3.2 Integrarea funcțiilor raționale

Cea mai simplă funcție rațională este un polinom de gradul n :

$$Q_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

unde $a_0 \neq 0$ şi $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Un număr b este rădăcină pentru polinom $\Leftrightarrow \quad Q_n(b) = 0$.

Observație: Orice polinom real $Q_n(x)$ poate fi descompus în factori în mod unic. Factorii sunt polinoame liniare $x - b$ şi polinoame pătratice $x^2 + px + q$, în care p, q sunt coeficienți reali şi fiecare polinom pătratic este ireductibil la polinoame liniare, deoarece nu are rădăcini reale.

$$Q_n(x) = a_0 (x-a)^{\alpha} (x-b)^{\beta} \cdots (x-l)^{\lambda} \left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{\mu_1} \cdots \left(x^2 + p_s x + q_s\right)^{\mu_s}$$

unde exponenții $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mu_1, \ldots, \mu_s$ sunt numere naturale şi are loc:

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda + 2(\mu_1 + \ldots + \mu_s) = n$$

Dacă $\alpha = 1$, rădăcina a se numeşte *simplă.*
Dacă $\alpha \geq 2$, rădăcina a se numeşte *multiplă.*

In general, o funcție rațională reală $f(x)$, este raportul a două polinoame reale care nu au nici un factor comun.

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$$

O funcție rațională se numeşte *proprie* dacă numărătorul $P_m(x)$ are gradul mai mic decât numitorul $Q_n(x)$, adică $m < n$.

Dacă $m \geq n$, în urma unei împărțiri, fracția $f(x)$ poate fi reprezentată astfel:

$$f(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=R_{m-n}(x)+\frac{\widetilde{P}(x)}{Q_n(x)}$$

unde $R_{m-n}(x)$ şi $\widetilde{P}(x)$ sunt polinoame reale, iar $\dfrac{\widetilde{P}(x)}{Q_n(x)}$ este funcţie raţională proprie.

Funcţiile raţionale simple sunt funcţiile raţionale proprii de forma:

$$\frac{A}{x-a},\quad \frac{A}{(x-a)^k},\quad \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\quad \text{şi}\quad \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}$$

unde $A,M,N,a,p,q\in\mathbb{R}$, $k\geq 2$ număr natural. Polinomul pătratic x^2+px+q nu are rădăcini reale, $p^2-4q<0$.

Teoremă: Fie funcţia raţională reală proprie $f(x)=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ şi fie

$$Q_n(x)=a_0(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\cdots(x-l)^{\lambda}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\mu_1}\cdots\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{\mu_s}\ .$$

Atunci, $f(x)$ se descompune în mod unic într-o sumă de funcţii raţionale simple:

$$\begin{aligned}\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=&\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+\\&+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}+\\&\ldots\\&+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_sx+q_s}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+p_sx+q_s\right)^2}+\cdots+\frac{M_{\mu_s}x+N_{\mu_s}}{\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{\mu_s}}\end{aligned}$$

unde $A_1,A_2,\ldots,A_\alpha,B_1,B_2,\ldots,B_\beta,M_1,N_1,M_2,N_2,\ldots,M_{\mu_s},N_{\mu_s}\in\mathbb{R}$ şi nu sunt toate nule.

Pentru a determina coeficienţii de la numărătorii fracţiilor raţionale simple, înmulţim relaţia precedentă cu $Q_n(x)$ şi aplicăm metoda identificării coeficienţilor puterilor egale a lui x în relaţia astfel obţinută. Astfel, se obţine un sistem liniar în necunoscutele $A_1,A_2,\ldots,A_\alpha,B_1,B_2,\ldots,B_\beta,M_1,N_1,M_2,N_2,\ldots,M_{\mu_s},N_{\mu_s}$.

Exemple:

1. Descompuneți fracția rațională

$$f(x)=\frac{3x^2-6x+2}{x^3-3x^2+2x}$$

în fracții raționale simple.

$$x^3-3x^2+2x=x\left(x^2-3x+2\right)=x(x-1)(x-2)$$

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-3x^2+2x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-2}$$

$$3x^2-6x+2=A(x-1)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x-1)$$

$$3x^2-6x+2=A\left(x^2-3x+2\right)+B\left(x^2-2x\right)+C\left(x^2-x\right)$$

$$\begin{aligned}
x^2&:\quad 3=A+B+C\\
x^1&:\quad -6=-3A-2B-C\\
x^0&:\quad 2=2A
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\quad A=B=C=1$$

$$f(x)=\frac{3x^2-6x+2}{x^3-3x^2+2x}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}$$

2. Descompuneți fracția rațională

$$f(x)=\frac{x^3+3x+1}{x^5+3x^4+3x^3+x^2}$$

în fracții raționale simple.

$$x^5+3x^4+3x^3+x^2=x^2\left(x^3+3x^2+3x+1\right)=x^2(x+1)^3$$

$$\frac{x^3+3x+1}{x^5+3x^4+3x^3+x^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{B_1}{x+1}+\frac{B_2}{(x+1)^2}+\frac{B_3}{(x+1)^3}$$

$$x^3+3x+1=A_1x(x+1)^3+A_2(x+1)^3+B_1x^2(x+1)^2+B_2x^2(x+1)+B_3x^2$$

$$x^3+3x+1=A_1\left(x^4+3x^3+3x^2+x\right)+A_2\left(x^3+3x^2+3x+1\right)+B_1\left(x^4+2x^3+x^2\right)+B_2\left(x^3+x^2\right)+B_3x^2$$

$$\begin{aligned}
x^4 &: \quad 0=A_1+B_1\\
x^3 &: \quad 1=3A_1+A_2+2B_1+B_2\\
x^2 &: \quad 0=3A_1+3A_2+B_1+B_2+B_3\\
x^1 &: \quad 3=A_1+3A_2\\
x^0 &: \quad 1=A_2
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad A_1=0 \quad A_2=1 \quad B_1=0 \qquad B_2=0 \qquad B_3=-3$$

$$f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{3}{(x+1)^3}$$

3. Descompuneți fracția rațională

$$f(x)=\frac{x^3+x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}$$

în fracții raționale simple.

$$\frac{x^3+x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{M_1x+N_1}{x^2+1}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$x^3+x^2+1=\left(M_1x+N_1\right)\left(x^2+1\right)+M_2x+N_2$$

$$x^3+x^2+1=M_1x^3+M_1x+N_1x^2+N_1+M_2x+N_2$$

$$\begin{aligned}
x^3 &: \quad 1=M_1\\
x^2 &: \quad 1=N_1\\
x^1 &: \quad 0=M_1+M_2\\
x^0 &: \quad 1=N_1+N_2
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{M}_1=1 \qquad N_1=1 \qquad M_2=-1 \qquad N_2=0$$

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2+1}-\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Integrarea funcțiilor raționale simple

1. $\int \frac{A}{x-a}dx$

$$t = x - a$$
$$dt = dx$$

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{dt}{t} = A\ln|t| = A\ln|x-a| + C$$

2. $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx$

$$t = x - a$$
$$dt = dx$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int t^{-k}dt = A\frac{t^{-k+1}}{-k+1} = A\frac{1}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C$$

3. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$

$$x^2 + px + q = \left[x^2 + 2x\frac{p}{2} + \left(\frac{p}{2}\right)^2\right] + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)$$

Notație: $a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$

Substituție: $t = x + \frac{p}{2}$

$$dt = dx$$
$$x^2 + px + q = t^2 + a^2$$
$$x = t - \frac{p}{2}$$

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+a^2}dt = M\int \frac{tdt}{t^2+a^2} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2}$$

$$\varphi = t^2 + a^2$$
$$d\varphi = 2tdt$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d\varphi}{\varphi} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{M}{2}\ln\left(t^2+a^2\right) + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{a}arctg\frac{t}{a}$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$$

Exemplu:

$$\int \frac{2-x}{x^2+4x+6}dx$$

$$x^2+4x+6 = x^2+4x+4+2 = (x+2)^2+2$$

$$t = x+2$$
$$dt = dx$$

$$\int \frac{2-x}{x^2+4x+6}dx = \int \frac{2-(t-2)}{t^2+2}dt = 4\int \frac{dt}{t^2+2} - \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+2}dt$$

$$= 4\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right) + C = 2\sqrt{2}arctg\frac{x+2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+4x+6\right) + C$$

4. $\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx, \quad k \geq 2$

Substituție: $t = x + \frac{p}{2}$

$$dt = dx$$
$$x^2+px+q = t^2+a^2$$
$$x = t - \frac{p}{2}$$
$$a \overset{not}{=} \sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$$

$$\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx = \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{\left(t^2+a^2\right)^k}dt = M\int \frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^k} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}$$

$$\varphi = t^2 + a^2$$
$$d\varphi = 2tdt$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d\varphi}{\varphi^k} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k} = \frac{M}{2(1-k)\left(t^2+a^2\right)^{k-1}} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)I_k$$

Am notat cu I_k integrala:

$$I_k = \int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\left(t^2+a^2\right)-t^2}{\left(t^2+a^2\right)^k}dt =$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{t\cdot 2tdt}{\left(t^2+a^2\right)^k} = \frac{1}{a^2}I_{k-1} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{t\cdot 2tdt}{\left(t^2+a^2\right)^k}$$

$$u = t \qquad dv = \frac{2tdt}{\left(t^2+a^2\right)^k}$$

$$du = dt \qquad v = \frac{\left(t^2+a^2\right)^{-k+1}}{-k+1}$$

$$I_k = \frac{1}{a^2}I_{k-1} - \frac{1}{2a^2}\left(\frac{t}{(1-k)\left(t^2+a^2\right)^{k-1}} + \frac{1}{k-1}I_{k-1}\right)$$

$$I_k = \frac{t}{2a^2(k-1)\left(t^2+a^2\right)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2a^2(k-1)}I_{k-1}$$ relație de recurență

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{t}{a} + C$$

$$I_2 = \int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^2} = \frac{t}{2a^2\left(t^2+a^2\right)} + \frac{1}{2a^2}I_1 = \frac{t}{2a^2\left(t^2+a^2\right)} + \frac{1}{2a^3}arctg\frac{t}{a} + C$$

Exemplu:

$$\int \frac{x+1}{\left(x^2-4x+5\right)^2}dx$$

$$x^2-4x+5=x^2-4x+4+1=\left(x-2\right)^2+1$$

$$t=x-2$$
$$dt=dx$$

$$\int \frac{t+3}{\left(t^2+1\right)^2}dt=\frac{1}{2}\int \frac{2t}{\left(t^2+1\right)^2}+3\int \frac{dt}{\left(t^2+1\right)^2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{t^2+1}+3I_2$$

$$I_2=\int \frac{dt}{\left(t^2+1\right)^2}=\int \frac{t^2+1-t^2}{\left(t^2+1\right)^2}dt=\int \frac{dt}{t^2+1}-\frac{1}{2}\int t\cdot \frac{2tdt}{\left(t^2+1\right)^2}$$

$$u=t \qquad dv=\frac{2tdt}{\left(t^2+1\right)^2}$$

$$du=dt \qquad v=-\frac{1}{t^2+1}$$

$$I_2=arctgt-\frac{1}{2}\left(-\frac{t}{t^2+1}+\int \frac{dt}{t^2+1}\right)=\frac{1}{2}arctgt+\frac{t}{2\left(t^2+1\right)}+C$$

$$\int \frac{t+3}{\left(t^2+1\right)^2}dt=-\frac{1}{2}\frac{1}{t^2+1}+3\left(\frac{1}{2}arctgt+\frac{t}{2\left(t^2+1\right)}\right)+C$$

Se revine la variabila x cu ajutorul substituției.

Observație: Integrala nedefinită a unei funcții raționale totdeauna există pe intervalele în care numitorul $Q_n\left(x\right)$ aste nenul, şi se exprimă cu ajutorul unui număr finit de funcții elementare, anume o sumă algebrică care are ca termeni numai polinoame, funcții raționale proprii, funcții logaritmice şi arctangente.

Exemple:

1. $\int \frac{x^3}{(x-1)(x^2-4)} dx$

2. $\int \frac{x^2+1}{x^4-x^3} dx$

3. $\int \frac{x^3-x}{(x^2+1)^2} dx$

3.3 Intergarea funcțiilor iraționale

Considerăm funcții de mai multe variabile $u_1, u_2, \dots, u_k$. Astfel, fie $R(u_1, u_2, \dots, u_k)$ o funcție reprezentată astfel:

$$R(u_1, u_2, \dots, u_k) = \frac{P_m(u_1, u_2, \dots, u_k)}{Q_n(u_1, u_2, \dots, u_k)}$$

unde $P_m(u_1, u_2, \dots, u_k)$ şi $Q_n(u_1, u_2, \dots, u_k)$ sunt polinoame de gradul *m* şi respectiv *n* în $u_1, u_2, \dots, u_k$. Acestă funcție este una rațională în $u_1, u_2, \dots, u_k$. În caz contrar, funcția este irațională.

Exemple:

1) $P_2(u_1, u_2) = A_{00} + A_{10}u_1 + A_{01}u_2 + A_{20}u_1^2 + A_{11}u_1u_2 + A_{02}u_2^2$

este polinom de gradul doi în variabilele u_1, u_2 în care coeficienții sunt numere reale şi $A_{20}^2 + A_{11}^2 + A_{02}^2 \neq 0$.

2) $$f(x,y)=\frac{x^2+2y^3+xy}{x+x^3y^2+1}$$

este funcție rațională în variabilele *x,y* deoarece este raport de două polinoame $P_3(x,y)=x^2+2y^3+xy$ şi $Q_5(x,y)=x+x^3y^2+1$.

3) $$f(x,y)=\frac{\sqrt{x^2+xy+3}}{x+y}$$

este funcție irațională.

Presupunem că variabilele $u_1,u_2,\dots,u_k$ sunt funcții de o variabilă *x*, adică

$$u_1=f_1(x),\ u_2=f_2(x),\ \dots\ u_k=f_k(x)$$

Atunci funcția $R\left[f_1(x),f_2(x),\dots,f_k(x)\right]$ este o funcție rațională în funcțiile $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_k(x)$.

Exemple:

1) $$f(x)=\frac{x^2+\sqrt{x^2+x+1}}{x+1+3\sqrt{x^2+x+1}}$$

este funcție rațională în *x* şi $\sqrt{x^2+x+1}$, adică $f(x)=R\left(x,\sqrt{x^2+x+1}\right)$.

2) $$f(x)=\frac{\ln x+\sqrt{x^2+1}}{2+\sin x}$$

este irațională în *x* şi $\sqrt{x^2+1}$ dar este funcție rațională în $\ln x$, $\sqrt{x^2+1}$ şi $\sin x$, adică $f(x)=R\left(\ln x,\sqrt{x^2+1},\sin x\right)$.

Observație: Nu toate integralele funcțiilor iraționale admit reprezentări în mulțimea funcțiilor elementare. De exemplu, integralele

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-k^2x^2\right)}} \quad \text{şi} \quad \int \frac{x^2dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-k^2x^2\right)}} \qquad k \in \left(0,1\right)$$

numite integrale eliptice nu pot fi exprimate în mulțimea funcțiilor elementare.

Prin substituții potrivite anumite integrale ale funcțiilor iraționale pot fi transformate în integrarea funcțiilor raționale. În cele ce urmează, ne ocupăm de astfel de integrale.

1) $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$, unde $m \geq 2$ este număr natural şi coeficienții respectă $ad-bc \neq 0$. Substituția recomandată este

$$t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

Exemple:

$$\int \sqrt[4]{\frac{2x-3}{2x+3}}\frac{dx}{\left(2x+3\right)^2} \qquad t = \sqrt[4]{\frac{2x-3}{2x+3}}$$

$$t^4 = \frac{2x-3}{2x+3} \qquad t^4\left(2x+3\right) = 2x-3 \qquad 2x\left(1-t^4\right) = 3\left(1+t^4\right)$$

$$x = \frac{3}{2}\frac{1+t^4}{1-t^4} \qquad dx = \frac{3}{2}\frac{4t^3\left(1-t^4\right)+4t^3\left(1+t^4\right)}{\left(1-t^4\right)^2}dt \qquad dx = \frac{12t^3}{\left(1-t^4\right)^2}dt$$

$$\int \sqrt[4]{\frac{2x-3}{2x+3}}\frac{dx}{\left(2x+3\right)^2} = \int t\frac{1}{\left(2\frac{3}{2}\frac{1+t^4}{1-t^4}+3\right)^2}\frac{12t^3}{\left(1-t^4\right)^2}dt$$

$$= \int t\frac{1}{3^2\left(1+t^4+1-t^4\right)^2}12t^3dt = \frac{1}{3}\int t^4dt = \frac{1}{3}\frac{t^5}{5}+C = \frac{1}{15}\left(\sqrt[4]{\frac{2x-3}{2x+3}}\right)^5+C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}\right)} \qquad t=\sqrt[12]{x}$$

$$t^{12}=x \qquad 12t^{11}dt=dx \qquad \sqrt[4]{x}=\sqrt[4]{t^{12}}=t^3 \qquad \sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{t^{12}}=t^4 \qquad \sqrt{x}=\sqrt{t^{12}}=t^6$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}\right)}=\int \frac{12t^{11}dt}{t^3\left(t^4+t^6\right)}=12\int \frac{t^4}{1+t^2}dt=12\int\left(t^2-\frac{1}{1+t^2}\right)dt$$

$$=12\left(\frac{t^3}{3}-arctg\ t\right)+C=12\left(\frac{\sqrt[12]{x^3}}{3}-arctg\sqrt[12]{x}\right)+C$$

2) $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$

i) Dacă $a>0$ substituția recomandată este $t=\sqrt{ax^2+bx+c}\pm\sqrt{a}x$

In cazul

$$t=\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a}x \quad \Rightarrow \quad \left(t-\sqrt{a}x\right)^2=ax^2+bx+c$$

$$t^2-2t\sqrt{a}x+ax^2=ax^2+bx+c$$

$$t^2-2t\sqrt{a}x=bx+c$$

$$x=\frac{t^2-c}{2t\sqrt{a}+b}$$

$$dx=\frac{2t\left(2t\sqrt{a}+b\right)-\left(t^2-c\right)2\sqrt{a}}{\left(2t\sqrt{a}+b\right)^2}dt \qquad dx=\frac{2t^2\sqrt{a}+2tb+2c\sqrt{a}}{\left(2t\sqrt{a}+b\right)^2}dt$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}x=t-\sqrt{a}\,\frac{t^2-c}{2t\sqrt{a}+b}=\frac{2t^2\sqrt{a}-\sqrt{a}t^2+c\sqrt{a}}{2t\sqrt{a}+b}=\frac{t^2\sqrt{a}+c\sqrt{a}}{2t\sqrt{a}+b}$$

$$\int R\left(\frac{t^2-c}{2t\sqrt{a}+b},\frac{t^2\sqrt{a}+c\sqrt{a}}{2t\sqrt{a}+b}\right)\frac{2t^2\sqrt{a}+2tb+2c\sqrt{a}}{\left(2t\sqrt{a}+b\right)^2}dt=\int R_1(t)\,dt=F(t)+C$$

Exemple:

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha^2}}dx=\ln\left(x+\sqrt{x^2+\alpha^2}\right)+C$$

$$t=\sqrt{x^2+\alpha^2}+x \qquad t-x=\sqrt{x^2+\alpha^2} \qquad (t-x)^2=x^2+\alpha^2$$

$$t^2-2tx=\alpha^2$$

$$x=\frac{t^2-\alpha^2}{2t}$$

$$dx=\frac{2t2t-\left(t^2-\alpha^2\right)2}{4t^2}dt=\frac{2t^2+2\alpha^2}{4t^2}dt=\frac{t^2+\alpha^2}{2t^2}dt$$

$$\sqrt{x^2+\alpha^2}=t-\frac{t^2-\alpha^2}{2t}=\frac{t^2+\alpha^2}{2t}$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha^2}}dx=\int\frac{1}{\frac{t^2+\alpha^2}{2t}}\frac{t^2+\alpha^2}{2t^2}dt=\int\frac{1}{t}dt=\ln|t|+C=\ln\left(x+\sqrt{x^2+\alpha^2}\right)+C$$

Temă: $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}dx=\ln\left|x+\sqrt{x^2-\alpha^2}\right|+C$

ii) Dacă ax^2+bx+c are două rădăcimi reale distincte x_1, x_2, atunci substituția recomandată este

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-x_1)t$$

sau $$\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-x_2)t$$

In cazul

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\left(x-x_1\right)t$$

$$a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)=\left(x-x_1\right)^2t^2 \qquad a\left(x-x_2\right)=\left(x-x_1\right)t^2$$

$$x=\frac{x_1t^2-ax_2}{t^2-a}$$

$$dx=\frac{2tx_1\left(t^2-a\right)-\left(x_1t^2-ax_2\right)2t}{\left(t^2-a\right)^2}dt=\frac{2ta\left(x_2-x_1\right)}{\left(t^2-a\right)^2}dt$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\left(\frac{x_1t^2-ax_2}{t^2-a}-x_1\right)t=\frac{x_1t^2-ax_2-t^2x_1+ax_1}{t^2-a}t=\frac{a\left(x_1-x_2\right)}{t^2-a}$$

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=\int R\left(\frac{x_1t^2-ax_2}{t^2-a},\frac{a\left(x_1-x_2\right)}{t^2-a}\right)\frac{2ta\left(x_2-x_1\right)}{\left(t^2-a\right)^2}dt=\int R_1\left(t\right)dt$$