3.4 Integrarea funcțiilor trigonometrice

1)

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx$$

Substituția recomandată este: $t = tg\frac{x}{2},\quad x \in (-\pi, \pi)$ și integrala dată se reduce la integrarea unei funcții raționale.

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$x = 2arctg\ t \qquad dx = 2\frac{1}{1+t^2}dt$$

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt = \int R_1(t)\, dt$$

Exemplu:

$$\int \frac{dx}{\sin x} \qquad t = tg\frac{x}{2} \qquad x = 2arctg\ t \qquad dx = 2\frac{1}{1+t^2}dt$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$$

Listăm trei tipuri de integrale ce pot fi rezolvate cu substituții mai simple.

a)

$$\int R(\sin x)\cos x\ dx$$

$$t = \sin x$$
$$dt = \cos x\ dx$$

$$\int R(\sin x)\cos x dx = \int R(t)\,dt$$

Exemplu:

$$\int \frac{\cos x}{4+\sin^2 x}dx = \int \frac{dt}{4+t^2} = \frac{1}{2}arctg\frac{t}{2} + C = \frac{1}{2}arctg\left(\frac{\sin x}{2}\right) + C$$

b)

$$\int R(\cos x)\sin x dx$$

$$t = \cos x$$
$$dt = -\sin x\ dx$$

$$\int R(\cos x)\sin x dx = -\int R(t)\,dt$$

Exemplu:

$$\int \frac{\sin x}{2+\cos x}dx = -\int \frac{dt}{2+t} = -\ln|2+t| + C = -\ln(2+\cos x) + C$$

c)

$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ unde funcția de sub integrală implică numai puteri pare în *sin*x şi *cos*x.

$$t = tgx$$

$$\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{tg^2 x}{1+tg^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{1+tg^2 x} = \frac{1}{1+t^2}$$

$$x = arctg\ t \qquad dx = \frac{1}{1+t^2}dt$$

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}\right)\frac{1}{1+t^2}dt = \int R_1(t)\,dt$$

Exemplu:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 4\cos^2 x + 2} \qquad t = tgx$$

$$x = arctg\ t \qquad dx = \frac{1}{1+t^2}dt$$

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 4\cos^2 x + 2} = \int \frac{1}{\frac{t^2}{1+t^2} + 4\frac{1}{1+t^2} + 2} \frac{1}{1+t^2} dt = \int \frac{dt}{t^2 + 4 + 2\left(1+t^2\right)}$$

$$= \int \frac{dt}{3t^2+6} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{3\sqrt{2}} arctg \frac{t}{\sqrt{2}} + C$$

2) $\int \sin^\alpha x \ \cos^\beta x \ dx$ **,** $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Considerăm două cazuri:

a) α sau β este număr pozitiv impar. De exemplu, $\beta = 2k+1$, cu $k > 0$ întreg.

$$\int \sin^\alpha x \ \cos^{2k+1} x \ dx = \int \sin^\alpha x \left(\cos^2 x\right)^k \cos x \ dx = \int \sin^\alpha x \left(1-\sin^2 x\right)^k \cos x \ dx$$

$$t = \sin x$$
$$dt = \cos x \ dx$$

$$\int \sin^\alpha x \ \cos^{2k+1} x \ dx = \int t^\alpha \left(1-t^2\right)^k dt$$

Aplicăm teorema binomială şi obținem funcții putere uşor integrabile.

Exemple:

1) $\int \sin^2 x \ \cos^5 x \ dx = \int \sin^2 x \ \cos^4 x \ \cos x \ dx = \int \sin^2 x \left(1-\sin^2 x\right)^2 \cos x \ dx$

$$t = \sin x \qquad dt = \cos x \ dx$$

$$\int \sin^2 x \ \cos^5 x \ dx = \int t^2 \left(1-t^2\right)^2 dt = \int \left(t^2 - 2t^4 + t^6\right) dt =$$

$$= \frac{t^3}{3} - 2\frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + C = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C$$

2) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \sin x \, dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \sin x \, dx$

$t = \cos x \qquad dt = -\sin x \, dx$

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx = -\int \frac{1-t^2}{t^2} dt = \int \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) dt = t + \frac{1}{t} + C = \cos x + \frac{1}{\cos x} + C$$

3) $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}} dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sqrt{\sin x}} \cos x \, dx$

$t = \sin x \qquad dt = \cos x \, dx$

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}} dx = \int \frac{1-t^2}{\sqrt{t}} dt = \int \left(t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{3}{2}} \right) dt = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = 2\sqrt{\sin x} - \frac{2}{5}\sqrt{\sin^5 x} + C$$

b) α şi β sunt numere pozitive pare, $\alpha = 2m \quad \beta = 2n$, $m, n \in \mathbb{N}$

Manipulăm funcția de sub integrală aplicând formulele trigonometrice:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad \text{pentru } m \neq n$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x \qquad \text{pentru } m = n$$

- $m \neq n$

$$\int \sin^{2m} x \cos^{2n} x \, dx = \int \left(\sin^2 x\right)^m \left(\cos^2 x\right)^n dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^m \left(\frac{1+2\cos x}{2}\right)^n dx =$$

$$= \frac{1}{2^{m+n}} \int \left(1-\cos 2x\right)^m \left(1+2\cos x\right)^n dx$$

Aplicăm teorema binomială factorilor $\left(1-\cos 2x\right)^m$ şi $\left(1+\cos 2x\right)^n$, înmulțim polinoamele astfel obținute şi ajungem la integrale din puteri pare sau impare de $\cos 2x$. Termenilor cu puteri impare în $\cos 2x$, le aplicăm tehnica precedentă, iar termenilor cu puteri pare în $\cos 2x$, le aplicăm iar

$$\cos^2 2x = \frac{1+\cos 4x}{2}$$

Continuăm procedeul până când ajungem la integrale de forma $\int \cos kx\, dx$.

☐ $m = n$

$$\int \sin^{2n} x \cos^{2n} x\, dx = \int (\sin x \cos x)^{2n} dx = \int \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^{2n} dx = \frac{1}{4^n}\int \sin^{2n} 2x dx$$

$$= \frac{1}{4^n}\int \left(\sin^2 2x\right)^n dx = \frac{1}{4^n}\int \left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)^n dx == \frac{1}{8^n}\int (1-\cos 4x)^n dx$$

Se aplică teorema binomială etc.

Exemple:

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)(1+\cos 2x)^2 dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)\left(1+2\cos 2x+\cos^2 2x\right) dx$$

$$= \int \left(1+2\cos 2x+\cos^2 2x-\cos 2x-2\cos^2 2x-\cos^3 2x\right) dx$$

$$= \int \left(1+\cos 2x-\cos^2 2x-\cos^3 2x\right) dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \left[1+\cos 2x-\frac{1+\cos 4x}{2}-\left(1-\sin^2 2x\right)\cos 2x\right] dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 4x+\sin^2 2x \cos 2x\right) dx$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{2}\frac{\sin^3 2x}{3}\right)+C$$

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \int (\sin x \cos x)^2 dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x dx = \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2} dx$$

$$= \frac{1}{8}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C$$

3) $\int \sin \alpha x \cos \beta x\, dx$, $\int \cos \alpha x \cos \beta x\, dx$, $\int \sin \alpha x \sin \beta x\, dx$, $\alpha \neq \beta$

Pentru a calcula aceste integrale sunt utile următoarele identități trigonometrice:

$$\sin\alpha x\cos\beta x=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)x+\sin(\alpha-\beta)x\right]$$

$$\cos\alpha x\cos\beta x=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)x+\cos(\alpha-\beta)x\right]$$

$$\sin\alpha x\sin\beta x=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x\right]$$

De exemplu,

$$\int\sin\alpha x\cos\beta x\,dx=\frac{1}{2}\int\left[\sin(\alpha+\beta)x+\sin(\alpha-\beta)x\right]dx=\frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(\alpha+\beta)x}{\alpha+\beta}-\frac{\cos(\alpha-\beta)x}{\alpha-\beta}\right]+C$$

$$\int\cos 3x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\int\left[\cos(3+1)x+\cos(3-1)x\right]dx=\frac{1}{2}\int(\cos 4x+\cos 2x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\sin 4x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C=\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

3.5 Integrala definită

Definiție: Fie $f(x)$ o funcție definită pe un interval închis $[a,b]$. Împărțim intervalul $[a,b]$ în n subintervale, alegând punctele:

$$x_0=a<x_1<x_2<\ldots<x_{k-1}<x_k\ldots<x_n=b$$

Această mulțime de subintervale o numim *partiție* pe $[a,b]$.

Fie $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}>0$ lungimea subintervalului k şi fie ξ_k un punct arbitrar din subintervalul k. În această manieră construim o mulțime de puncte *intermediare* $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ asociate partiției date.

Fiind dată o partiție pe $[a,b]$ şi o mulțime de puncte intermediare pe această partiție putem evalua suma

$$S_n=f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+\ldots f(\xi_n)\Delta x_n=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$$

unde $f(\xi_k)$ este valoarea lui $f(x)$ în punctul $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Această sumă o numim *sumă integrală Riemann* pentru $f(x)$ determinată de partiția dată pe $[a,b]$ şi de punctele intermediare alese.

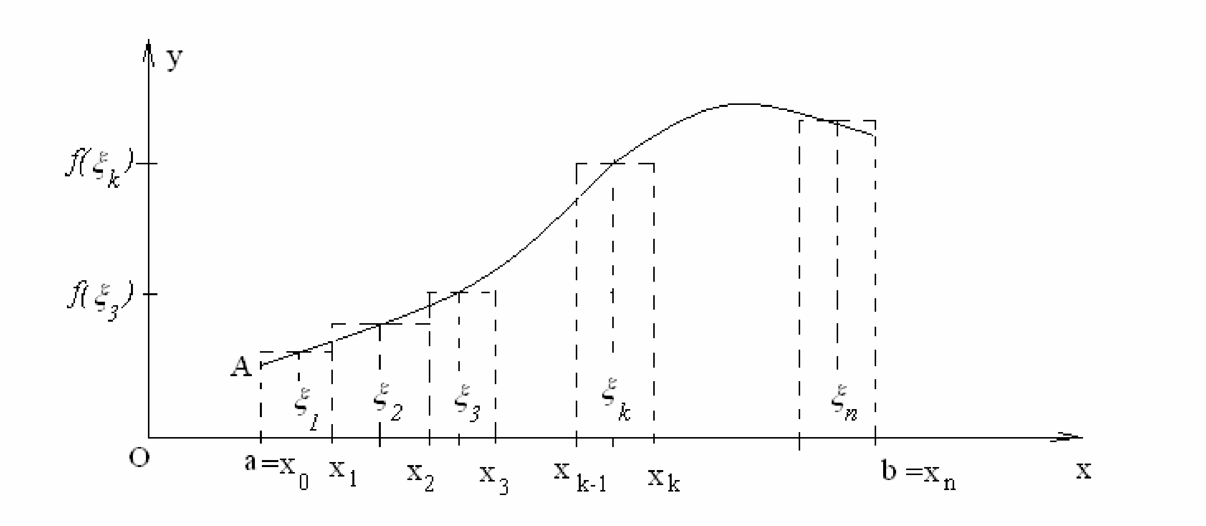

Figura 3.1

Observație: Suma Riemann depinde de modul de împărțire al intervalului $[a,b]$ în subintervale $[x_{k-1}, x_k]$ şi de alegerea punctelor intermediare ξ_k în aceste subintervale.

Fie λ cea mai mare lungime a subintervalelor $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1,2,\ldots,n$, adică

$$\lambda = \max_{1 \le k \le n} \Delta x_k$$

Definiție: Spunem că numărul I este limita sumelor integrale $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ pentru $f(x)$ pe $[a,b]$, dacă $\forall \varepsilon > 0$, există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - I \right| < \varepsilon$$

pentru orice partiție pe $[a,b]$ cu $\Delta x_k < \delta$, $k = 1,2,\ldots,n$, adică pentru orice partiție cu $\lambda < \delta$ şi pentru orice puncte intermediare ξ_k, $k = 1,2,\ldots,n$.

Scriem: $I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$

Dacă există, această limită se numeşte *integrala definită* sau *integrala Riemann* şi se notează

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

$a =$ limita inferioară
$b =$ limita superioară
$x =$ variabila de integrare
$f(x) =$ integrand
$f(x)dx =$ element de integrare

Obs1: Integrala definită rămâne neschimbată dacă valoarea funcției $f(x)$ se modifică într-un punct $c \in [a,b]$. Adică, dacă funcția $f(x)$ trece în funcția

$$g(x) = \begin{cases} f(x), \forall x \in [a,b] - \{c\} \\ A, x = c \end{cases}$$

unde, $A \neq f(c)$, atunci $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$

Această proprietate rămâne valabilă dacă $f(x)$ este modificat într-un număr finit de puncte din $[a,b]$.

Obs2: In definiția integralei definite s-a considerat $a < b$. Includerea cazurilor $a = b$ şi $a > b$ se face considerând:

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \quad \text{pentru} \quad a = b$$

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \quad \text{pentru} \quad a > b$$

Exemplu:

Calculați $\int_a^b dx$

$$\int_a^b dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \left[(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \ldots (x_n - x_{n-1})\right] = \lim_{\lambda \to 0} (x_n - x_0) = \lim_{\lambda \to 0} (b - a) = b - a$$

Teorema 1: Dacă o funcție $f(x)$ este integrabilă (are integrală definită) pe un interval închis $[a,b]$, atunci $f(x)$ este mărginită pe $[a,b]$.

Remarcă: O funcție poate fi mărginită pe $[a,b]$, dar să nu fie integrabilă pe $[a,b]$.

Exemplu:

Funcția Dirichlet

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$$

este mărginită pe intervalul $[0,1]$ deoarece $|f(x)|\leq 1$ pentru $\forall x\in[0,1]$, dar $f(x)$ nu este integrabilă pe $[0,1]$.

Într-adevăr, suma integrală $S_n=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ pentru orice şir rațional de puncte intermediare ξ_k, $k=1,\ldots,n$ devine

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}1\cdot\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})=1-0=1$$

iar pentru orice şir irațional de puncte intermediare este

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}0\cdot\Delta x_k=0$$

Atunci pentru orice $\lambda=\max\limits_{1\leq k\leq n}\Delta x_k$, oricât de mic, suma integrală S_n este egală fie cu unu fie cu zero. În această situație S_n nu are limită pentru $\lambda\to 0$, deci funcția $f(x)$ nu este integrabilă pe $[0,1]$.

Teorema 2: Dacă o funcție $f(x)$ este continuă pe un interval închis $[a,b]$, atunci $f(x)$ este integrabilă pe $[a,b]$.

Exemplu: $f(x)=e^{-x^2}$ este continuă pe $[0,a]$, deci este integrabilă pe $[0,a]$, adică există integrala definită

$$\int_0^a e^{-x^2}dx$$

Teorema 3: Dacă o funcție $f(x)$ este definită şi monotonă pe un interval închis $[a,b]$, atunci $f(x)$ este integrabilă pe $[a,b]$.

Teorema 4: Dacă funcția $f(x)$ este mărginită pe intervalul închis $[a,b]$ şi dacă $f(x)$ are un număr finit de puncte de discontinuitate pe $[a,b]$, atunci $f(x)$ este integrabilă pe $[a,b]$.

Exemplu:

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}$$

este integrabilă pe intervalul închis $[0,1]$, deoarece $|f(x)|\leq 1$, $\forall x\in[0,1]$, deci este mărginită pe $[0,1]$ şi funcţia are un singur punct de discontinuitate de speţa a doua în $x=0$.

Proprietăţi:

Presupunem toate funcţiile continue şi deci integrabile pe un interval închis $[a,b]$.

1. Integrala definită depinde numai de limitele sale inferioară şi superioară, de integrandul $f(x)$ şi este independentă de variabila de integrare

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(u)du$$

2. Liniaritate

$$\int_a^b Af(x)dx=A\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b (f_1(x)+f_2(x))dx=\int_a^b f_1(x)dx+\int_a^b f_2(x)dx$$

3. Aditivitate

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

4. Monotonie: Fie $f(x)$ şi $g(x)$ două funcţii integrabile pe $[a,b]$, pentru care are loc relaţia $f(x)\leq g(x)$ pe $[a,b]$, atunci

$$\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$$

5. Dacă $f(x)$ este integrabilă pe $[a,b]$ atunci şi funcţia $|f(x)|$ este integrabilă pe $[a,b]$ şi are loc inegalitatea:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

6. Fie m şi M minimul şi maximul lui $f(x)$ pe $[a,b]$. Atunci

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

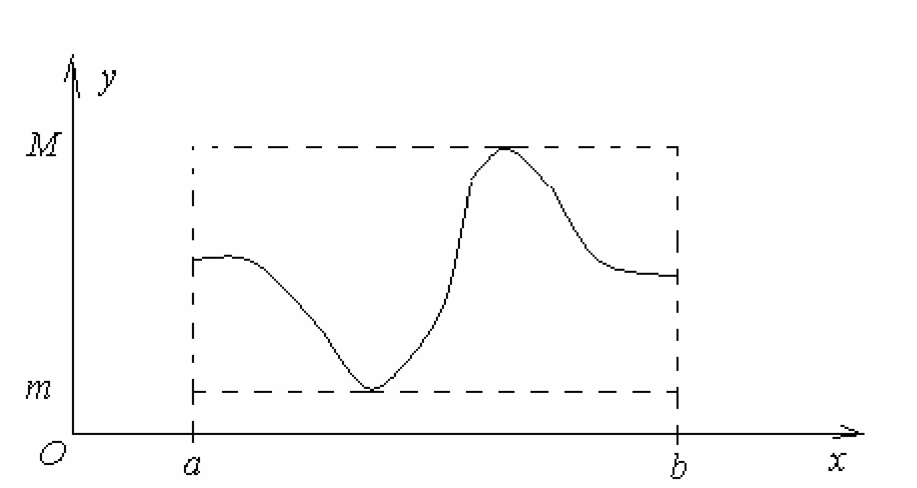

Figura 3.2

Exemplu:

Evaluaţi integrala $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{10+6\sin x}}$

$$m = \min_{0\le x\le 2\pi} \frac{1}{\sqrt{10+6\sin x}} = \left.\frac{1}{\sqrt{10+6\sin x}}\right|_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}$$

$$M = \max_{0\le x\le 2\pi} \frac{1}{\sqrt{10+6\sin x}} = \left.\frac{1}{\sqrt{10+6\sin x}}\right|_{x=\frac{3\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

Cu proprietatea 6. avem:

$$\frac{1}{4}(2\pi-0) \le \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{10+6\sin x}} \le \frac{1}{2}(2\pi-0)$$

$$\frac{\pi}{2} \le \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{10+6\sin x}} \le \pi$$

Teorema de medie: Fie $f(x)$ o funcție continuă pe un interval închis $[a,b]$. Atunci, există cel puțin un punct $\xi \in [a,b]$ astfel încât

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi),\ \ \xi \in [a,b]$$

Interpretare geometrică:

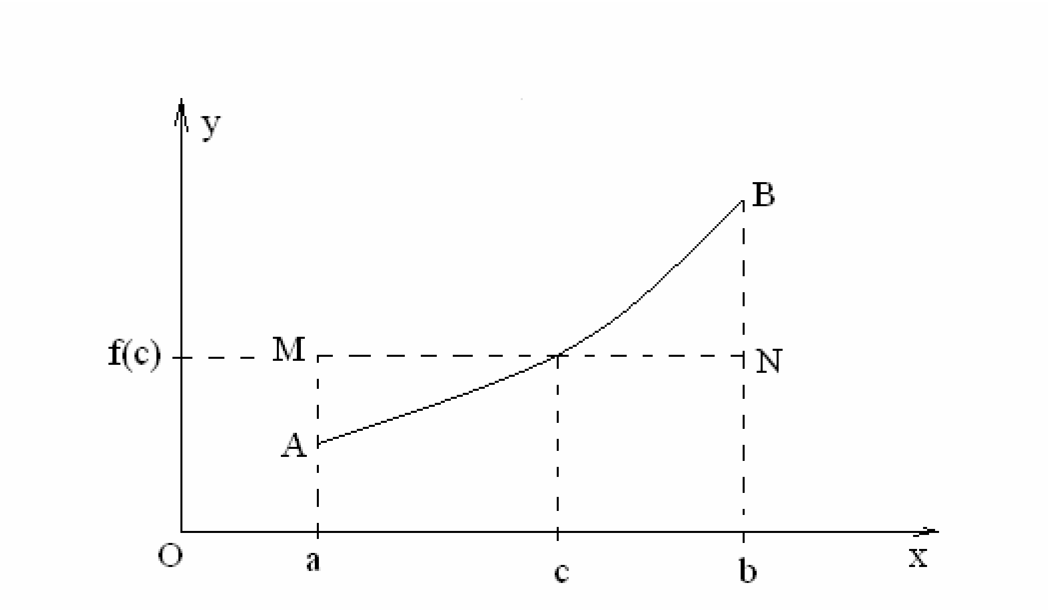

Figura 3.3

Pe graficul funcției continue $y = f(x)$, există punctul $C(c, f(c))$, astfel încât ariile $ABba$ şi $MNba$ sunt egale.

Numărul $M(f(x)) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ se numeşte *valoare medie* a funcției $f(x)$ pe $[a,b]$.

Exemplu: Calculați valoarea medie a funcției $f(x) = \sin x$ pe $[0,\pi]$.

$$M(\sin x)=\frac{1}{\pi-0}\int_0^{\pi}\sin x dx=\frac{1}{\pi}(-\cos\pi+\cos 0)=\frac{2}{\pi}$$

Fie $f(x)$ o funcție continuă pe un interval închis $[a,b]$. Integrala definită nu depinde de variabila de integrare

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt$$

Considerăm un punct arbitrar $x\in[a,b]$ şi construim o funcție

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

Aceasta este definită $\forall x\in[a,b]$, deoarece dacă integrala lui $f(x)$ pe $[a,b]$ există, există şi integrala lui $f(x)$ pe $[a,x]$ pentru $\forall x\in[a,b]$.

Prima teoremă fundamentală de calcul: Fie $f(x)$ o funcție continuă pe un interval închis $[a,b]$. Atunci, funcția $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ este derivabilă în orice punct $x\in[a,b]$ şi $F'(x)=f(x)$. Cu alte cuvinte, derivata integralei definite în raport cu limita sa superioară este egală cu valoarea integrandului în punctul limită superioară a integralei.

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)'=f(x),\quad \forall x\in[a,b]$$

Demonstrație: Fie $\Delta x\neq 0$, astfel încât $x+\Delta x\in[a,b]$. Creşterea corespunzătoare a funcției este:

$$\Delta F=F(x+\Delta x)-F(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt$$

$$=\int_x^a f(t)dt+\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt\overset{\text{teorema de medie}}{=}(x+\Delta x-x)f(x+\theta\Delta x)$$

$$\frac{\Delta F}{\Delta x}=f(x+\theta\Delta x),\quad \theta\in[0,1]$$

$F'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta x}=f(x)$ datorită continuității lui $f(x)$.

A doua teoremă fundamentală de calcul: Fie $f(x)$ o funcție continuă pe un interval închis $[a,b]$. Atunci, $f(x)$ are o primitivă pe $[a,b]$ şi în consecință $f(x)$ are integrală nedefinită.

Demonstrație: Deoarece $f(x)$ este continuă pe $[a,b]$, atunci există $\int_a^x f(t)\,dt$, $\forall x \in [a,b]$, adică există funcția $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ astfel încât $F'(x)=f(x)$, $\forall x \in [a,b]$. Deci $F(x)$ este o primitivă a lui $f(x)$ pe $[a,b]$.

Integrala nedefinită a funcției $f(x)$ pe $[a,b]$ poate fi reprezentată în forma

$$\int f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt + C$$

Teorema Newton-Leibniz: Fie $f(x)$ o funcție continuă pe un interval închis $[a,b]$ şi fie $F(x)$ o primitivă a lui $f(x)$ pe $[a,b]$, atunci

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Demonstrație:

$$\text{Fie } \Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in [a,b]$$

$\Phi(x)$ este o primitivă pentru $f(x)$ $\Rightarrow$ $\Phi(x) = F(x) + C$

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C, \quad \forall x \in [a,b]$$

$$x = a \;\Rightarrow\; \int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C \;\Rightarrow\; C = -F(a)$$

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a),$$

$$x = b \;\Rightarrow\; \int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

$$t \to x \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Exemple:

$$\int_{2}^{4} x dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{2}^{4} = \frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2} 6$$

$$\int_{0}^{\pi} \sin x \; dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0) = 2$$

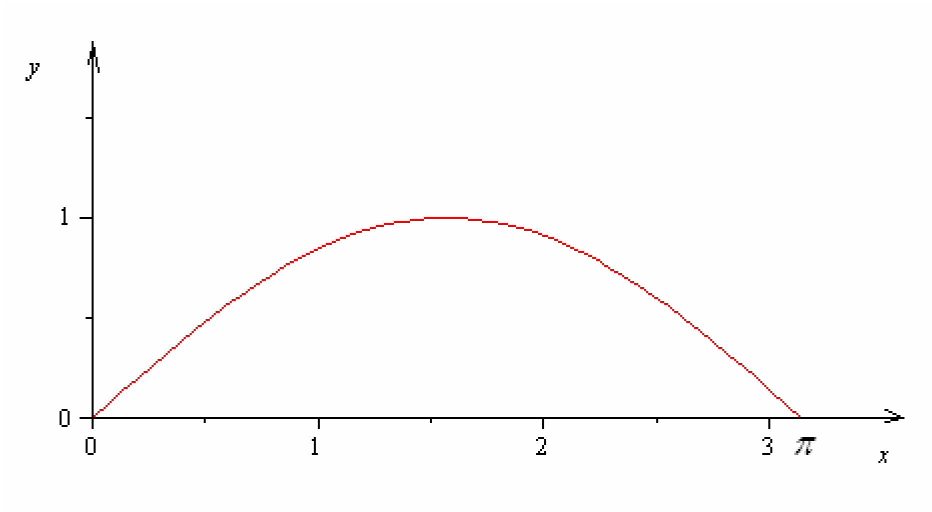

Figura 3.4 $\quad f(x) = \sin x$

$$\int_{0}^{2\pi} \sin x \; dx = -\cos x\Big|_0^{2\pi} = -\cos 2\pi - (-\cos 0) = 0$$

Observație: Integrala reprezintă suma ariilor de sub curbă, deasupra axei *Ox*, minus ariile de sub axa *Ox*.

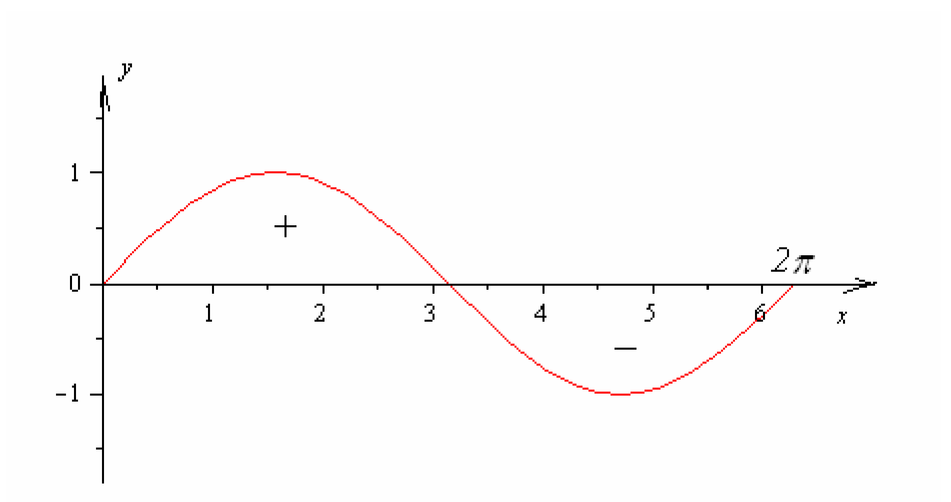

Figura 3.5 $\quad f(x) = \sin x$

Intergerea prin substituție

Considerăm integrala $\int_a^b f(x)dx$ în care $f(x)$ este continuă pe $[a,b]$ şi fie $x=\varphi(t)$.

Presupunem că $\varphi(t)$ satisface condițiile:

- □ $\varphi(t)$ ia valori între *a* şi *b* atunci când *t* variază pe $[\alpha,\beta]$ a.î. $\varphi(\alpha)=a$ şi $\varphi(\beta)=b$.
- □ $\varphi'(t)$ este continuă pe $[\alpha,\beta]$.

Atunci:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Exemple:

1) $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx, \quad a>0$

$$x=a\sin t$$
$$dx=a\cos t dt$$

$$0=a\sin t \quad\Rightarrow\quad t=0$$
$$a=a\sin t \quad\Rightarrow\quad t=\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t\, dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2 t\, dt=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\, dt$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi\right)=\frac{\pi a^2}{4}$$

2) $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$

$$x=e^t$$
$$dx=e^t dt$$

$$1=e^t \quad\Rightarrow\quad t=0$$
$$e=e^t \quad\Rightarrow\quad t=1$$

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx = \int_0^1 \frac{t^2}{e^t}e^t\,dt = \int_0^1 t^2\,dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Uneori este convenabil să folosim substituția $t=\psi(x)$ în loc de $x=\varphi(t)$.

3) $$\int_0^1 \left(2x^3-1\right)\sqrt{x^4-2x+1}\,dx$$

$$t = x^4-2x+1$$
$$dt = \left(4x^3-2\right)dx = 2\left(2x^3-1\right)dx$$

$$\int_0^1 \left(2x^3-1\right)\sqrt{x^4-2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^0 \sqrt{t}\,dt = \left.\frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_1^0 = -\frac{1}{3}$$

Observație: Fie $f(x)$ o funcție inegrabilă pe un interval închis simetric $[-a,a]$ cu $a>0$. Atunci:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx, & \text{daca } f(x) \text{ este para} \\ 0\,, & \text{daca } f(x) \text{ este impara} \end{cases}$$

Exemplu:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x\, e^{\cos x}dx = 0$$ deoarece integrandul este funcție impară

Integrarea prin părți

Fie funcțiile $u(x)$ şi $v(x)$ cu derivate $u'(x)$ şi $v'(x)$ continue pe $[a,b]$. Atunci are loc:

$$\int_a^b u\,dv = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

Exemple:

1) $$\int_0^{\pi} (\pi-x)\sin x\,dx$$

$$u = \pi - x \qquad dv = \sin x \, dx$$
$$du = -dx \qquad v = -\cos x$$

$$\int_0^{\pi} (\pi - x)\sin x \, dx = -(\pi - x)\cos x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos x \, dx = -(\pi - x)\cos x\Big|_0^{\pi} - \sin x\Big|_0^{\pi} = \pi$$

2) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$

$$u = \ln x \qquad dv = \frac{dx}{x^2}$$
$$du = \frac{1}{x} dx \qquad v = -\frac{1}{x}$$

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x}\Big|_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x}\Big|_1^e - \frac{1}{x}\Big|_1^e = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e}$$

Integrale improprii

Până acum domeniul de integrare al unei funcții era un interval mărginit. Anumite aplicații din fizică duc la integrarea unor funcții pe domenii nemărginite.

Definiție: O *integrală improprie,* definită prin

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

se spune că este convergentă dacă limita există şi divergentă dacă limita nu există.

Exemple

1) Integrala improprie $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ converge şi este egală cu $\dfrac{\pi}{2}$.

Într-adevăr,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \to +\infty} arctg\ x\Big|_0^b = \lim_{b \to +\infty} arctg\ b = \frac{\pi}{2}$$

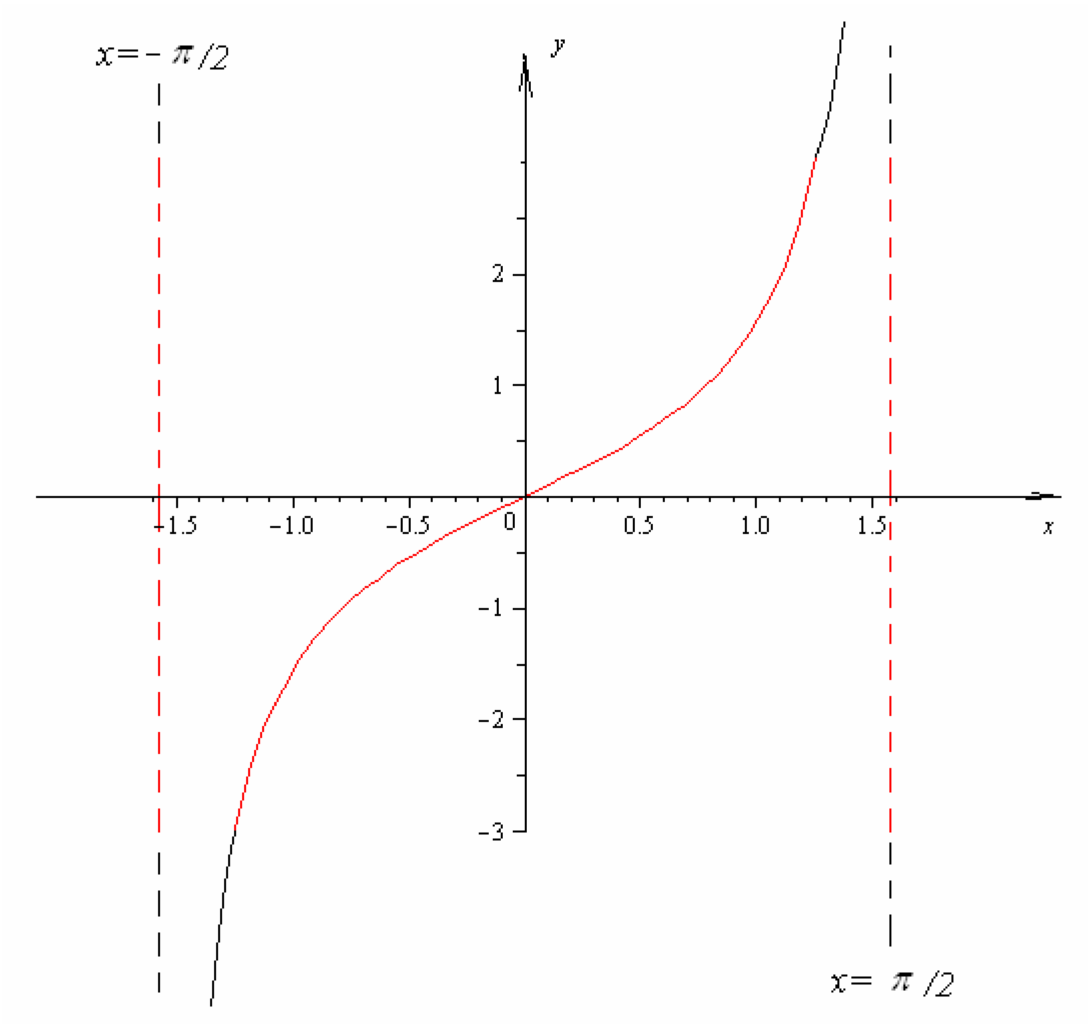

Figura 3.6 $f(x) = tg(x)$

2) Integrala improprie $\int_0^{+\infty} \cos x \, dx$ este divergentă.

Într-adevăr,

$$\int_0^{+\infty} \cos x \, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \cos x \, dx = \lim_{b \to +\infty} \sin x \Big|_0^b = \lim_{b \to +\infty} \sin b \qquad \text{limită ce nu există.}$$