2.21 Funcții vectoriale de argument scalar

Considerăm un punct M care se mişcă pe o traiectorie L. Acesta poate fi localizat, la fiecare moment de timp t prin indicarea vectorului său de poziție $\vec{r}$, vectorului său viteză $\vec{v}$, vectorului său accelerație $\vec{a}$, etc. Fiecare din aceşti vectori este o funcție vectorială de argument scalar t, adică

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \quad \vec{v} = \vec{v}(t), \quad \vec{a} = \vec{a}(t)$$

Definiție: Spunem că $\vec{a} = \vec{a}(t)$ este o funcție vectorială de argument scalar t definită pe intervalul (α, β) dacă există o lege care asociază la fiecare $t \in (\alpha, \beta)$ un vector bine definit $\vec{a}$.

Fie vectorul $\vec{a}$ dezvoltat relativ la vectorii unitate $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ai unui sistem de coordonate cartezian:

$$\vec{a} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

Dacă $\vec{a} = \vec{a}(t)$ este o funcție vectorială de argument scalar t, atunci coordonatele sale x, y şi z sunt funcții scalare de argumentul t, adică

$$x = \varphi(t) \qquad y = \psi(t) \qquad z = \gamma(t), \qquad t \in (\alpha, \beta)$$

Reciproc, dacă coordonatele x, y şi z ale vectorului $\vec{a}$ sunt funcții scalare de argumentul t, atunci şi vectorul $\vec{a}$ este funcție vectorială de argumentul scalar t.

$$\vec{a} = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j} + \gamma(t)\vec{k}$$

Observație: Funcția vectorială $\vec{a}(t)$ este complet determinată de funcțiile scalare $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ şi $z = \gamma(t)$ şi vice versa.

Definiție: Considerăm vectorul $\vec{a}(t)$ a cărui origine este punctul O din spațiu. Pentru diverse valori ale argumentului t, vectorul $\vec{a}(t)$ are vârful în diverse puncte care formează o mulțime în spațiu. Această mulțime de puncte, corespunzătoare tuturor valorilor argumentului t din domeniul de definiție, se numește *hodograful* funcției vectoriale $\vec{a}(t)$. În general hodograful este o curbă.

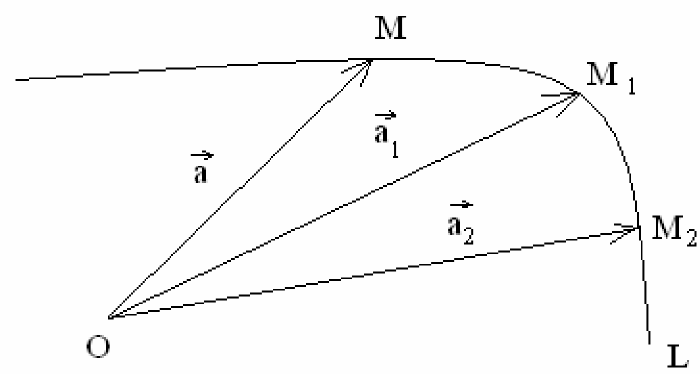

Figura 2.65

Observație: Hodograful vectorului de poziție $\vec{r}$ al unui punct mobil coincide cu traiectoria L a punctului.

Ecuația:

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \quad t \in (\alpha, \beta)$$

sau

$$\vec{r} = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j} + \gamma(t)\vec{k}, \quad t \in (\alpha, \beta)$$

se numește *ecuație vectorială* a curbei L.

Ecuațiile:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \qquad t \in (\alpha, \beta) \\ z = \gamma(t) \end{cases}$$

se numesc *ecuații parametrice* ale curbei L.

Exemplu: Ecuațiile: $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t, \\ z = ht \end{cases}$ $\quad t \in [0, 2\pi)$, $R = ct$, $h = ct$

sunt ecuațiile parametrice care definesc o curbă elicoidală în spațiu.

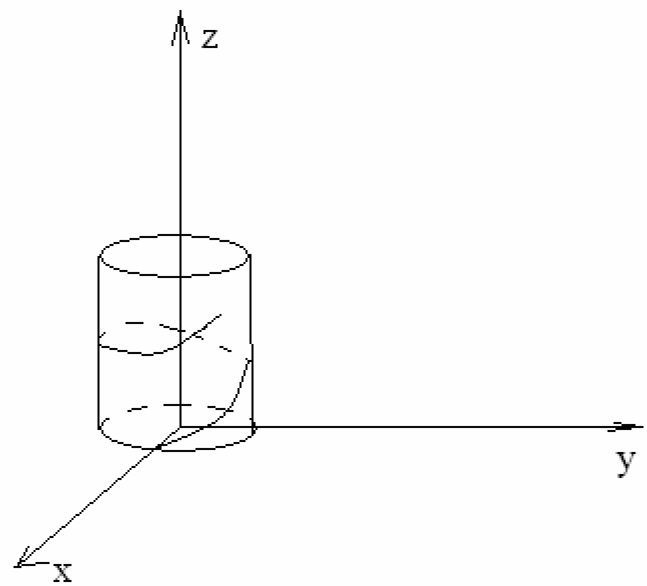

Figura 2.66

Limite şi continuitate pentru funcții vectoriale

Definiție: Fie funcția vectorială $\vec{a} = \vec{a}(t)$ definită pe o vecinătate a punctului $t = t_0$ cu o posibilă excepție în t_0. Vectorul $\vec{A}$ este limita funcției vectoriale $\vec{a}(t)$ pentru $t \to t_0$ dacă $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ astfel încât

$$\left| \vec{a}(t) - \vec{A} \right| < \varepsilon$$

pentru $\forall t \neq t_0$, $|t - t_0| < \delta$.

Notație: $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{a}(t) = \vec{A}$

Interpretare geometrică: Lungimea vectorului $\vec{a}(t) - \vec{A}$ tinde la zero când $t \to t_0$, astfel încât vectorul $\vec{a}(t)$ tinde să coincidă cu vectorul $\vec{A}$ pentru $t \to t_0$.

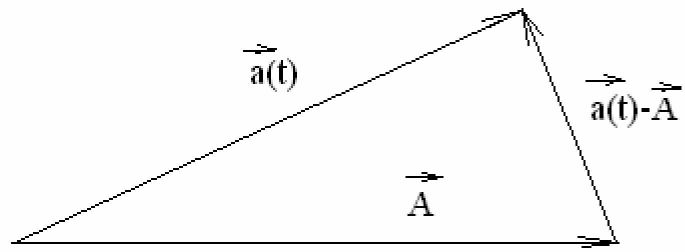

Figura 2.67

$$\lim_{t\to t_0}\vec{a}(t)=\vec{A} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{t\to t_0}\left|\vec{a}(t)-\vec{A}\right|=0$$

Dacă

$$\begin{aligned}\vec{a}&=\varphi(t)\vec{i}+\psi(t)\vec{j}+\gamma(t)\vec{k}\\ \vec{A}&=a\,\vec{i}+b\,\vec{j}+c\,\vec{k}\end{aligned}$$

atunci

$$\left|\vec{a}(t)-\vec{A}\right|=\sqrt{\left(\varphi(t)-a\right)^2+\left(\psi(t)-b\right)^2+\left(\gamma(t)-c\right)^2}$$

Dacă

$$\lim_{t\to t_0}\vec{a}(t)=\vec{A}$$

atunci

$$\lim_{t\to t_0}\varphi(t)=a\,,\quad \lim_{t\to t_0}\psi(t)=b\,,\quad \lim_{t\to t_0}\gamma(t)=c$$

şi vice versa.

Definiţie: Fie $\vec{a}=\vec{a}(t)$ o funcţia vectorială definită pe (α,β) şi fie $t_0\in(\alpha,\beta)$. Funcţia vectorială $\vec{a}(t)$ este continuă în $t=t_0$ dacă

$$\lim_{t\to t_0}\vec{a}(t)=\vec{a}(t_0)$$

Diferențierea funcțiilor vectoriale

Fie $\vec{a} = \vec{a}(t)$ o funcția vectorială definită pe (α, β) şi fie curba *L* hodograful funcției $\vec{a}(t)$. La punctul $t \in (\alpha, \beta)$ îi corespunde punctul *M* de pe curba *L*.

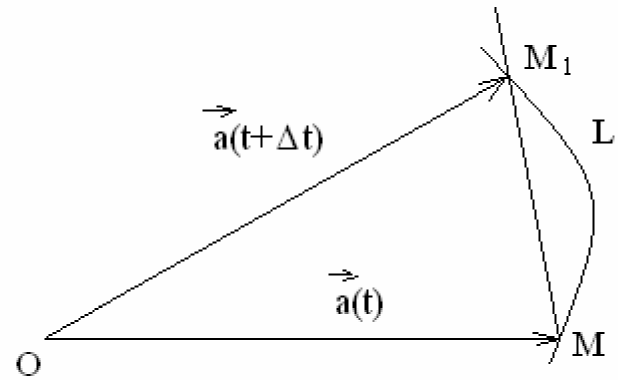

Figura 2.68

Considerăm o creştere Δt a argumentului *t* astfel încât $t + \Delta t \in (\alpha, \beta)$. Vectorul asociat noului argument $\vec{a}(t + \Delta t)$ are în corespondență punctul M_1 de pe curba *L*.
Creşterea funcției vectoriale $\vec{a}(t)$ corespunzătoare creşterii argumentului Δt, este

$$\Delta \vec{a} = \vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)$$

Raportul

$$\frac{\Delta \vec{a}}{\Delta t} = \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t}, \quad \Delta t \neq 0$$

este un vector coliniar cu $\Delta \vec{a}$.

Definiție: Limita raportului $\frac{\Delta \vec{a}}{\Delta t}$ pentru $\Delta t \to 0$, dacă există, se numeşte derivata funcției vectoriale $\vec{a}(t)$ în raport cu argumentul scalar *t*, în punctul *t*. Adică

$$\frac{d\vec{a}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{a}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t}$$

Problema 1: Care este orientarea vectorului $\frac{d\vec{a}}{dt}$?

Atunci când $\Delta t \to 0$, punctul M_1 se deplasează pe hodograful L spre M, astfel încât secanta MM_1 va tinde la tangenta la curba L în punctul M. În consecință, derivata $\frac{d\vec{a}}{dt}$ este un vector tangent la hodograful lui $\vec{a}(t)$ în punctul M.

Problema 2: Cum calculăm derivata unei funcții vectoriale?

Considerăm

$$\vec{a} = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j} + \gamma(t)\vec{k}$$

Atunci

$$\Delta\vec{a}(t) = \vec{a}(t+\Delta t) - \vec{a}(t) = \Delta\varphi(t)\vec{i} + \Delta\psi(t)\vec{j} + \Delta\gamma(t)\vec{k}$$

Şi împărțind cu $\Delta t \neq 0$

$$\frac{\Delta\vec{a}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\varphi(t)}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta\psi(t)}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta\gamma(t)}{\Delta t}\vec{k}$$

Dacă funcțiile $\varphi(t)$, $\psi(t)$ şi $\gamma(t)$ sunt derivabile în t, atunci fiecare termen din relația de mai sus are limită pentru $\Delta t \to 0$. În această situație şi raportul din stânga are limită, adică există $\frac{d\vec{a}(t)}{dt}$. Mai mult,

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{i} + \frac{d\psi}{dt}\vec{j} + \frac{d\gamma}{dt}\vec{k}$$

Concluzie: Pentru a calcula derivata funcției vectoriale $\vec{a}(t)$ trebuie să calculăm derivatele coordonatelor funcției $\vec{a}(t)$.

Aplicație: Dacă $\vec{r} = \vec{r}(t)$ este vectorul de poziție al unui punct material, atunci viteza punctului material la momentul t, este determinată de derivata lui $\vec{r}(t)$, adică

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{v}(t)$$

Exemplu: Calculați derivata funcției vectoriale:

$$\vec{a}(t) = R\cos t\ \vec{i} + R\sin t\ \vec{j} + ht\ \vec{k}\ , \qquad R, h = ct$$

$$\frac{d\vec{a}(t)}{dt} = -R\sin t\ \vec{i} + R\cos t\ \vec{j} + h\ \vec{k}$$

Reguli de diferențiere:

1) Dacă $\vec{c}$ este un vector constant, atunci $\frac{d\vec{c}}{dt} = 0$.
2) Dacă funcțiile $\vec{a}(t)$ şi $\vec{b}(t)$ au derivate în *t*, atunci

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{a}(t) \pm \vec{b}(t)\right) = \frac{d\vec{a}(t)}{dt} \pm \frac{d\vec{b}(t)}{dt}$$

3) Dacă α este o constantă şi $\vec{a}(t)$ are derivată în *t*, atunci

$$\frac{d}{dt}\left(\alpha\ \vec{a}(t)\right) = \alpha \frac{d\vec{a}(t)}{dt}$$

4) Derivata produsului scalar este:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{a}(t), \vec{b}(t)\right) = \left(\frac{d\vec{a}}{dt}, \vec{b}\right) + \left(\vec{a}, \frac{d\vec{b}}{dt}\right)$$

Observație: Dacă $\vec{e}(t)$ este vector unitar, adică $\left|\vec{e}(t)\right| = 1$, atunci derivata sa $\frac{d\vec{e}}{dt}$ este perpendiculară pe $\vec{e}$.
Într-adevăr, dacă $\vec{e}$ este vector unitar, atunci $(\vec{e}, \vec{e}) = 1$ şi diferențiind acest produs scalar obținem:

$$\left(\frac{d\vec{e}}{dt}, \vec{e}\right) + \left(\vec{e}, \frac{d\vec{e}}{dt}\right) = 0$$

$$2\left(\frac{d\vec{e}}{dt},\vec{e}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{e}}{dt}\perp\vec{e}$$

5) Derivata produsului vectorial este:

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{a}\left(t\right)\times\vec{b}\left(t\right)\right]=\frac{d\vec{a}}{dt}\times\vec{b}+\vec{a}\times\frac{d\vec{b}}{dt}$$

Cap III Calcul integral

3.1 Integrala nedefinită

Definiție: O funcție $F(x)$ este o *primitivă* a funcției $f(x)$ pe intervalul (a,b), dacă $F(x)$ este diferențiabilă în oricare punct din (a,b) şi $F'(x)=f(x)$ sau echivalent $dF(x)=f(x)dx$, $\forall x\in(a,b)$.

Exemple:

1) $F(x)=\arcsin x$ este o primitivă a funcției

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ pe intervalul } (-1,+1).$$

Intr-adevăr,

$$F'(x)=(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2) $F(x)=\frac{a^x}{\ln a}$, $a>0$, $a\neq 1$ este o primitivă a funcției

$$f(x)=a^x \text{ pe intervalul } (-\infty,+\infty).$$

Intr-adevăr,

$$F'(x)=\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)'=\frac{a^x\ln a}{\ln a}=a^x$$

Dacă $F(x)$ este o *primitivă* a funcției $f(x)$ pe intervalul (a,b), atunci şi $\Phi(x)=F(x)+C$ este o *primitivă* a funcției $f(x)$ pe intervalul (a,b).

Definiție: Mulțimea tuturor primitivelor unei funcții $f(x)$ pe (a,b) se numeşte *integrala nedefinită* a funcției $f(x)$ pe intervalul (a,b) şi se notează

$$\int \underbrace{f(x)dx}_{element\ de\ \text{integrare}}$$

$x=$variabilă de integrare

Dacă $F(x)$ este una din primitivele funcției $f(x)$ pe intervalul (a,b), atunci

$$\int f(x)dx = F(x) + C\,, \quad C = \text{ constantă}$$

Observație: Dacă $f(x)$ este o funcție continuă pe intervalul (a,b), atunci funcția admite primitive pe intervalul (a,b) şi în consecință are integrală nedefinită pe (a,b).

Proprietățile integralei nedefinite:

1. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$

Intr-adevăr, $d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x)+C) = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$

2. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

Intr-adevăr, relația are loc dacă avem în vedere definiția diferențialei.

3. $\int dF(x) = F(x) + C$

Intr-adevăr, $\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$

4. $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx\,, \quad A = \text{ct.} \quad A \neq 0$

5. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

6. $\int \left(\sum_{k=1}^{n} A_k f_k(x)\right)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k \int f_k(x)dx\,, \quad A_k = \text{ct.}$

Integralele nedefinite ale funcțiilor elementare

1. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\qquad \alpha \neq -1$, $x > 0$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$, $\qquad x \neq 0$

3. $\int a^{x} dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C$, $\qquad a > 0$, $a \neq 1$

$\int e^{x} dx = e^{x} + C$

4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

5. $\int \cos x dx = \sin x + C$

6. $\int \dfrac{dx}{\sin^{2} x} = -ctgx + C$, $\qquad x \neq n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^{2} x} = tgx + C$, $\qquad x \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

8. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}} = \arcsin x + C$, $\qquad x \in (-1, +1)$

9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$, $\qquad x \in (-a, +a)$

10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^{2} \pm a^{2}}} = \ln\left|x + \sqrt{x^{2} \pm a^{2}}\right| + C$, $\qquad$ semnul **(-)** cere $|x| > |a|$

11. $\int \dfrac{dx}{1+x^{2}} = arctgx + C$

12. $\int \dfrac{dx}{a^{2}+x^{2}} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C$, $\qquad a \neq 0$

13. $\int \dfrac{dx}{x^{2}-a^{2}} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$, $\qquad a \neq 0$

Observație: Operațiile de diferențiere și integrare sunt diferite. Subliniem că diferențiind funcții elementare totdeauna obținem funcții elementare, în timp ce integrand funcții elementare nu vom putea reprezenta totdeauna integralele nedefinite ale acestora în mulțimea funcțiilor elementare. De exemplu, integralele următoare nu pot fi reprezentate în mulțimea funcțiilor elementare deși datorită continuității funcțiilor de sub integrală, aceste integrale nedefinite există.

$$\int e^{-x^2}dx \qquad \int \sin x^2 dx \qquad \int \cos x^2 dx$$

$$\int \frac{sinx}{x}dx,\ \ x \neq 0 \qquad \int \frac{cosx}{x}dx,\ \ x \neq 0 \qquad \int \frac{dx}{\ln x},\ \ x>0,\ \ x \neq 1$$

a) Integrale care se reduc la integrarea funcțiilor elementare

Exemple:

1) $$\int \left(\sqrt{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)^2 dx = \int \left(x^3 - 2 + \frac{1}{x^3}\right)dx = \frac{x^4}{4} - 2x + \frac{x^{-2}}{-2} + C$$

$$= \frac{x^4}{4} - 2x - \frac{1}{2x^2} + C$$

2) $$\int \frac{(1+x)^2}{x^3+x}dx = \int \frac{1+2x+x^2}{x(1+x^2)}dx = \int \frac{(1+x^2)+2x}{x(1+x^2)}dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{1+x^2}\right)dx = \int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{1}{1+x^2}dx = \ln|x| + 2arctg\ x + C$$

3) $$\int \frac{2\cdot 3^x + 3\cdot 2^x}{5^x}dx = \int \left(2\left(\frac{3}{5}\right)^x + 3\left(\frac{2}{5}\right)^x\right)dx = 2\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{3}{5}\right)} + 3\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} + C$$

b) Metoda substituției

Calculăm integrala nedefinită $\int f(x)dx$ a unei funcții continue $f(x)$. Presupunem că există o funcție $x=\varphi(t)$ cu derivată continuă $\varphi'(t)$ şi funcție inversă $t=\psi(x)$. Atunci putem să scriem:

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Desigur, substituind în rezultatul acestei integrale în variabila *t*, pe *t* cu $t=\psi(x)$, obținem rezultatul în variabila inițială x.

Exemplu:

$$\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}}$$

Considerăm: $x=t^2-1$

$dx=2t\ dt$

$t=\sqrt{x+1}$

Atunci,

$$\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}}=\int \frac{2tdt}{(t^2+1)t}=2\int \frac{dt}{t^2+1}=2arctg\ t+C$$

Cu substituția $t=\sqrt{x+1}$, obținem:

$$\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}}=2arctg\ \sqrt{x+1}+C$$

Observație: Presupunem că în integrala $\int f(x)dx$ elementul de integrare $f(x)dx$ admite o reprezentare de forma:

$$f(x)dx = g[\psi(x)]\psi'(x)dx$$

$$f(x)dx = g[\psi(x)]d[\psi(x)]$$

Dacă $g(t)$ este uşor integrabilă, atunci

$$\int g(t)dt = F(t) + C = F(\psi(x)) + C$$

Exemple:

1) $\int \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}} dx$

Considerăm $t = 2^x + 2^{-x}$, $t > 0$

$$dt = \left(2^x \ln 2 - 2^{-x} \ln 2\right) dx$$

$$\int \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}} dx = \frac{1}{\ln 2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{\ln 2} \ln t + C = \frac{\ln\left(2^x + 2^{-x}\right)}{\ln 2} + C$$

2) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}} dx$

Considerăm $t = \sqrt{e^x + 1}$ $\qquad\qquad e^x = t^2 - 1$

$$dt = \frac{1}{2\sqrt{e^x + 1}} e^x dx$$

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}} dx = \int e^x \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}} dx = \int \left(t^2 - 1\right) 2dt = 2\int \left(t^2 - 1\right) dt =$$

$$= 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right) + C = \frac{2}{3}\left(e^x + 1\right)^{3/2} - 2\sqrt{e^x + 1} + C =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{e^x+1}\left(e^x+1-3\right)+C = \frac{2}{3}\left(e^x-2\right)\sqrt{e^x+1}+C$$

c) Integrarea prin părți

Fie funcțiile $u(x)$ şi $v(x)$ cu derivate $u'(x)$ şi $v'(x)$ continue. Atunci are loc:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx + C$$

sau

$$\int u\ dv = u \cdot v - \int v\ du + C$$

deoarece $v'(x)dx = dv$ şi $u'(x)dx = du$.

Exemple:

1) $\int (2-3x)\cos x\ dx$

$$u = 2-3x \qquad\qquad dv = \cos x\ dx$$

$$du = -3\ dx \qquad\qquad v = \sin x$$

$$\int (2-3x)\cos x\ dx = (2-3x)\sin x + \int 3\sin x\ dx = (2-3x)\sin x - 3\cos x + C$$

2) $\int \ln x\ dx$

$$u = \ln x \qquad\qquad dv = dx$$

$$du = \frac{1}{x}dx \qquad\qquad v = x$$

$$\int \ln x\ dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$$

3) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx\,, \quad |x| < |a|$

Considerăm $\quad u = \sqrt{a^2 - x^2} \qquad dv = dx$

$$du = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx \qquad v = x$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{a^2 - \left(a^2 - x^2\right)}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx + C$$

$$2\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$$

4) $\int x^2 2^x\,dx$

$$u = x^2 \qquad dv = 2^x\,dx$$

$$du = 2x\ dx \qquad v = \frac{2^x}{\ln 2}$$

$$\int x^2 2^x\,dx = \frac{x^2 \cdot 2^x}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2}\int x2^x\,dx$$

$$u = x \qquad dv = 2^x dx$$

$$du = dx \qquad v = \frac{2^x}{\ln 2}$$

$$\int x^2 2^x dx = \frac{x^2 \cdot 2^x}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2}\left(\frac{x \cdot 2^x}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}\int 2^x dx\right)$$

$$= \frac{x^2 \cdot 2^x}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2}\left(\frac{x \cdot 2^x}{\ln 2} - \frac{2^x}{(\ln 2)^2}\right) + C$$

5) $\int e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$

Considerăm $u = e^{\alpha x}$ $\qquad dv = \cos \beta x \, dx$

$$du = \alpha e^{\alpha x} dx \qquad v = \frac{\sin \beta x}{\beta}$$

$$\int e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx = \frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \sin \beta x - \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x} \sin \beta x dx$$

$$u = e^{\alpha x} \qquad dv = \sin \beta x \, dx$$

$$du = \alpha e^{\alpha x} dx \qquad v = -\frac{\cos \beta x}{\beta}$$

$$\int e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx = \frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \sin \beta x - \frac{\alpha}{\beta}\left(-\frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \cos \beta x + \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x} \cos \beta x dx\right)$$

$$\left(1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)\int e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx = \frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \sin \beta x + \frac{\alpha}{\beta^2} e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$\int e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2}\left(\alpha \cos \beta x + \beta \sin \beta x\right) + C$$