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ obținută în deplasarea de la $M_0(x_0,y_0)$ la $M(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$.

Definiție: Dreapta care trece prin punctul $P_0(x_0,y_0,z_0)$ al suprafeței $F(x,y,z)=0$ perpendicular pe planul tangent la această suprafață în P_0 se numeşte *normala* la suprafață în P_0.

Vectorul:

$$\bar{n}=\frac{\partial F}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial F}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial F}{\partial z}\bar{k}$$

este vectorul director al normalei, normală definită de ecuațiile:

$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}}$$

Dacă suprafața S este definită de ecuația $z=f(x,y)$, atunci ecuațiile normalei în punctul $P_0(x_0,y_0,z_0)$ devine:

$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}}=\frac{z-z_0}{-1}$$

Exemplu: Scrieți ecuațiile planului tangent şi normalei la suprafața $z=\frac{x^2}{2}-y^2$ în punctul $M(2,-1,1)$.

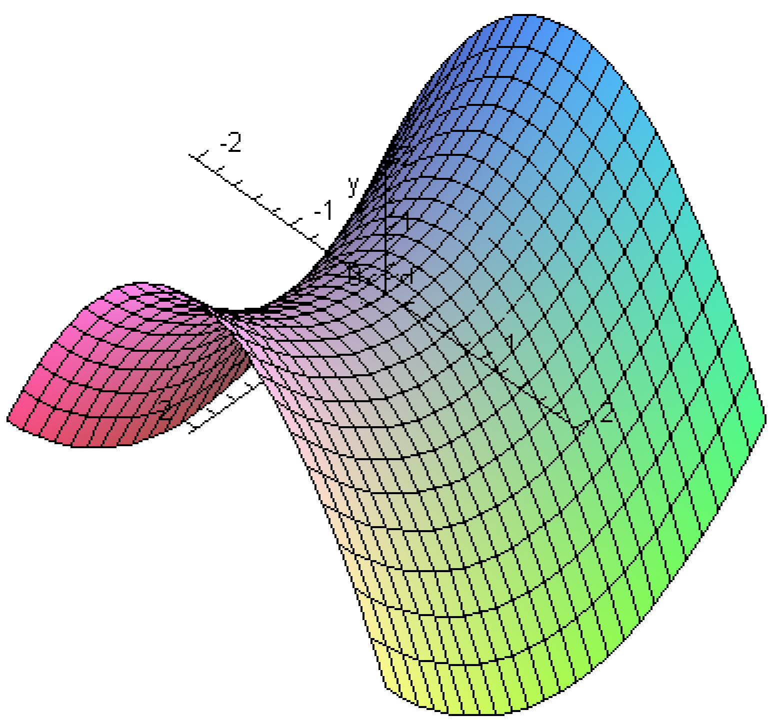

Figura 4.20 $z=\frac{x^2}{2}-y^2$

Ecuația planului tangent este:

$$z-1 = x\Big|_{(2,-1)} \cdot (x-2) + (-2y)\Big|_{(2,-1)} \cdot (y+1)$$

$$z-1 = 2(x-2) + 2(y+1)$$

Ecuațiile normalei sunt:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}$$

4.8 Derivate de ordin superior

Fie $z = f(x, y)$ o funcție care are derivate parțiale $\frac{\partial z}{\partial x}$ şi $\frac{\partial z}{\partial y}$ în fiecare punct dintr-un domeniu *D*. Aceste derivate

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y) \quad \text{şi} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$$

Sunt funcții de *x* şi *y* pe *D*. Aceste funcții pot avea la rândul lor derivate parțiale în anumite puncte din *D* sau pe tot domeniul *D*.

Definiție: Derivatele parțiale ale derivatelor parțiale $\frac{\partial z}{\partial x}$ şi $\frac{\partial z}{\partial y}$ dacă există se numesc *derivate parțiale de ordinul doi* pentru funcția $z = f(x, y)$.

Fie $z = f(x, y)$ o funcție de două variabile, atunci putem scrie următoarele derivate parțiale de ordinul doi pentru aceasta:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=f''_{yx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}$$

Derivatele f''_{xy} şi f''_{yx} se numesc derivate parţiale *mixte*. Prima dintre ele se calculează derivând funcţia dată mai întâi în raport cu x şi apoi în raport cu y şi cea de-a doua derivată se calculează derivând funcţia în raport cu y şi apoi cu x.

Observaţie: Derivatele parţiale de ordinul trei şi mai mult pot fi definite în mod similar.

Exemplu: Calculaţi derivatele parţiale de ordinul întâi şi doi ale funcţiei $z=x^3y^2-xy^3$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^2-y^3 \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=2x^3y-3xy^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6xy^2 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x^3-6xy$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=6x^2y-3y^2 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=6x^2y-3y^2$$

Teoremă: Fie $z=f(x,y)$ o funcţie care are derivate parţiale f'_x, f'_y, f''_{xy} şi f''_{yx} pe o vecinătate a punctului $M_0(x_0,y_0)$ şi fie f''_{xy} şi f''_{yx} continue în $M_0(x_0,y_0)$. Atunci, $f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$ în $M_0(x_0,y_0)$.

Observaţie: Este important ca derivatele mixte f''_{xy} şi f''_{yx} să fie continue în $M_0(x_0,y_0)$.

Exemplu: Funcţia:

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0\quad , & x=y=0 \end{cases}$$

are derivate parţiale mixte f''_{xy} şi f''_{yx} care nu sunt continue în $O(0,0)$, astfel $f''_{x,y}(0,0)=-1$ şi $f''_{yx}(0,0)=+1$.

Diferențiale de ordin superior

Fie $z = f(x, y)$ o funcție definită pe un domeniu *D*. Dacă $z = f(x, y)$ este diferențiabilă pe *D*, atunci diferențiala totală a funcției în punctul $(x, y) \in D$ corespunzătoare creşterilor *dx* şi *dy* a variabilelor *x* şi *y* este

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

În această relație $dx = \Delta x$ şi $dy = \Delta y$ sunt creşteri arbitrare ale variabilelor. Aceste creşteri pot fi păstrate constante şi atunci diferențiala totală este o funcție de *x* şi *y*, care poate fi la rândul său diferențiabilă.

Definiție: Diferențiala totală a diferențialei totale *dz* în punctul $(x, y) \in D$ corespunzătoare creşterilor *dx* şi *dy* a variabilelor independente se numeşte *diferențială secundă* sau *diferențială de ordinul doi* a funcției $z = f(x, y)$ şi se notează $d^2 z$. Astfel, conform definiției:

$$d^2 z = d(dz) \qquad (1)$$

Problemă: O formulă de calcul pentru această diferențială secundă.

Fie $z = f(x, y)$ o funcție cu derivate parțiale continue de ordinul întâi şi doi pe *D*. Atunci diferențiala totală *dz* a funcției $z = f(x, y)$ este diferențiabilă şi există $d^2 z$ pe *D*.
Folosind regulile de diferențiere, obținem:

$$d^2 z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right)$$

$$= d\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx\right) + d\left(\frac{\partial z}{\partial y} dy\right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dy\right) dx + \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy\right) dy$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2$$

Deoarece,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

Obținem următoarea formulă:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 \qquad (2)$$

unde $dx^2 = (dx)^2$, $dy^2 = (dy)^2$.

Formal putem rescrie formula (2) astfel:

$$d^2 z = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 z \qquad (3)$$

Exemplu: Calculați diferențialele de ordinul întâi şi doi ale funcției $z = 2x^2 - 3xy - y^2$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$$dz = (4x - 3y)dx + (-3x - 2y)dy$$

$$d^2 z = 4dx^2 - 6dxdy - 2dy^2$$

Formulele pentru diferențialele de ordinul trei, patru se pot obține în mod asemănător, de exemplu $d^3 z = d\left(d^2 z\right)$. În general, diferențiala totală de ordinul *n, adică* $d^n z$, este diferențiala diferențialei de ordinul $n-1$:

$$d^n z = d\left(d^{n-1} z\right).$$

Dacă $z = f(x, y)$ este o funcție cu derivate parțiale continue până la ordinul *n* pe *D*, atunci există diferențiala totală $d^n z$ pe *D*, dată de formula:

$$d^n z = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} \right)^n z \qquad (4)$$

În general, diferențiala de ordinul n a unei funcții de m variabile $u = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_m\right)$ este:

$$d^n u = \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + dx_m \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^n u$$

Observație: Dacă x şi y nu sunt variabile independente, ci sunt funcții de alte variabile ξ şi η, atunci forma diferențialei secunde nu rămâne invariantă. Într-adevăr,

$$z = f(x, y) \quad \text{cu} \quad x = \varphi(\xi, \eta) \quad y = \psi(\xi, \eta)$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

unde dx şi dy sunt funcții şi nu constante.

$$d^2 z = d\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right)$$

$$= d\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx \right) + d\left(\frac{\partial z}{\partial y} dy \right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) dx + d\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) dy + \frac{\partial z}{\partial x} d\left(dx\right) + \frac{\partial z}{\partial y} d\left(dy\right)$$

$$= \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 z + \frac{\partial z}{\partial x} d^2 x + \frac{\partial z}{\partial y} d^2 y$$

4.9 Formula lui Taylor pentru funcții de mai multe variabile

Fie $z = f(x, y)$ o funcție cu derivate parțiale continue până la ordinul $n+1$ inclusiv, pe o vecinătate Ω a punctului $\left(x_0, y_0\right)$. Pe vecinătatea Ω are loc formula Taylor:

$$f\left(x, y\right) = f\left(x_0, y_0\right) + \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0, y_0\right)\left(x - x_0\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0, y_0\right)\left(y - y_0\right) \right] +$$

$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right]+\dots$$

$$+\frac{1}{n!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(x_0,y_0)+R_{n+1}(x,y)$$

unde restul în forma Lagrange este:

$$R_{n+1}(x,y)=\frac{1}{(n+1)!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1} f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)$$

cu $\theta\in(0,1)$.

Caz particular:
Dacă în formula Taylor $x_0=y_0=0$, atunci aceasta se numeşte formulă Maclaurin şi arată astfel:

$$f(x,y)=f(0,0)+\frac{1}{1!}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y\right]+$$

$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)x^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)xy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)y^2\right]+\dots$$

$$+\frac{1}{n!}\left[x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(0,0)+R_{n+1}(x,y)$$

unde restul în forma Lagrange este:

$$R_{n+1}(x,y)=\frac{1}{(n+1)!}\left[x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1} f(\theta\Delta x,\theta\Delta y) \qquad \text{cu } \theta\in(0,1).$$

Exemplu: Scrieți formula Maclaurin pentru funcția $f(x,y)=e^x\sin y$ până la termeni de ordinul doi.

$$f(0,0)=0$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = e^x \sin y\Big|_{(0,0)} = 0 \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} = e^x \cos y\Big|_{(0,0)} = 1$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(0,0)} = e^x \sin y\Big|_{(0,0)} = 0 \qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(0,0)} = -e^x \sin y\Big|_{(0,0)} = 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(0,0)} = e^x \cos y\Big|_{(0,0)} = 1$$

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y\right] +$$
$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)y^2\right] + \ldots$$

$$e^x \sin y = 0 + \frac{1}{1!}\left[0 \cdot x + 1 \cdot y\right] + \frac{1}{2!}\left[0 \cdot x^2 + 2 \cdot 1 \cdot xy + 0 \cdot y^2\right] + \ldots$$

$$e^x \sin y = y + xy + \ldots$$

4.10 Puncte de extrem pentru o funcție de mai multe variabile

Fie $z = f(x,y)$ o funcție definită pe un domeniu D şi fie $M_0(x_0, y_0) \in D$ punct interior.

Definiție: Dacă $\exists \delta > 0$ astfel încât $\forall \Delta x, \Delta y$ cu $|\Delta x| < \delta$ şi $|\Delta y| < \delta$ să aibă loc:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \le 0$$

atunci, $M_0(x_0, y_0)$ este un *maxim local* pentru $f(x,y)$.
Dacă $\forall \Delta x, \Delta y$ cu $|\Delta x| < \delta$ şi $|\Delta y| < \delta$ şi are loc:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \ge 0$$

atunci, $M_0(x_0, y_0)$ este un *minim local* pentru $f(x, y)$.

Exemple:

1) $z = x^2 + y^2$ are în $O(0,0)$ punct de minim.

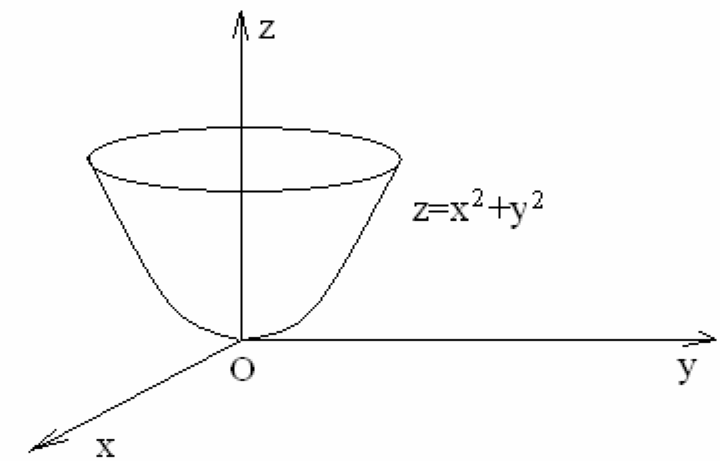

Figura 4.21

2) $z = 1 - x^2 - y^2$ are în $O(0,0)$ punct de maxim

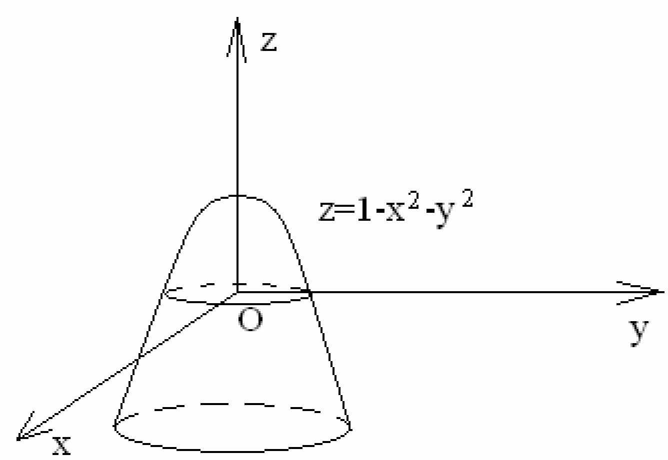

Figura 4.22

Teorema 1: (Condiții necesare de extrem) Dacă o funcție $z = f(x, y)$ are extrem într-un punct $M_0(x_0, y_0)$, atunci în acel punct fiecare derivată parțială $\frac{\partial z}{\partial x}$ şi $\frac{\partial z}{\partial y}$ fie se anulează fie nu există.

Definiții: Punctele în care derivatele parțiale $\frac{\partial z}{\partial x}$ și $\frac{\partial z}{\partial y}$ se anulează sau nu există se numesc *puncte critice* pentru funcția $z = f(x, y)$.

Punctele în care derivatele parțiale $\frac{\partial z}{\partial x}$ și $\frac{\partial z}{\partial y}$ se anulează se numesc *puncte staționare*.

Observație: Teorema 1 ne dă numai condiții necesare de extrem. De exemplu, $z = x^2 - y^2$ are derivatele parțiale

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -2y$$

care sunt nule în punctul $O(0,0)$, dar funcția nu are extrem în origine.

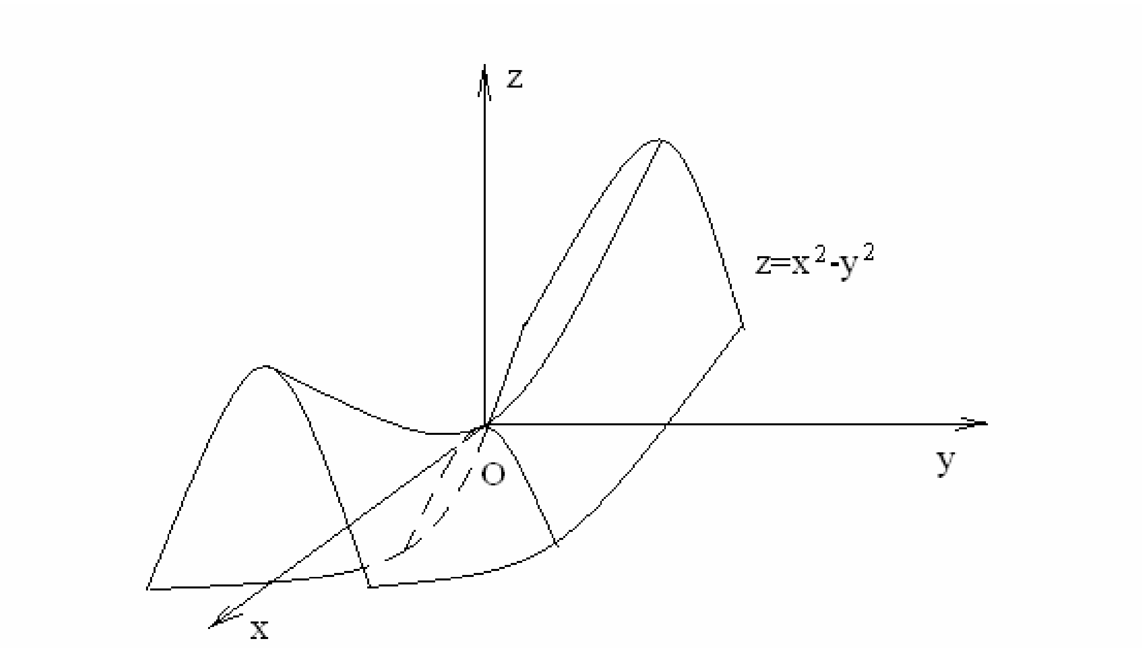

Figura 4.23

Punctul $O(0,0)$ este punct de minimax.

Teorema următoare furnizează condiții suficiente pentru extrem.

Teorema 2: Fie $M_0(x_0, y_0)$ un punct staționar pentru funcția $z = f(x, y)$, adică

$$f'_x(x_0, y_0) = 0 \qquad f'_y(x_0, y_0) = 0$$

Presupunem că pe o vecinătate a punctului $M_0(x_0, y_0)$ funcția $f(x, y)$ are derivate parțiale continue până la ordinul doi. Atunci:

i) Funcția $f(x, y)$ are un maxim în $M_0(x_0, y_0)$ dacă în acest punct determinantul:

$$D = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

$$= f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) - f''^{2}_{xy}(x_0, y_0) > 0$$

$$\text{şi} \quad f''_{xx}(x_0, y_0) < 0 \quad \text{şi} \quad f''_{yy}(x_0, y_0) < 0$$

ii) Funcția $f(x, y)$ are un minim în $M_0(x_0, y_0)$ dacă în acest punct determinantul:

$$D = f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) - f''^{2}_{xy}(x_0, y_0) > 0$$

$$\text{şi} \quad f''_{xx}(x_0, y_0) > 0 \quad \text{şi} \quad f''_{yy}(x_0, y_0) > 0$$

iii)Funcția $f(x, y)$ nu are un extrem în $M_0(x_0, y_0)$ dacă $D < 0$.

Dacă determinantul este nul, nu avem nici o concluzie.

Exemplu: Examinați pentru extrem funcția:

$$z = x^2 + 2y^2 - 2x + 4y - 6$$