Cap.4 Funcții de mai multe variabile

4.1 Definiții şi notații

Multe funcții din lumea reală depind de două sau mai multe variabile.
De exemplu, volumul unui paralelipiped dreptunghic cu muchiile *x, y* şi *z* este $V = x\,y\,z$, unde *x, y* şi *z* sunt numere pozitive. Valoarea volumului *V* este o funcție de trei variabile cele trei dimensiuni *x, y* şi *z.*
Temperatura măsurată pe glob este o funcție de două variabile, anume latitudinea şi longitudinea locului.

Fie $\mathbb{R}^n$ spațiul Euclidian *n*-dimensional şi fie $M'(x_1', x_2', \dots, x_n')$ şi $M''(x_1'', x_2'', \dots, x_n'')$ două puncte în acest spațiu. Notăm cu $\rho(M', M'')$ *distanța* dintre punctele M' şi M''

$$\rho(M', M'') = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(x_k'' - x_k'\right)^2} \tag{1}$$

Cazuri particulare:

$n = 1$ $\rho(M', M'') = \left|x_1'' - x_1'\right|$ reprezintă distanța dintre două puncte $M'(x_1')$ şi $M''(x_1'')$ de pe o dreaptă.

$n = 2$ $\rho(M', M'') = \sqrt{\left(x_1'' - x_1'\right)^2 + \left(x_2'' - x_2'\right)^2}$ reprezintă distanța dintre două puncte $M'(x_1', x_2')$ şi $M''(x_1'', x_2'')$ din plan.

Definiție: Fie punctul $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ şi fie ε un număr pozitiv real. Mulțimea tuturor punctelor $M \in \mathbb{R}^n$ astfel încât $\rho(M, M_0) < \varepsilon$ se numeşte *sferă deschisă n-dimensională* cu centrul în M_0 şi rază ε.

Cazuri particulare:

$n=2$ $\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2<\varepsilon^2$ defineşte un disc circular cu centrul $M_0\left(x_0,y_0\right)$ şi rază ε (fără cercul exterior).

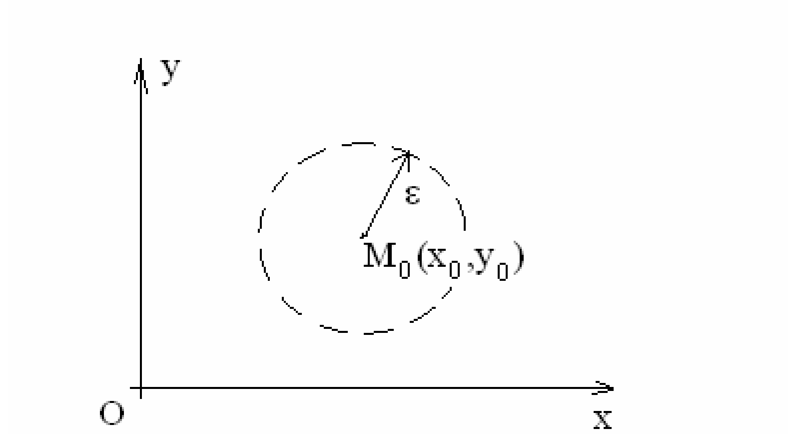


Figura 4.1

$n=3$ $\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2+\left(z-z_0\right)^2<\varepsilon^2$ defineşte o sferă deschisă cu centrul în $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ şi rază ε.

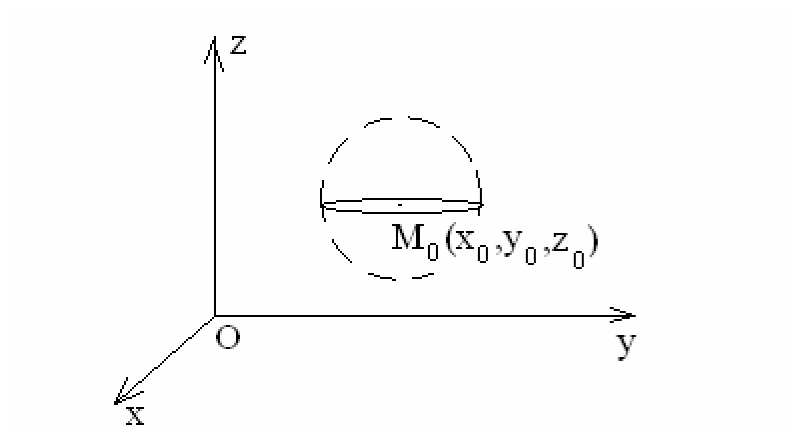


Figura 4.2

Considerăm un alt tip de vecinătate pentru punctul $M_0\left(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0\right)$, şi anume o vecinătate rectangulară formată din toate punctele $M\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)\in\mathbb{R}^n$ astfel încât

$$x_i^0-\varepsilon_i<x_i<x_i^0+\varepsilon_i,\quad \varepsilon_i>0\quad i=1,2,\ldots,n$$

Cazuri particulare:

$n=1 \Rightarrow$ vecinătatea se reduce la $\varepsilon -$ vecinătatea $x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon$ lui x_0.
$n=2 \Rightarrow$ vecinătatea se reduce la figura plană mărginită de un dreptunghi cu laturile $2\varepsilon_1$ şi $2\varepsilon_2$.

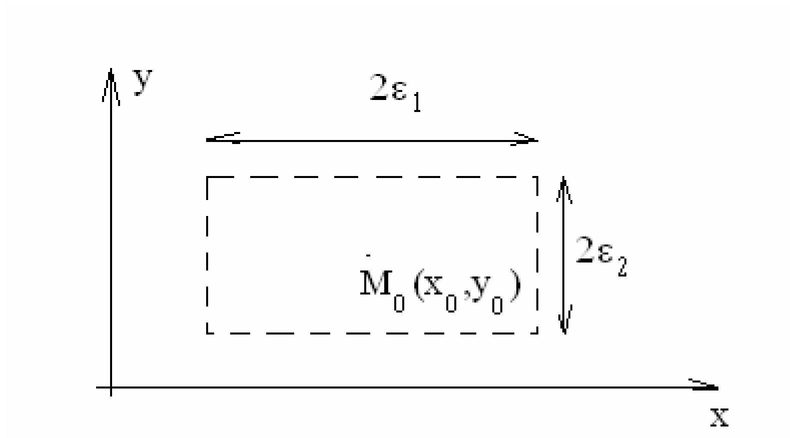


Figura 4.3

$n=3 \Rightarrow$ vecinătatea se reduce la paralelipipedul deschis cu centrul în $M_0(x_0,y_0,z_0)$ şi muchiile $2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, 2\varepsilon_3$.

Definiții:

Fie mulțimea $E\subset\mathbb{R}^n$. Punctul $M\subset E$ se numeşte *punct interior* pentru *E* dacă există $\varepsilon>0$ astfel încât *E* să conțină pe *M* împreună cu $\varepsilon -$ vecinătatea sa.

Mulțimea *E* se numeşte mulțime *deschisă* dacă *E* conține numai puncte interioare. Exemplu: pentru $n=2$ orice disc circular este mulțime deschisă.

Punctul *P*, $P\in\mathbb{R}^n$, se numeşte *punct de frontieră*, pentru mulțimea $E\subset\mathbb{R}^n$ dacă orice vecinătate a lui *P* conține puncte din *E* şi din afara lui *E*.

Mulțimea tuturor punctelor frontieră pentru *E* se numeşte *frontiera* lui *E*. Notăm frontiera lui *E* cu ∂E.

Reuniunea lui *E* cu ∂E formează o mulțime închisă $\overline{E}=E\cup\partial E$. Exemplu: reuniunea unui disc circular cu cercul de frontieră este un disc închis.

$E\subset\mathbb{R}^n$ se numeşte *conexă* dacă pentru orice două puncte din *E* există o curbă continuă care le uneşte şi este conținută în *E*. Altfel se numeşte *neconexă*.

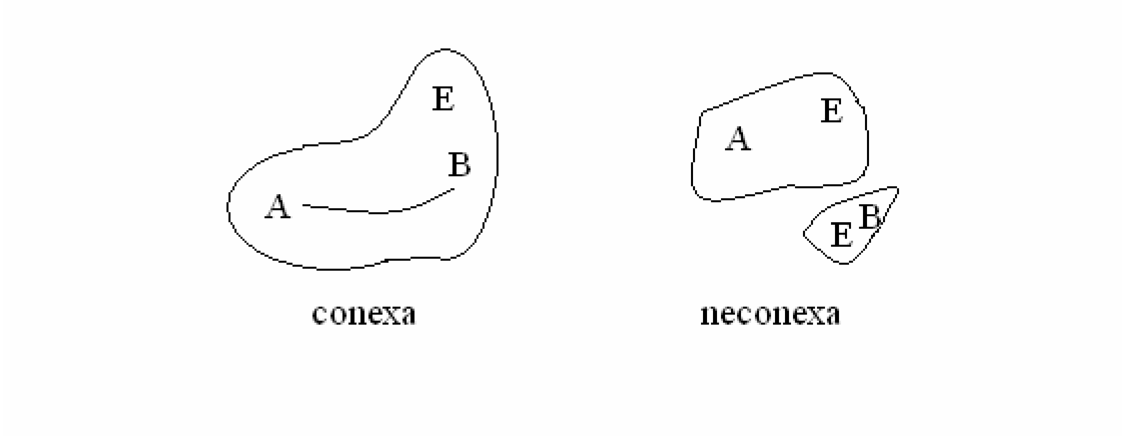


Figura 4.4

O mulțime deschisă şi conexă se numeşte *domeniu*.

Un domeniu se numeşte *mărginit* dacă există o sferă care să conțină domeniul.

Orice domeniu care conține un punct M_0 este vecinătate pentru M_0 .

Noțiunea de funcție de mai multe variabile

Presupunem că există o lege care asociază la fiecare punct $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ al mulțimii $E \subset \mathbb{R}^n$, un număr real *u*. Spunem că am definit o funcție de punctul *M* sau o funcție de *n* variabile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ şi scriem

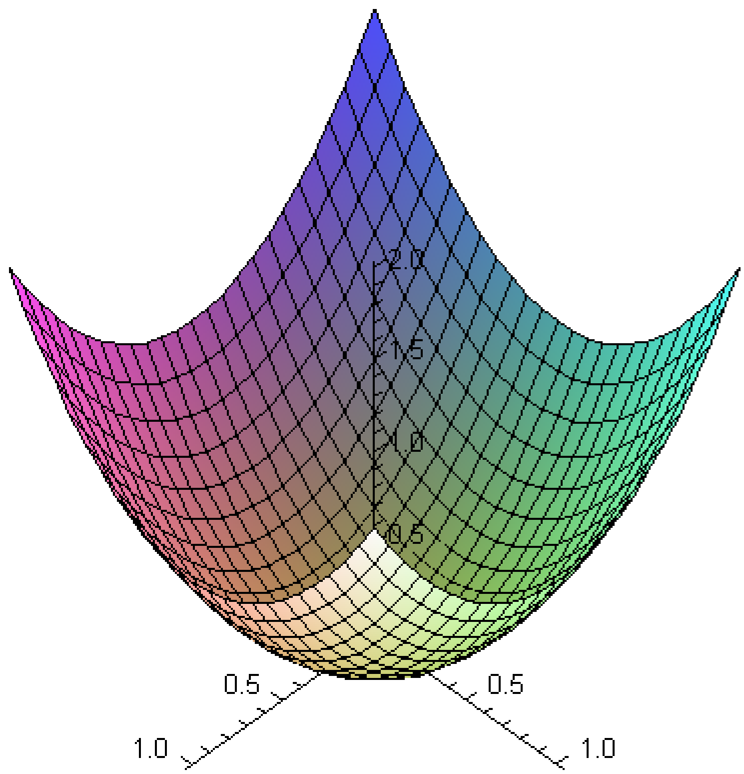
$$u = f(M) \quad \text{sau} \quad u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad M \in E$$

E este domeniul de definiție al funcției *f*.

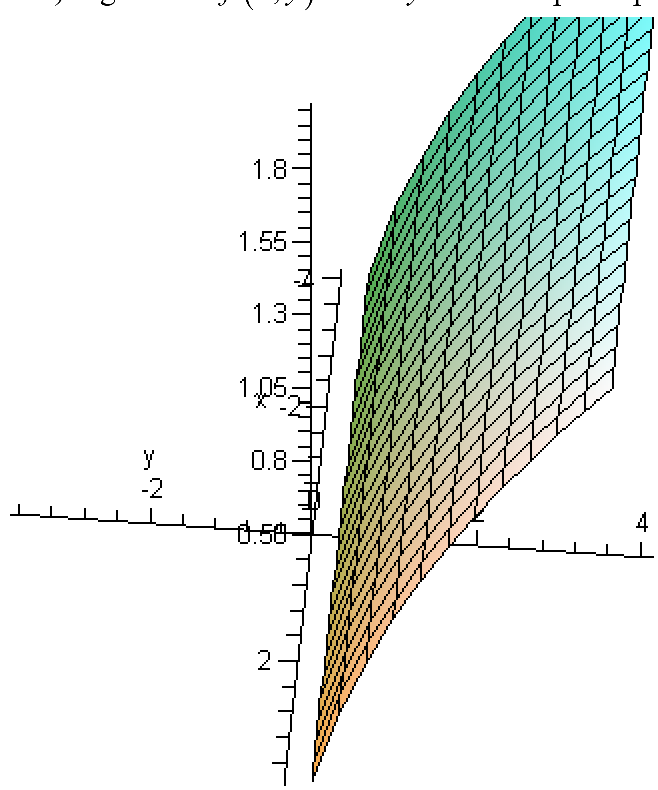
Ne vom limita la funcții de două variabile $z = f(x, y)$. Rezultatele pot fi generalizate la funcții de mai multe variabile.

Fie $z = f(x, y)$ o funcție definită pe un domeniu *E* din planul *xy*. Domeniul poate fi tot planul $\mathbb{R}^2$ sau mai puțin.

Exemple:



1) Figura 4.5 $f(x,y)=x^2+y^2$ definită pe tot planul xy



2) Figura 4.6 $f(x,y)=\sqrt{y}$ definită numai pentru $y \geq 0$

3. $f(x,y) = \dfrac{1}{x+y}$ definită numai pentru $x + y \neq 0$

Problemă: Cum vizualizăm o funcție de două variabile?

Fie $z = f(x,y)$

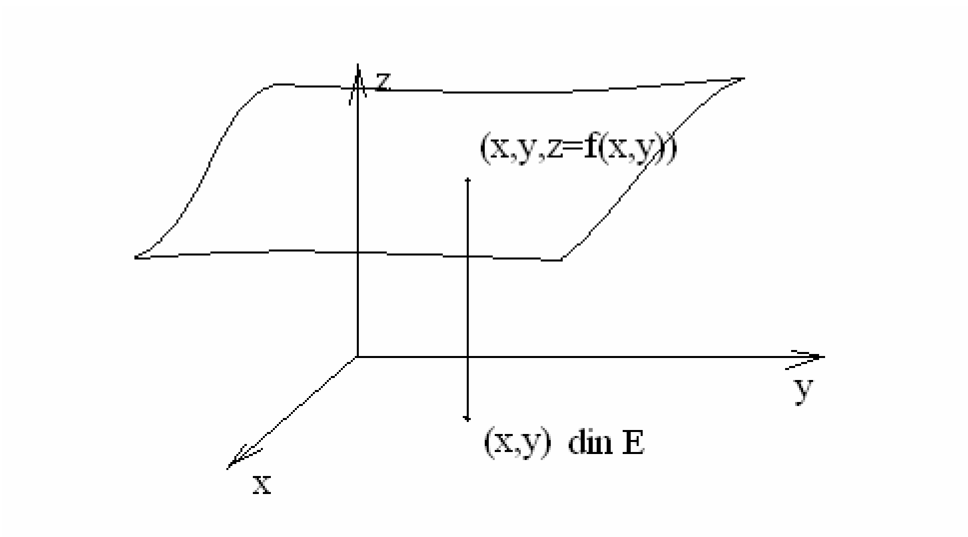


Figura 4.7

Atunci, fiecare punct $(x,y) \in E$ este asociat cu un punct $(x, y, f(x,y))$ din $\mathbb{R}^3$. Mulțimea tuturor punctelor $(x, y, f(x,y))$ cu $(x,y) \in E$ se numeşte *graficul* funcției $z = f(x,y)$ şi formează o suprafață.

Exemple: 1) $f(x,y) = -y$ Graficul $z = -y$ este un plan.

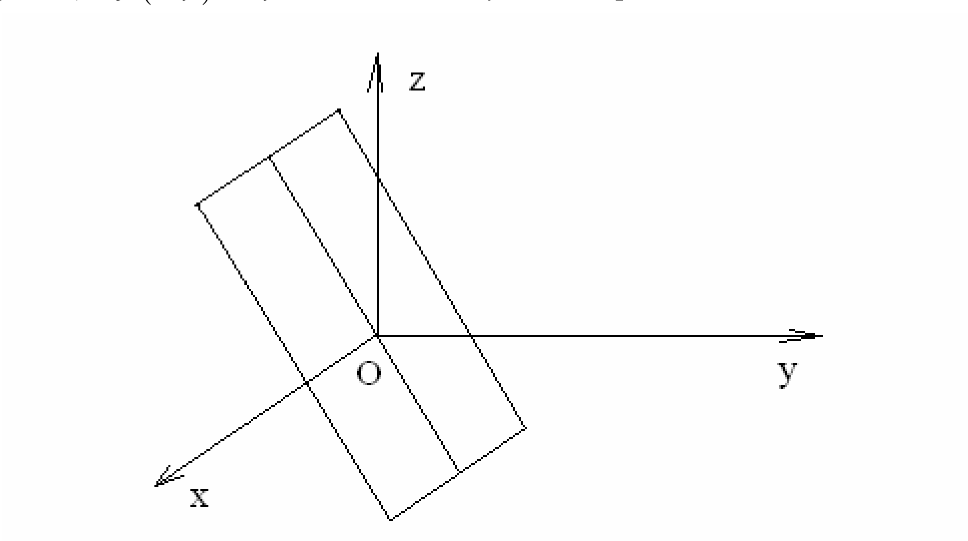


Figura 4.8 $f(x,y) = -y$

2) $f(x,y) = x^2 + y^2$

Graficul funcției $z = x^2 + y^2$ este un paraboloid de revoluție.

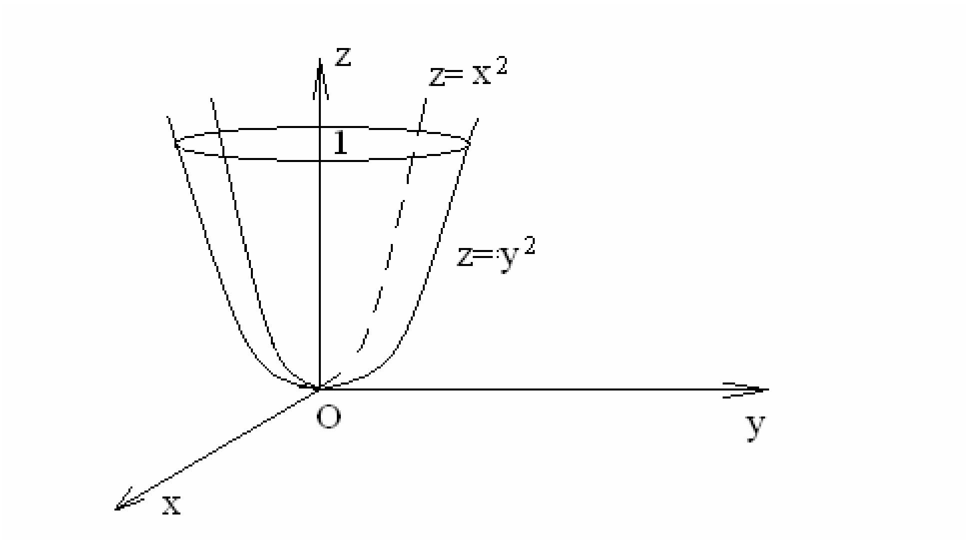


Figura 4.9

În planul yz definit de ecuația $x = 0$ intersecția cu suprafața este parabola $z = y^2$

În planul xz definit de ecuația $y = 0$ intersecția cu suprafața este parabola $z = x^2$

În planul orizontal $z = 1$ intersecția cu suprafața este cercul $x^2 + y^2 = 1$

3) $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$

Graficul funcției $z = 1 - x^2 - y^2$ este un paraboloid de revoluție.

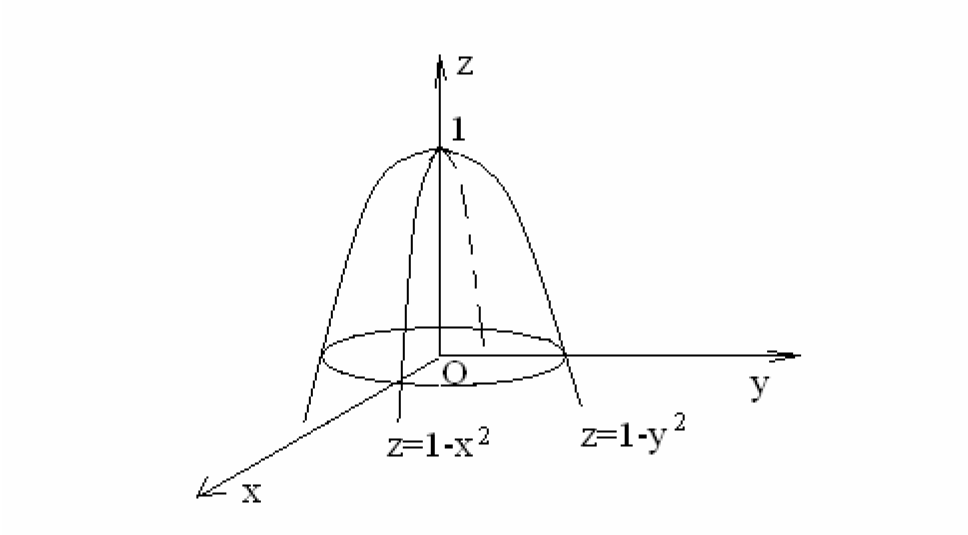


Figura 4.10

În planul yz definit de ecuația $x = 0$ intersecția cu suprafața este parabola $z = 1 - y^2$

În planul xz definit de ecuația $y = 0$ intersecția cu suprafața este parabola $z = 1 - x^2$

În planul orizontal $z = 0$ intersecția cu suprafața este cercul $x^2 + y^2 = 1$

4) $f(x, y) = y^2 - x^2$

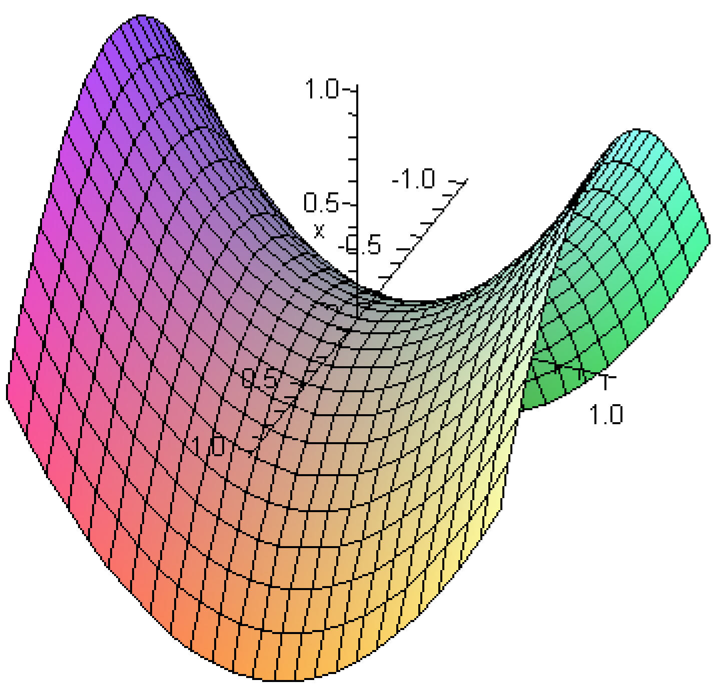


Figura 4.11 $f(x, y) = y^2 - x^2$

În planul yz definit de ecuația $x=0$ intersecția cu suprafața este parabola $z=y^2$

În planul xz definit de ecuația $y=0$ intersecția cu suprafața este parabola $z=-x^2$

Datorită dificultății cerem computerului să reprezinte grafic funcțiile (vezi fig. 4.11).

Pentru a investiga și vizualiza forma funcției $z=f(x,y)$ sunt utile așa numitele *curbe de nivel* . O curbă de nivel este o mulțime de puncte din planul *xy* în care valoarea funcției este constantă

$$z=f(x,y)=c$$

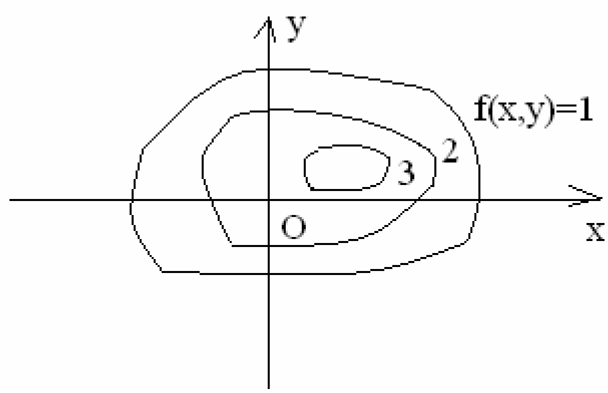


Figura 4.12

Curba de nivel poate fi construită intersectând suprafața $z=f(x,y)$ cu planul $z=c$ paralel cu planul *xy* și apoi proiectând vertical curba de intersecție pe planul *xy*.

O colecție de curbe de nivel $f(x,z)=c_m$, $m=1,2,\ldots,k$ unde $c_{m+1}-c_m=h=ct$ furnizează informații utile despre comportamentul funcției.

Observație: Cu cât curbele de nivel sunt mai apropiate între ele cu atât viteza de modificare a funcției este mai mare.

Exemplu: $z=x^2+y^2$
Curbele sale de nivel sunt cercuri cu centrul în originea sistemului de coordonate.

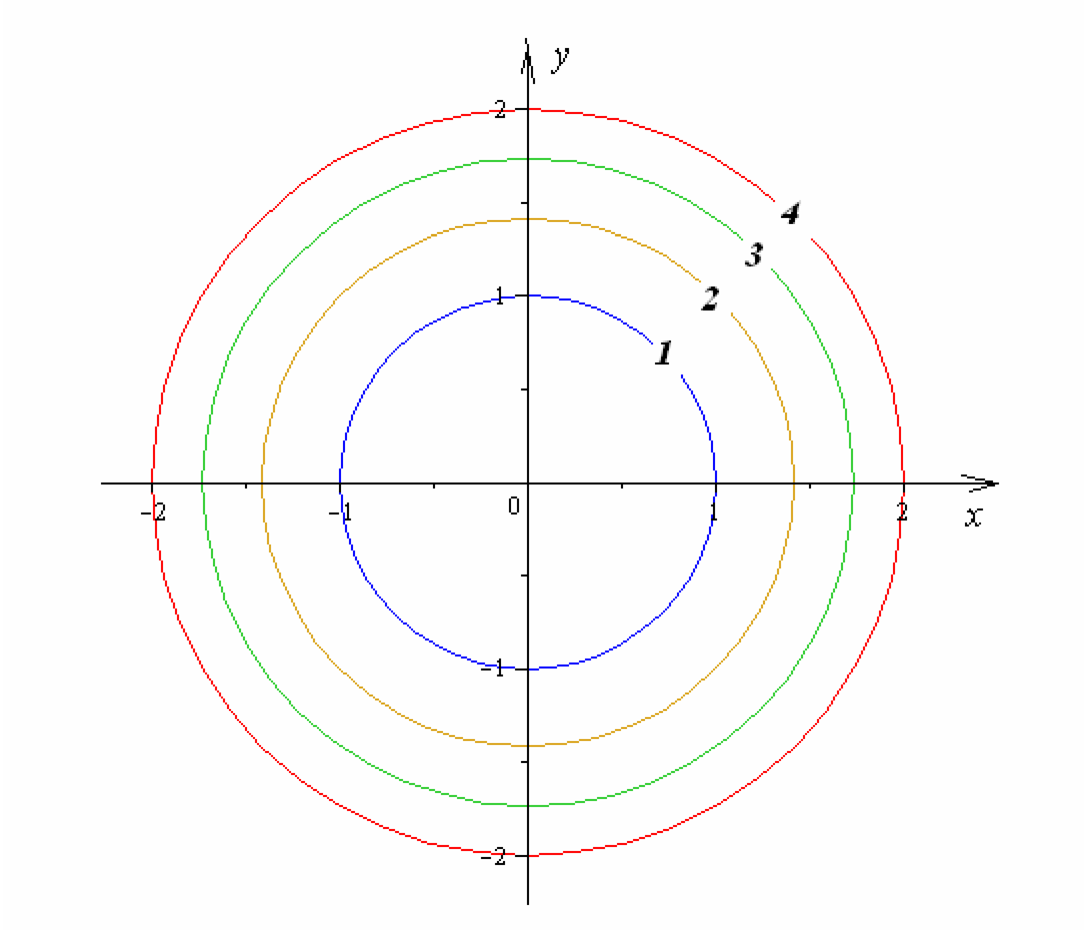


Figura 4.13

$f(x,y)=0 \quad x^2+y^2=0$

$f(x,y)=1 \quad x^2+y^2=1$

$f(x,y)=2 \quad x^2+y^2=2$

$f(x,y)=3 \quad x^2+y^2=3$

$f(x,y)=4 \quad x^2+y^2=4$

Pentru funcții de trei variabile, echivalentul curbelor de nivel sunt *suprafețele de nivel*. Suprafața de nivel a funcției $u=f(x,y,z)$ este o mulțime de puncte $M(x,y,z)$ din spațiu în care $u=f(M)$ este constant.

Exemplu: Suprafețele de nivel ale funcției $u=x^2+y^2+z^2$ sunt sfere cu centrul în originea sistemului de coordonate.

4.2 Limite şi continuitate

Definiţia 1: Fie $f(M)$ o funcţie definită pe o vecinătate Ω a punctului $M_0(x_0, y_0)$ cu o posibilă excepţie în M_0. Numărul *A* se numeşte *limita* lui $f(M)$ în punctul $M_0(x_0, y_0)$ dacă $\forall \varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât

$$\left| f(M) - A \right| < \varepsilon$$

pentru $M \in \Omega$ cu $0 < \rho(M, M_0) < \delta$.

Notaţii: $A = \lim\limits_{M \to M_0} f(M)$ sau $A = \lim\limits_{x \to x_0, y \to y_0} f(x, y)$

Observaţie: Se presupune că *M* poate tinde la M_0 într-un mod arbitrar (de-a lungul unei direcţii arbitrare sau după orice lege arbitrară) şi că toate valorile limită a lui $f(M)$ astfel obţinute trebuie să fie egale cu numărul *A*.

Exemple:

1) $f(x, y) = x^2 + y^2$ definită pe planul *xy* şi $f(0,0) = 0$. Arătăm că limita acestei funcţii în $O(0,0)$ este zero.

Considerăm $\varepsilon > 0$. Atunci, $\left| f(x, y) - 0 \right| < \varepsilon$ devine $\left| x^2 + y^2 \right| < \varepsilon$. Deoarece distanţa de la un punct arbitrar $M(x, y)$ la originea *O* este $\rho(M, O) = \sqrt{x^2 + y^2}$, putem scrie relaţia $\left| x^2 + y^2 \right| < \varepsilon$ în forma $\rho^2(M, O) < \varepsilon$ sau $\rho(M, O) < \sqrt{\varepsilon}$.
Considerăm $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, atunci pentru orice punct $M(x, y)$ astfel încât $\rho(M, O) < \delta = \sqrt{\varepsilon}$ avem $\left| x^2 + y^2 - 0 \right| < \varepsilon$ sau $\left| f(x, y) - 0 \right| < \varepsilon$. Cu definiţia limitei, $A = 0$ este limita funcţiei date în $O(0,0)$.

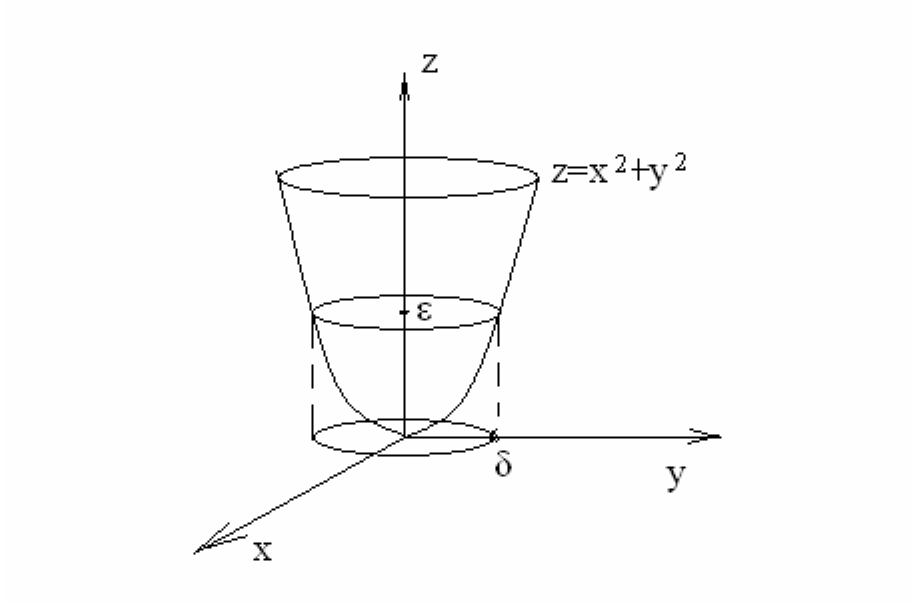


Figura 4.14

2) $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ definită pe planul xy mai puțin în originea $O(0,0)$.

Investigăm comportarea lui $f(x,y)$ în condițiile în care (x,y) tinde la $O(0,0)$ de-a lungul liniilor $y=kx$, $x\neq 0$.

Dreptele definite de ecuațiile $y=kx$ trec prin origine și avem

$$f(x,kx)=\frac{2x^2k}{(1+k^2)x^2}, \quad x\neq 0.$$

Atunci,

$$f(x,kx)\to\frac{2k}{1+k^2} \quad \text{pentru} \quad x\to 0.$$

Pentru diferite valori ale lui k, valorile limitei sunt diferite. Aceasta înseamnă că funcția dată nu are limită în originea $O(0,0)$.

3) $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ definită pe planul xy mai puțin în originea $O(0,0)$.

Investigăm comportarea lui $f(x,y)$ în condițiile în care (x,y) tinde la $O(0,0)$ de-a lungul liniilor $y=kx$, $x\neq 0$.

$$f(x,kx)=\frac{kx^3}{x^4+k^2x^2}, \quad x\neq 0.$$

$$f(x,kx)\to 0,\ \text{pentru}\ x\to 0.$$

Funcția are limita egală cu zero oricare ar fi dreapta $y=kx$, adică pentru orice dreaptă de-a lungul căreia punctul (x,y) tinde la originea $O(0,0)$.

Dacă considerăm $y=x^2$ atunci $f(x,x^2)=1/2$, $x\neq 0$. Aceasta înseamnă că limita există când punctul (x,y) tinde la originea $O(0,0)$ mişcându-se pe parabola $y=x^2$. Deoarece această limită este $1/2\neq 0$, funcția dată nu are limită în punctul $O(0,0)$.

Teorema 1: Fie $f(M)$ şi $\varphi(M)$ două funcții care au limită în M_0. Atunci suma $f(M)+\varphi(M)$, diferența $f(M)-\varphi(M)$, produsul $f(M)\cdot\varphi(M)$ şi raportul $f(M)/\varphi(M)$ (cu condiția $\lim\limits_{M\to M_0}\varphi(M)\neq 0$) au limită în M_0 şi

$$\lim_{M\to M_0}[f(M)\pm\varphi(M)]=\lim_{M\to M_0}f(M)\pm\lim_{M\to M_0}\varphi(M)$$

$$\lim_{M\to M_0}[f(M)\cdot\varphi(M)]=\lim_{M\to M_0}f(M)\cdot\lim_{M\to M_0}\varphi(M)$$

$$\lim_{M\to M_0}\frac{f(M)}{\varphi(M)}=\frac{\lim\limits_{M\to M_0}f(M)}{\lim\limits_{M\to M_0}\varphi(M)},\qquad \lim_{M\to M_0}\varphi(M)\neq 0$$

Definiția 2: Fie $f(M)$ o funcție definită pe o vecinătate Ω a punctului M_0 cu o posibilă excepție în M_0. Numărul A se numeşte *limita* lui $f(M)$ în punctul M_0 dacă pentru orice şir de puncte $\{M_n\}$ care converge la M_0, $M_n\in\Omega$, $M_n\neq M_0$, şirul imagine $\{f(M_n)\}$ convege la A.

Observație: Noțiunea de limită de mai sus, presupune ca toate variabilele să tindă simultan la valorile lor limită, adică $(x,y)\to(x_0,y_0)$.

Definiția 1: Fie $f(M)$ o funcție definită într-un punct $M_0(x_0,y_0)$ şi pe o vecinătate Ω a punctului $M_0(x_0,y_0)$. Funcția $f(M)$ este *continuă* în $M_0(x_0,y_0)$ dacă

$$\lim_{M\to M_0}f(M)=f(M_0)\quad\text{sau}\quad\lim_{x\to x_0,y\to y_0}f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

Remarcă: Se presupune că în această definiție punctul $M(x, y)$ tinde la $M_0(x_0, y_0)$ într-un mod arbitrar şi este tot timpul conținut în domeniul lui $f(M)$.

Definiția 2 (cu $\varepsilon - \delta$): Fie $f(M)$ o funcție definită într-un punct M_0 şi pe o vecinătate Ω a punctului M_0. Funcția $f(M)$ este *continuă* în M_0 dacă $\forall \varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât

$$|f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$$

pentru $M \in \Omega$ cu $\rho(M, M_0) < \delta$.

Fie Δx şi Δy creşterile variabilelor independente x şi y în deplasarea de la punctul $M_0(x_0, y_0)$ la $M(x, y)$.
Fie

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

creşterea funcției $z = f(x, y)$ corespunzătoare lui Δx şi Δy. Atunci expresia din definiția continuității

$$\lim_{x \to x_0, y \to y_0} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

este echivalentă cu

Definiția 3 a continuității: $\lim_{\Delta x \to 0, \Delta y \to 0} \Delta z = 0$

Observație: Dacă o funcție $f(x, y)$ este continuă într-un punct $M_0(x_0, y_0)$ atunci $f(x, y)$ este continuă în $M_0(x_0, y_0)$ în raport cu ambele variabile *x* şi *y*. Reciproca nu este totdeauna adevărată: dacă o funcție $f(x, y)$ este continuă într-un punct $M_0(x_0, y_0)$ în raport cu *x* şi în raport cu *y*, $f(x, y)$ nu este în mod necesar continuă în $M_0(x_0, y_0)$.

Teorema 2: Dacă $f(M)$ şi $\varphi(M)$ două funcții continue în M_0, atunci suma $f(M) + \varphi(M)$, diferența $f(M) - \varphi(M)$, produsul $f(M) \cdot \varphi(M)$ şi raportul $f(M) / \varphi(M)$ (cu condiția $\varphi(M_0) \neq 0$) sunt continue în M_0.

Dacă o funcție $f(M)$ este continuă în fiecare punct al domeniului *D*, $f(M)$ este continuă pe domeniul *D*.

Punctul în care $f(M)$ nu este continuă se numeşte *discontinuitate* pentru $f(M)$. Discontinuitățile unei funcții $f(x,y)$ pot fi fie puncte izolate, fie puncte dispuse pe curbe.

Exemple:

1) $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$

are o singură discontinuitate în $O(0,0)$.

2) $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2-y^2}$

are ca discontinuități dreptele $y=x$ şi $y=-x$.

Teorema 3: Dacă funcția $f(M)$ este continuă pe un domeniu mărginit şi închis, atunci $f(M)$ este mărginită pe *D* şi îşi atinge maximul absolut şi minimul absolut pe *D*.

4.3 Derivate parțiale

Fie $z=f(x,y)$ o funcție definită pe un domeniu *D* din planul *xy* şi fie (x,y) un punct interior lui *D*. Considerăm Δx o creştere a lui *x* astfel încât $(x+\Delta x, y)\in D$.

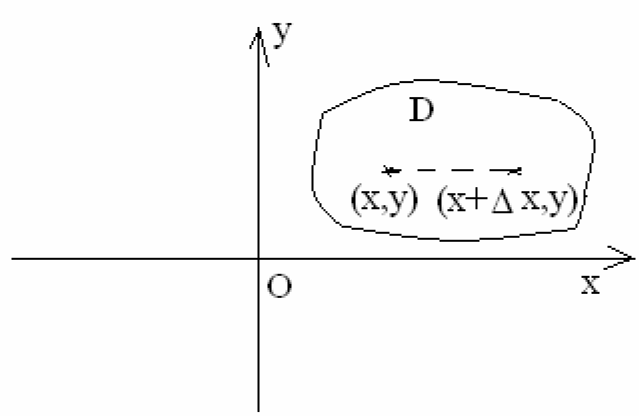


Figura 4.15

Creşterea

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$$

se numeşte *creştere parţială* în z determinată de creşterea Δx în x.

Fie $\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ raportul creşterii parţiale în z şi creşterea corespunzătoare în x. Desigur acest raport este o funcţie de Δx.

Definiţia 1: Limita raportului $\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ pentru $\Delta x \to 0$, dacă există, se numeşte *derivată parţială* a funcţiei $z = f(x,y)$ în punctul (x,y) în raport cu variabila independentă x.

Notaţii:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{sau} \quad f'_x(x,y) \quad \text{sau} \quad z'_x(x,y)$$

Cu aceste notaţii putem rescrie definiţia derivatei parţiale astfel:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

Analog,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Fie $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o funcţie de n variabile. Atunci

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n)}{\Delta x_k}$$

Definiţia 2: Derivata parţială a unei funcţii $z = f(x,y)$ în raport cu variabila x este o derivată ordinară în raport cu x, calculată considerând pe y constant. Similar, derivata parţială a unei funcţii $z = f(x,y)$ în raport cu variabila y este o derivată ordinară în raport cu y, calculată considerând pe x constant.

In aceste condiţii, derivatele ordinare şi derivatele parţiale se supun la aceleaşi reguli de diferenţiere.

Exemple:

Calculați derivatele parțiale ale următoarelor funcții.

1) $z = x^3 y + y^2$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y + 0 \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 + 2y$$

2) $z = e^{xy}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy}$$

3) $z = x^2 y + xe^y$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + e^y \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + xe^y$$

Interpretarea geometrică a derivatelor parțiale

Considerăm $z = f(x, y)$ o funcție continuă şi cu derivate parțiale pe un domeniu D. Fie S suprafața definită de ecuația $z = f(x, y)$.

Vrem să interpretăm geometric derivatele parțiale ale lui $f(x, y)$ în punctul $M_0(x_0, y_0) \in D$ care are corespondent pe suprafața $z = f(x, y)$ în punctul $N_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Atunci când calculăm derivata parțială $\frac{\partial z}{\partial x}$ în punctul $M_0(x_0, y_0)$ gândim $z = f(x, y)$ ca o funcție de o singură variabilă x şi tratăm y ca o constantă $y = y_0$, adică

$$z = f(x, y_0) = f_1(x)$$

Funcția $z = f_1(x)$ defineşte curba L obținută prin intersecția suprafeței S cu planul $y = y_0$.

Reluăm interpretarea geometrică a derivatei ordinare:

$$f_1'(x_0) = tg\alpha$$

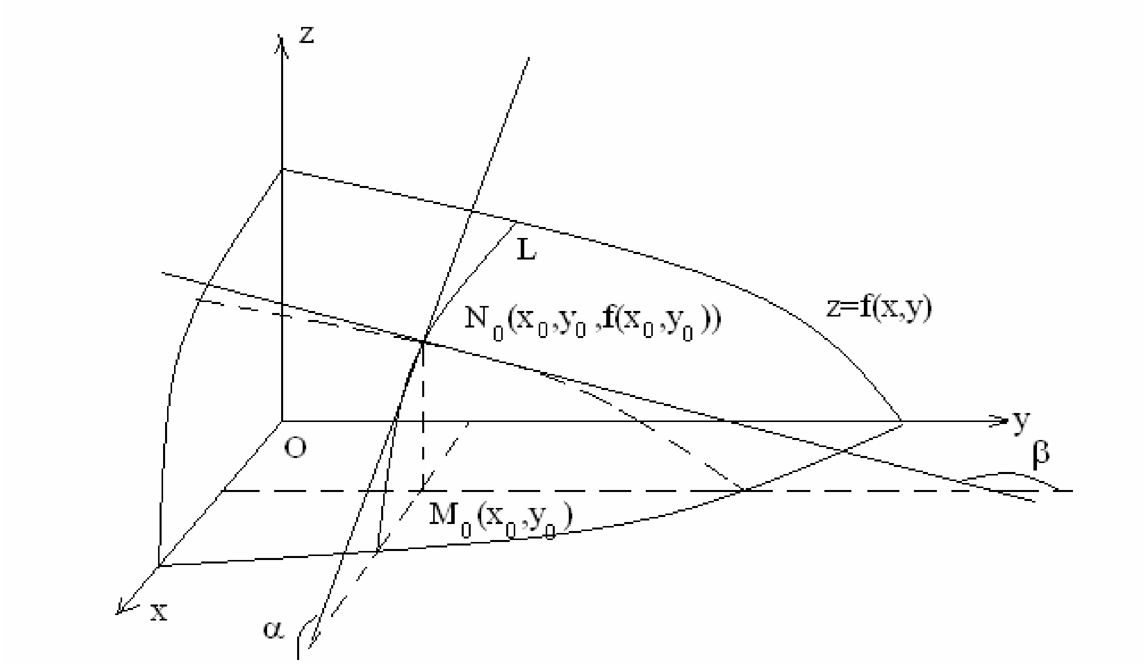


Figura 4.16

unde α este unghiul dintre axa x şi tangenta la curba L în punctul N_0. Deoarece,

$$f_1'(x_0) = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)}$$

$$\Rightarrow \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)} = tg\alpha$$

$\Rightarrow \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)}$ este panta tangentei în N_0 la curba formată prin intersecția planului $y = y_0$ cu suprafața $z = f(x, y)$.

Similar, $$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)} = tg\beta$$

$\Rightarrow \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)}$ este panta tangentei în N_0 la curba formată prin intersecția planului $x = x_0$ cu suprafața $z = f(x, y)$.

4.4 Funcții diferențiabile

Fie $z = f(x, y)$ o funcție definită pe domeniul *D* din planul *xy* şi fie (x, y) un punct din *D*. Considerăm Δx şi Δy creşteri în x şi *y* astfel încât $(x + \Delta x, y + \Delta y) \in D$.

Definiție: Funcția $z = f(x, y)$ este *diferențiabilă* în $(x, y) \in D$ dacă creşterea totală

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

corespunzătoare creşterilor Δx şi Δy admite o reprezentare de forma

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y \qquad (1)$$

unde *A* şi *B* sunt independente de Δx şi Δy (dar depind în general de *x* şi *y*) şi $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ şi $\beta(\Delta x, \Delta y)$ tind la zero pentru $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

$A\Delta x + B\Delta y$, partea liniară relativ la Δx şi Δy a creşterii, se numeşte *diferențiala* lui $z = f(x, y)$ în punctul (x, y).

Notație:

$$dz = A\Delta x + B\Delta y \qquad (2)$$

Atunci $\Delta z = dz + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$.

Exemplu: $z = x^2 + y^2$

Considerăm punctul (x, y) şi creşterile arbitrare Δx şi Δy.

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = (x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2 - x^2 - y^2$$

$$= 2x\Delta x + 2y\Delta y + \Delta x\Delta x + \Delta y\Delta y$$

Considerăm $A = 2x$, $B = 2y$, $\alpha(\Delta x, \Delta y) = \Delta x$ şi $\beta(\Delta x, \Delta y) = \Delta y$. $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$ pentru $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Cu definiția, rezultă că funcția dată este diferențiabilă în orice punct (x, y) din planul *xy* şi $dz = 2x\Delta x + 2y\Delta y$.

Observație: Formula (1) poate fi rescrisă dacă utilizăm distanța dintre punctele (x, y) şi $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ adică

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \qquad (3)$$

Atunci

$$\alpha\Delta x + \beta\Delta y = \left(\alpha\frac{\Delta x}{\rho} + \beta\frac{\Delta y}{\rho}\right)\rho, \quad \rho \neq 0$$

Sau

$$\alpha\Delta x + \beta\Delta y = \varepsilon\rho$$

unde $\varepsilon = \alpha\frac{\Delta x}{\rho} + \beta\frac{\Delta y}{\rho}$ depinde de Δx şi Δy şi tinde la zero pentru $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ sau atunci când $\rho \to 0$.

Formula (1) care exprimă condiția ca funcția $z = f(x, y)$ să fie diferențiabilă devine

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon\rho \qquad (4)$$

unde $\varepsilon = \varepsilon(\rho) \to 0$, pentru $\rho \to 0$.

Exemplu: $z = x^2 + y^2$

$$\begin{aligned}\Delta z &= 2x\Delta x + 2y\Delta y + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \\ &= 2x\Delta x + 2y\Delta y + \rho\rho, \qquad \text{unde } \varepsilon(\rho) = \rho\end{aligned}$$

Condiții necesare pentru ca o funcție să fie diferențiabilă

Teorema 1: Dacă o funcție $z = f(x, y)$ este diferențiabilă într-un punct, atunci funcția este continuă în acel punct.

Demonstrație: Dacă $z = f(x, y)$ este diferențiabilă în (x, y) atunci creşterea funcției în (x, y) corespunzătoare creşterilor Δx şi Δy admite reprezentarea

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

unde A şi B sunt constante în (x,y) şi $\alpha \to 0$ şi $\beta \to 0$ pentru $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Atunci

$$\lim_{\Delta x \to 0, \Delta y \to 0} \Delta z = 0 \quad \Rightarrow \text{ funcția } z = f(x,y) \text{ este continuă în } (x,y).$$

Teorema 2: Dacă o funcție $z = f(x,y)$ este diferențiabilă într-un punct, atunci funcția are derivate parțiale $\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$ în acel punct.

Demonstrație: Dacă $z = f(x,y)$ este diferențiabilă în (x,y) atunci creşterea funcției în (x,y) corespunzătoare creşterilor Δx şi Δy admite reprezentarea

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y$$

Considerăm $\Delta x \neq 0$ şi $\Delta y = 0$. Atunci:

$$\Delta_x z = A\Delta x + \alpha(\Delta x, 0)\Delta x$$

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x, 0)$$

Deoarece *A* este independent de Δx şi $\alpha(\Delta x, 0) \to 0$ pentru $\Delta x \to 0$, atunci:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A$$

Conform definiției, funcția $z = f(x,y)$ are derivată parțială în raport cu x în punctul (x,y) şi

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A$$

Cu un raționament similar, se arată şi că funcția $z = f(x,y)$ are derivată parțială în raport cu y în punctul (x,y) şi

$$\frac{\partial z}{\partial y} = B$$

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y \qquad (5)$$

Condiții suficiente pentru ca o funcție să fie diferențiabilă

Teorema 3: Fie $z = f(x, y)$ o funcție care are derivate parțiale f'_x şi f'_y într-o vecinătate a punctului (x_0, y_0) şi fie f'_x şi f'_y continue în (x_0, y_0). Atunci $z = f(x, y)$ este diferențiabilă în (x_0, y_0).

Exemplu: $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ definită peste tot.

Cu definiția derivatelor parțiale avem:

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x,0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x \cdot 0} - 0}{\Delta x} = 0$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0,\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\sqrt[3]{0 \cdot \Delta y} - 0}{\Delta y} = 0$$

Pentru a arăta că $f(x, y)$ este diferențiabilă sau nu în $O(0,0)$, calculăm creşterea lui $f(x, y)$ în $O(0,0)$.

$$\Delta f(0,0) = f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) = \sqrt[3]{\Delta x \cdot \Delta y} = \varepsilon(\Delta x, \Delta y) \cdot \rho$$

Deoarece,

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

Atunci

$$\varepsilon(\Delta x, \Delta y) = \frac{\sqrt[3]{\Delta x \Delta y}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

Pentru ca funcția să fie diferențiabilă în origine $O(0,0)$ este necesar ca $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ să fie un infinitezimal pentru $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Considerând $\Delta y = \Delta x > 0$

$$\varepsilon(\Delta x, \Delta y) = \frac{(\Delta x)^{2/3}}{\sqrt{2} \Delta x}$$

Se observă că $\varepsilon(\Delta x, \Delta y) \to \infty$, pentru $\Delta x \to 0$, astfel funcția $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ nu este diferențiabilă în $O(0,0)$, deşi funcția are derivate parțiale f'_x şi f'_y în $O(0,0)$. Acest rezultat este atribuit discontinuității derivatelor f'_x şi f'_y în $O(0,0)$.

Diferențiala totală

Dacă funcția $z = f(x, y)$ este diferențiabilă atunci diferențiala totală este

$$dz = A\Delta x + B\Delta y \tag{6}$$

Deoarece

$$A = \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{şi} \quad B = \frac{\partial z}{\partial y}$$

Atunci

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y \tag{7}$$

Considerăm diferențialele variabilelor independente egale cu creşterile respective

$$dx = \Delta x \quad \text{şi} \quad dy = \Delta y$$

Atunci diferențiala totală a funcției $z = f(x, y)$ se poate scrie:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \tag{8}$$

Exemple:

1. Diferențiala funcției $z = x^2 + xy - y^2$ este

$$dz = (2x + y)dx + (x - 2y)dy$$

2. Diferențiala funcției $z = \ln(x + y^2)$ este

$$dz = \frac{1}{x + y^2}dx + \frac{2y}{x + y^2}dy$$

Dacă $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este o funcție de n variabile independente, diferențiabilă, atunci

$$du = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx_k\ , \qquad dx_k = \Delta x_k \tag{9}$$

Presupunem că funcția $z = f(x, y)$ este diferențiabilă în punctul (x, y) şi că $dz \neq 0$ în (x, y). Atunci creşterea totală

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y$$

diferă de partea liniară

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

doar prin suma $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$, în care $\alpha\Delta x$ şi $\beta\Delta y$ sunt infinitezimali de ordin mai mare decât termenii din diferențiala *dz* pentru $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

$$\Delta z \approx dz \tag{10}$$

Precizia de aproximare este mai bună cu cât valoarea absolută a creşterilor este mai mică.