Cap.I Noțiuni introductive

1.1 Mulțimi. Operații cu mulțimi

O *mulțime* este o colecție de obiecte distincte pe care le numim *elemente*. Exemple: mulțimea literelor scrise pe această pagină, mulțimea rădăcinilor unei ecuații, mulțimea numerelor pare.

Modul convențional de a scrie o mulțime este să-i listăm toate elementele între două acolade:

$$A = \{a\} \qquad B = \{a,b\} \qquad C = \{a,b,c\} \tag{1}$$

Mulțimea numerelor naturale $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$
Mulțimea pătratelor numerelor naturale $\{0,1,4,9,\ldots\}$
Mulțimea numerelor întregi $\mathbb{Z} = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$

Elementele unei mulțimi trebuie să fie distincte, iar ordinea elementelor nu contează.

$$\{a,b\} = \{b,a\}$$

Scrierea $x \in A$, înseamnă că *x* este un element al mulțimii *A*. De exemplu, $2 \in \mathbb{N}$. Scrierea $y \notin A$, înseamnă că *y* nu este un element din mulțimea *A*.

Compararea mulțimilor

Scrierea $A \subset B$ înseamnă că mulțimea *A* este inclusă în mulțimea *B* sau *A* este *submulțime* pentru *B*, ceea ce implică că fiecare $x \in A$ este şi element în a doua mulțime, $x \in B$. De exemplu $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Notăm cu ϕ mulțimea vidă. Pentru orice mulțime *A* avem $\phi \subset A$.

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ şi } B \subset A \tag{2}$$

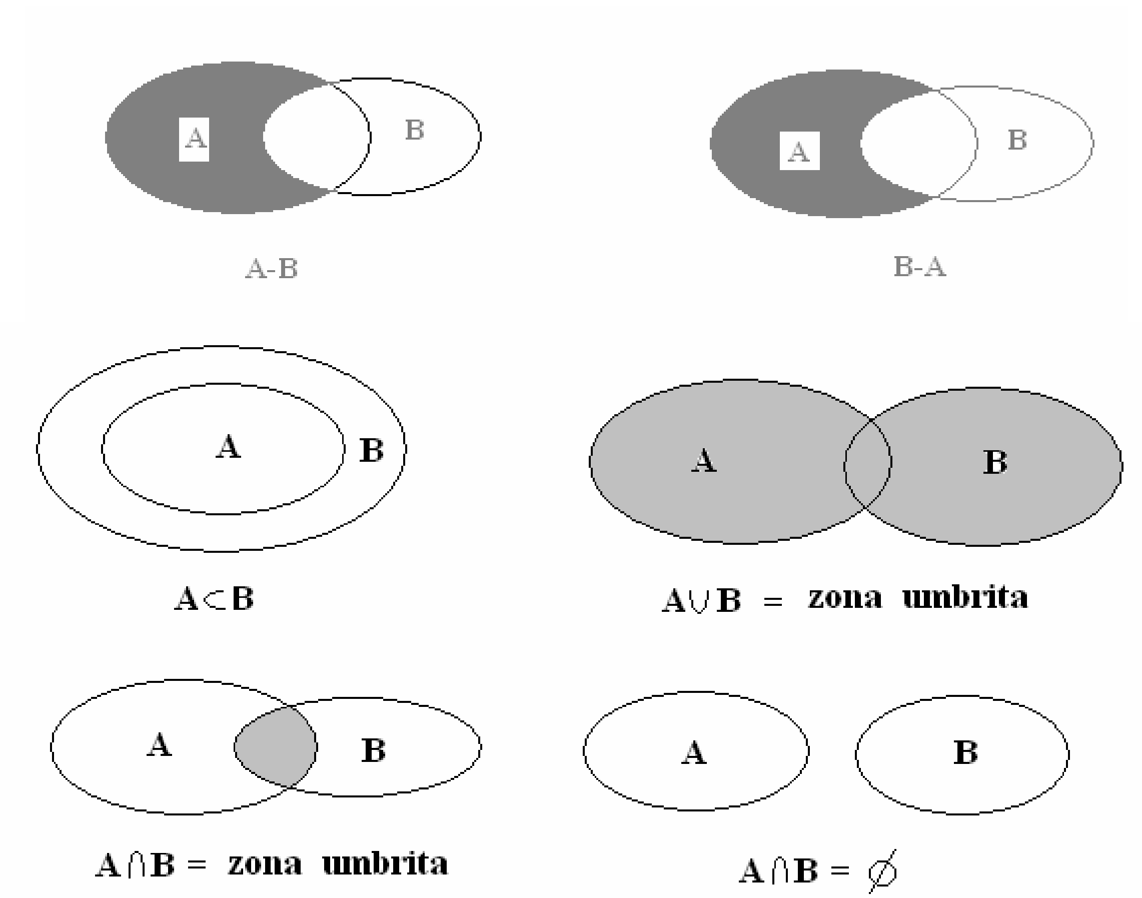
Operații cu mulțimi

Fie *A* şi *B* două mulțimi.

Reuniunea lui A cu B, notată $A \cup B$, este mulțimea tuturor elementelor $x \in A$ sau $x \in B$.
Intersecția lui A cu B, notată $A \cap B$, este mulțimea tuturor elementelor $x \in A$ şi simultan $x \in B$.
Diferența lui A cu B, notată $A - B$, este mulțimea tuturor elementelor $x \in A$ şi $x \notin B$.

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ sau } x \in B\}$$
$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ si } x \in B\}$$
$$A - B = \{x | x \in A \text{ si } x \notin B\}$$

Dacă $A \cap B = \phi$, A şi B se spune că sunt mulțimi *disjuncte*.



Definiția reuniunii şi intersecției de două mulțimi poate fi extinsă la un număr finit sau chiar infinit de mulțimi. Astfel,

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup \ldots \cup A_n \qquad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \quad (3)$$

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap \ldots \cap A_n \qquad \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \quad (4)$$

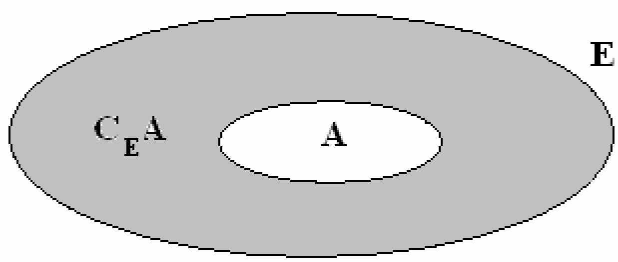
Exemple:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[0,1-\frac{1}{n}\right]=[0,1)$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[0,\frac{1}{n}\right]=\{0\}$$

Fie $A\subset E$. Numim *complementara* mulțimii *A* în raport cu *E*, mulțimea notată $C_E A$, unde

$$C_E A=E-A=\left\{x\,\middle|\,x\in E \text{ si } x\notin A\right\} \qquad (5)$$

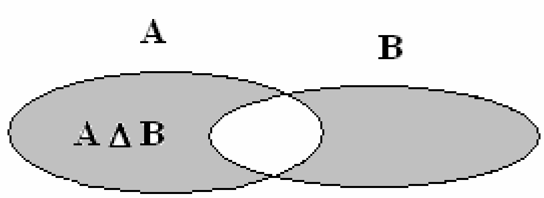


Proprietăți:
1. $A\cap C_E A=\varnothing$
2. $A\cup C_E A=E$
3. $C_E\left(C_E A\right)=A$
4. $C_E\left(A\cup B\right)=C_E A\cap C_E B$
5. $C_E\left(A\cap B\right)=C_E A\cup C_E B$

Ultimele două egalități poartă numele de *relațiile lui De Morgan*.

Diferența simetrică a două mulțimi *A* şi *B* este mulțimea elementelor lor necomune.

$$A\Delta B=\left(A-B\right)\cup\left(B-A\right) \qquad (6)$$



Proprietăți:
1. $A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$
2. $A\Delta A=\varnothing$

Produsul cartezian a două mulțimi *A* şi *B* este mulțimea de perechi (a,b), $a\in A$ şi $b\in B$.

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A \text{ si } b\in B\} \qquad (7)$$

Exemplu: $A=\{0,2,4,6,8\}$ şi $B=\{1,2,3,4\}$

$$\begin{aligned} A\cup B&=\{0,1,2,3,4,6,8\}\\ A\cap B&=\{2,4\}\\ A-B&=\{0,6,8\}\\ B-A&=\{1,3\}\\ A\Delta B&=\{0,1,3,6,8\} \end{aligned}$$

$$A\times B=\begin{Bmatrix}(0,1),(0,2),(0,3),(0,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),\\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(8,1),(8,2),(8,3),(8,4)\end{Bmatrix}$$

Proprietățile operațiilor cu mulțimi:

1. Reuniunea, intersecția şi diferența simetrică sunt comutative:

$$A\cup B=B\cup A, \quad A\cap B=B\cap A, \quad A\Delta B=B\Delta A$$

Diferența şi produsul cartezian nu sunt comutative.

2. Reuniunea, intersecția şi diferența simetrică sunt asociative:

$$\begin{gathered} (A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)\\ (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)\\ (A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C) \end{gathered} \qquad (8)$$

3. Intersecția este distributivă față de reuniune:

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C) \qquad (9)$$

4. Reuniunea este distributivă faţă de intersecţie:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \qquad (10)$$

O mulţime este *finită* dacă are un număr finit de elemente. Mulţimea locuitorilor oraşului Timişoara este finită. *Cardinalul* unei mulţimi finite reprezintă numărul elementelor din acea mulţime. Vom nota cu $cardA$, cardinalul mulţimii A.

Proprietăţi:

1. $card(A \cup B) = cardA + cardB - card(A \cap B) \qquad (11)$

2. $card(A \cup B \cup C) = cardA + cardB + cardC - card(A \cap B) - card(B \cap C) - card(A \cap C) +$
$+card(A \cap B \cap C) \qquad (12)$

3. $card(A - B) = cardA - card(A \cap B) \qquad (13)$

4. $card(A \times B) = cardA \cdot cardB \qquad (14)$

Exemplu:

In anul întâi sunt în total 25 de studenţi. 14 dintre ei s-au înscris la cursul de matematică, 12 studenţi sau înscris la cursul de chimie, iar 13 au participat la cursul de fizică generală. 6 dintre ei s-au înscris şi la chimie şi la fizica, 5 s-au înscris şi la chimie şi la matematică, 7 s-au înscris şi la fizică şi la matematică, iar 2 studenţi s-au înscris la toate cele trei cursuri. Câţi studenţi nu s-au înscris la nici un curs?

Reprezentăm prin diagrame mulţimea M a studenţilor care s-au înscris la cursul de matematică, respectiv mulţimile C şi F ale studenţilor care s-au înscris la chimie, respectiv fizică. Din enunţ rezultă că:

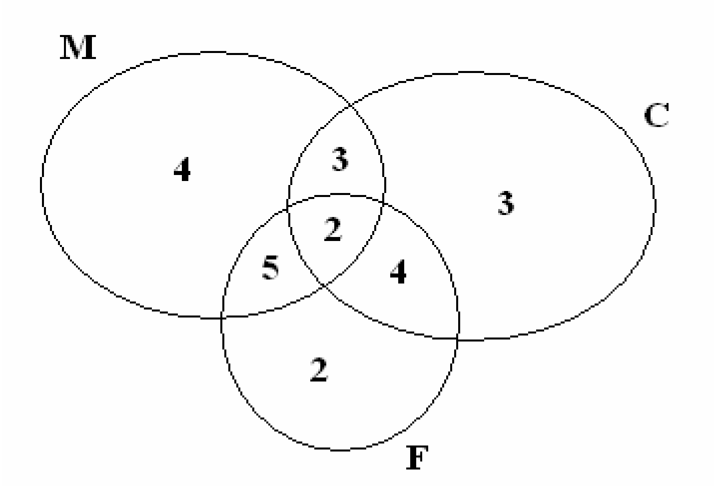
$cardM = 14 \qquad cardC = 12 \qquad cardF = 13 \qquad card(M \cap C \cap F) = 2$

$card(F \cap C) = 6 \qquad card(C \cap M) = 5 \qquad card(F \cap M) = 7$

$$card\left(M \cup C \cup F\right) = cardM + cardC + cardF - card\left(M \cap C\right) - card\left(C \cap F\right) - card\left(M \cap F\right) +$$
$$+ card\left(M \cap C \cap F\right)$$

$$card\left(M \cup C \cup F\right) = 14 + 12 + 13 - 5 - 6 - 7 + 2 = 23$$

În concluzie, doi studenți nu s-au înscris la nici unul din cele trei cursuri.



Numărul submulțimilor unei mulțimi cu *n* elemente este 2^n.

Exemplu: Submulțimile mulțimii cu trei elemente $\{a,b,c\}$ sunt:

$$\varnothing,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a,b\},\ \{b,c\},\ \{a,c\},\ \{a,b,c\}$$

O mulțime este *infinită* dacă nu este finită. Mulțimea numerelor naturale $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$ este infinită.

Fie A şi B două mulțimi. Spunem că există o *corespondență unu-la-unu* între A şi B dacă fiecare element din A este asociat cu un element din B astfel încât:

(i) elemente distincte din A sunt asociate cu elemente distincte din B
(ii) fiecare element din B este pus în corespondență cu un element din A.

In această situație spunem că mulțimile A şi B sunt *echivalente* şi scriem $A \approx B$.

O mulțime infinită se spune că este *numărabilă* dacă poate fi pusă în corespondență unu-la-unu cu mulțimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale. Orice mulțime infinită conține o submulțime numărabilă.

Mulțimea numerelor raționale este numărabilă, iar mulțimea numerelor reale nu are această proprietate.

1.2 *Numere reale*

Numerele $\ldots,-2,-1,0,+1,+2,\ldots$ se numesc numere întregi.

Numerele raționale se scriu ca o fracție de forma $\pm\frac{p}{q}$, unde *p* şi *q* sunt numere întregi pozitive $p \geq 0$ şi $q > 0$. Toate numerele raționale pot fi scrise, în urma unui proces de împărțire, în formă de fracție zecimală:

$$\frac{p}{q} = \alpha_0.\alpha_1\alpha_2\ldots \tag{15}$$

unde α_0 este un întreg pozitiv şi $\alpha_k\,(k = 1,2,\ldots)$ sunt cifre zecimale. Fracția zecimală din dreapta relației (15) se numeşte *reprezentare zecimală* a numărului rațional p/q. Reprezentarea zecimală poate fi pusă sub forma unei serii infinite:

$$\alpha_0 + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{10^i}$$

Reprezentarea zecimală poate fi una *finită*

$$\frac{p}{q} = \alpha_0.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m = \alpha_0.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m 00\ldots \qquad (\alpha_m > 0) \tag{16}$$

sau una *infinită periodică*

$$\frac{p}{q} = \alpha_0.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\beta_1\ldots\beta_k\beta_1\ldots\beta_k\ldots = \alpha_0.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\left(\beta_1\ldots\beta_k\right) \tag{17}$$

Incepând cu poziția $m+1$, un bloc finit de cifre $\beta_1\ldots\beta_k$ se repetă indefinit şi nu toate cifrele β_j sunt nule.

Prima formă cea finită, poate fi redusă la cea de-a doua impunând

$$\frac{p}{q} = \alpha_0.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m-1}(\alpha_m - 1)99\ldots \tag{18}$$

De exemplu, $0.5 = 0.4(9)$

$3.5 = 3.4(9)$

$1.0 = 0.(9)$

Pentru a demonstra ultima egalitate, se foloseşte seria numită progresie geometrică:

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n = \frac{aq}{1-q}, \quad |q|<1$$

$$0.(9)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10^n} \quad \text{deci } a=9 \text{ şi } q=\frac{1}{10} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10^n}=\frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}}=1$$

Se vede că această serie infinită are suma egală cu 1.

Pe lângă fracțiile zecimale periodice există şi fracții zecimale neperiodice, de exemplu:

$0.1010010001\ldots$, $0.121122111222\ldots$, $\sqrt{2}=1.41\ldots$ şi numărul π.

Definiție: Prin număr *irațional* înțelegem o fracție zecimală infinită neperiodică arbitrară

$$a=\alpha_0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots \tag{19}$$

unde α_0 este un întreg pozitiv şi $\alpha_k\,(k=1,2,\ldots)$ sunt cifre zecimale.

Reuniunea numerelor raționale şi iraționale formează mulțimea *numerelor reale*.

Prin convenție, mulțimea numerelor naturale, întregi, raționale şi reale se notează cu $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ şi $\mathbb{R}$ respectiv.

Proprietățile numerelor reale

Mulțimea numerelor reale este o mulțime ordonată de relația <, care are următoarele proprietăți.

I. *Proprietăți de ordine*:

I.1. Pentru orice pereche de numere reale *a* şi *b* are loc una şi numai una din relațiile:

$$a=b, \quad a<b \quad \text{şi} \quad a>b$$

I.2. Dacă $a<b$ şi $b<c$, atunci $a<c$ (tranzitivitatea relației exprimate prin simbolul $<$)

I.3. Dacă $a<b$, atunci există un număr *c* astfel încât $a<c<b$.

Pe mulțimea numerelor reale, sunt definite operațiile de adunare şi înmulțire astfel încât fiecărei perechi de numere reale li se asociază în mod unic numerele reale numite sumă şi produs.

II. *Proprietățile operațiilor de adunare şi scădere:*

II.1. $a+b=b+a$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$ comutativitate
II.2. $(a+b)+c=a+(b+c)$, $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$ asociativitate
II.3. $a+0=a$, $\forall a \in \mathbb{R}$
II.4. $a+(-a)=0$, $\forall a \in \mathbb{R}$
II.5. $a<b \Rightarrow a+c<b+c$ pentru oricare c real.

III. *Proprietățile operațiilor de înmulțire şi împărțire:*

III.1. $ab=ba$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$ comutativitate
III.2. $(ab)c=a(bc)$, $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$ asociativitate
III.3. $a \cdot 1=a$, $\forall a \in \mathbb{R}$
III.4. $a \cdot \left(\frac{1}{a}\right)=1$, $a \neq 0$
III.5. $(a+b)c=ac+bc$, $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$ distributivitate
III.6. $a<b$, $c>0 \Rightarrow ac<bc$.

Valori absolute pentru numere reale

Fie a un număr real. Valoarea absolută sau modulul lui a este egal cu a dacă a este pozitiv şi este egal cu $-a$ dacă a este negativ. Valoarea absolută a lui zero este zero. Notăm valoarea absolută a lui a cu $|a|$ şi scriem

$$|a|=\begin{cases} a, a \geq 0 \\ -a, a<0 \end{cases} \tag{20}$$

Inegalitatea $|a|<\varepsilon$ cu $\varepsilon>0$, este echivalentă cu

$$-\varepsilon<a<+\varepsilon \tag{21}$$

Inegalitatea $|a-b|<\varepsilon$ este echivalentă cu

$$b-\varepsilon<a<b+\varepsilon \tag{22}$$

Proprietăți:

1. $|a| \geq 0$ (23)

2. $|a| = |-a|$ (24)

3. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ (25)

4. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0$ (26)

5. $|a+b| \leq |a| + |b|$ (27)

Intr-adevăr,

$$-|a| \leq a \leq |a|$$
$$-|b| \leq b \leq |b|$$
$$-(|a|+|b|) \leq a+b \leq |a|+|b|$$

6. $||a|-|b|| \leq |a-b|$ (28)

Intr-adevăr,

$$|a| = |(a-b)+b| \leq |a-b| + |b|$$
$$|a| - |b| \leq |a-b|$$
$$|b| = |(b-a)+a| \leq |b-a| + |a| = |a-b| + |a|$$
$$-|a-b| \leq |a| - |b|$$
$$-|a-b| \leq |a| - |b| \leq |a-b|$$
$$||a|-|b|| \leq |a-b|$$

Dreapta reală

Numerele reale pot fi reprezentate şi cu ajutorul *dreptei reale*. Considerăm o dreaptă, pentru care fixăm direcția, originea *O* şi distanța unitate *e*.

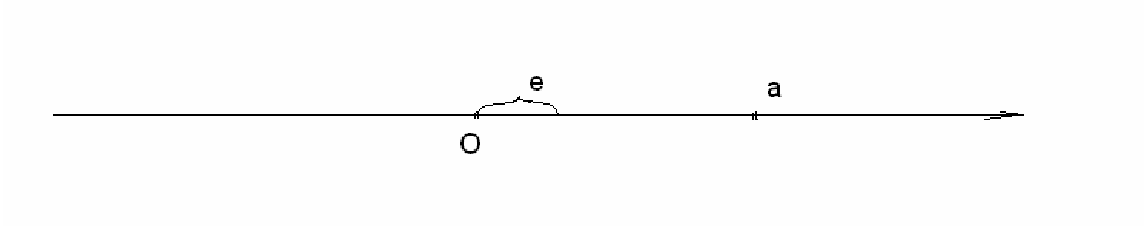


Figura 1.1 Dreapta reală

Fiecărui număr real $\pm a$ $(a > 0)$ i se asociază un punct pe dreaptă aflat la distanța a de origine, în dreapta sau în stânga lui O, funcție de semnul $+$ sau semnul – din fața lui a. Desigur, numărului $a = 0$ i se asociază punctul arbitrar origine.

Definiție: Dreapta a cărui puncte sunt în corespondență unu-la-unu cu elementele mulțimii numerelor reale se numeşte *dreapă reală*.

Fie a şi b două numere reale (puncte) care satisfac inegalitatea $a < b$.
Cu ajutorul lor putem defini următoarele mulțimi numite *intervale*:

$[a,b]$ toate numerele reale x astfel încât $a \le x \le b$ şi se numeşte interval închis
(a,b) toate numerele reale x astfel încât $a < x < b$ şi se numeşte interval deschis
$[a,b)$ toate numerele x reale astfel încât $a \le x < b$ şi se numeşte interval semideschis
$(a,b]$ toate numerele x reale astfel încât $a < x \le b$ şi se numeşte interval semideschis

şi intervalele infinite:

$(a,+\infty)$ mulțimea numerelor reale x cu $x > a$
$[a,+\infty)$ mulțimea numerelor reale x cu $x \ge a$
$(-\infty,b)$ mulțimea numerelor reale x cu $x < b$
$(-\infty,b]$ mulțimea numerelor reale x cu $x \le b$
$(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$

Exerciții:

$|x-1| \le 0.01$ $\qquad$ $|x+2| \ge 3$ $\qquad$ $\frac{1}{2} \le |x| \le 4$ $\qquad$ $|x-1| + |x| > 1$

Vecinătăți

Fie x_0 un punct pe dreapta reală şi $\delta > 0$ un număr real.

Un interval care-l conține pe x_0 se numeşte *vecinătate* pentru x_0. Intervalul $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ care este simetric relativ la x_0 se numeşte $\delta-$vecinătate pentru x_0.

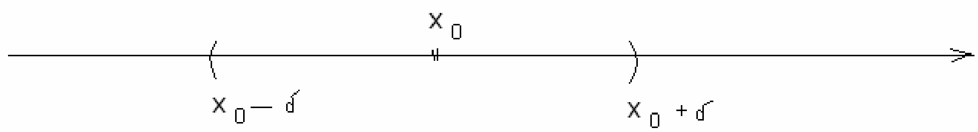


Figura 1.2 δ-vecinătate

$\delta -$vecinătatea lui x_0 este mulțimea numerelor reale x care satisfac inegalitatea $|x - x_0| < \delta$ sau echivalent $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$.

Mulțimi mărginite şi nemărginite

Fie E o mulțime de numere reale. Mulțimea E se numeşte:

a) *mărginită superior* dacă există un număr b astfel încât $x \le b, \forall x \in E$
b) *mărginită inferior* dacă există un număr a astfel încât $a \le x, \forall x \in E$
c) *mărginită* dacă E este mărginită superior şi inferior, adică dacă există a şi b astfel încât $a \le x \le b, \forall x \in E$. Mai mult, mulțimea E este mărginită dacă E este conținută în intervalul închis $[a, b]$.

Exemple:

$E = (-\infty, 1]$ este mărginită superior
$\mathbb{N}$ mulțimea numerelor naturale este mărginită inferior

O mulțime care nu este mărginită superior (inferior) se numeşte *nemărginită superior* (*inferior*) .

Exemplu: $\mathbb{N}$ este nemărginită superior.

Supremum şi Infimum

Fie E o mulțime de numere reale mărginită superior, adică există un număr b astfel încât $x \le b, \forall x \in E$. Numărul b se numeşte *majorant* pentru E. Orice număr mai mare decât b este şi el majorant pentru E.

Definiție:
Numărul *M* se numeşte *supremum* pentru *E* dacă au loc:

(i) $\forall x \in E, x \leq M$

(ii) pentru orice $\varepsilon > 0$, oricât de mic, există un număr $x^* \in E$ astfel încât $M - \varepsilon < x^* \leq M$.

Cu alte cuvinte, supremum pentru mulțimea *E* este cel mai mic majorant al mulțimii *E*. Notăm $M = \sup E$. Dacă *E* este nemărginită superior, $\sup E = +\infty$.

Fie *E* o mulțime de numere reale mărginită inferior, adică există un număr *a* astfel încât $a \leq x, \forall x \in E$. Numărul *a* se numeşte *minorant* pentru *E*. Orice număr mai mic decât *a* este şi el minorant pentru *E*.

Definiție:
Numărul *m* se numeşte *infimum* pentru *E* dacă au loc:

(i) $\forall x \in E, x \geq m$

(ii) pentru orice $\varepsilon > 0$, oricât de mic, există un număr $x^* \in E$ astfel încât $m \leq x^* < m + \varepsilon$.

Cu alte cuvinte, infimum pentru mulțimea *E* este cel mai mare minorant al mulțimii *E*. Notăm $m = \inf E$. Dacă *E* este nemărginită inferior, $\inf E = -\infty$.

Exemple: $E = [a,b] \Rightarrow \quad \inf E = a \quad \sup E = b$

$E = (a,b) \Rightarrow \quad \inf E = a \quad \sup E = b$

Observație: Supremum şi infimum aparțin mulțimii în primul exemplu şi nu aparțin mulțimii în al doilea exemplu.

Exemplu:

$$E = \left\{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\} \qquad \inf E = 0 \qquad \sup E = 1$$

Teoremă: Orice mulțime nevidă de numere reale care este mărginită superior are supremum şi orice mulțime nevidă de numere reale care este mărginită inferior are infimum.

1.3 Şiruri de numere reale. Limite de şiruri

Fie o lege de corespondenţă care asociază la fiecare număr natural $n = 1,2,\dots$ un număr real a_n. In acest mod am definit un şir de numere reale $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ sau pe scurt un şir $\{a_n\}$. Numerele $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ se numesc termenii şirului.

Exemple:

(i) $\{n\} = 1,2,3,\dots,n,\dots$

(ii) $\left\{\frac{1}{n}\right\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$

(iii) $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\} = -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots, \frac{(-1)^n}{n}, \dots$

(iv) $\left\{\frac{n-1}{n}\right\} = 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots$ (29)

Definiţie: Un număr A se numeşte limita şirului $\{a_n\}$ dacă, pentru orice număr $\varepsilon > 0$, există un număr natural N (dependent de ε) astfel încât inegalitatea

$$|a_n - A| < \varepsilon \tag{30}$$

are loc pentru $\forall n > N$.

Notaţie: $A = \lim_{n\to\infty} a_n$ sau $a_n \underset{n\to\infty}{\to} A$ şi spunem că şirul $\{a_n\}$ converge la A.

Folosind simboluri logice putem rescrie definiţia limitei astfel:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon \tag{31}$$

Noțiunea de limită este uşor de interpretat dacă aşezăm termenii şirului $\{a_n\}$ pe dreapta reală:

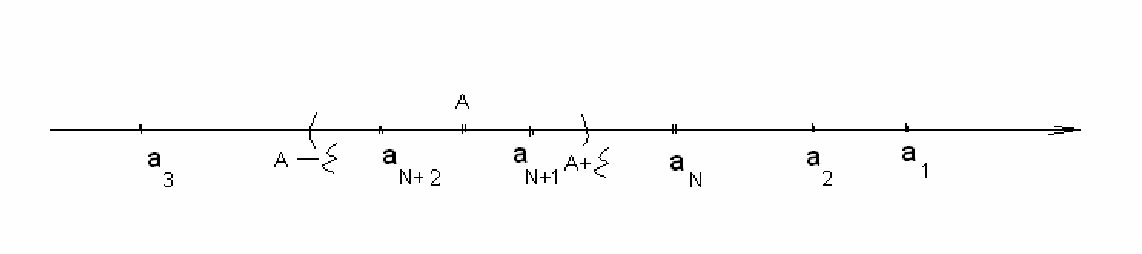


Figura 1.3 Interpretare geometrică pentru convergența şirului

Inegalitatea $|a_n - A| < \varepsilon$ este echivalentă cu inegalitățile $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$, adică termenii şirului se află în $\varepsilon -$vecinătatea lui *A*. Cu alte cuvinte, *A* este limita şirului $\{a_n\}$ dacă, pentru orice $\varepsilon -$vecinătate a lui A, există un număr natural *N* astfel încât toți termenii şirului a_n cu $n > N$ sunt conținuți în această orice $\varepsilon -$vecinătate a lui A, adică în intervalul deschis $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$. De observat că numărul finit de termeni $a_1, a_2, \ldots, a_N$ se pot afla în afara intervalului $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$, aceştia necontând la stabilirea convergenței.

Şirul care are toți termenii egali cu numărul *A* se numeşte *şir staționar* şi are limita *A*.

Un şir se numeşte **convergent** dacă are limită finită şi este **divergent** în caz contrar.

Exemplu:

Fie şirul $\{a_n\}$ cu termenul $a_n = \dfrac{n+1}{n}$. Desigur, pentru valori mari ale lui *n* fracția se apropie de numărul unu.

$$\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \tag{32}$$

Atunci putem presupune că

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \tag{33}$$

Pentru a demonstra această limită, considerăm un $\varepsilon > 0$ arbitrar şi arătăm că $\exists N$ astfel încât $\forall n > N$ să avem

$$|a_n - 1| = \left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \tag{34}$$

Din inegalitatea $\frac{1}{n} < \varepsilon$ obținem $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Atunci, pentru orice număr natural N care excede pe $\frac{1}{\varepsilon}$ şi pentru toți $n > N$ are loc $\frac{1}{n} < \varepsilon$, adică relatia (34) este adevărată. Conform definiției limitei, avem $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

Observație:
In general numărul *N* este dependent de ε, adică $N = N(\varepsilon)$. In exemplul precedent, dacă $\varepsilon = 0.1$, putem considera $N = 10$ sau cu orice număr mai mare decît 10. Dacă $\varepsilon = 0.01$, atunci $N = 100$ sau cu un număr mai mare decât 100.
Numărul *N* din definiția limitei nu este definit în mod unic de către ε, în sensul că dacă inegalitatea din definiție are loc pentru $n > N_1$ atunci ea are loc şi pentru toți $n > N_2$ cu $N_2 > N_1$. In demonstrarea convergenței unui şir este suficient să alegem un număr N astfel încât $|a_n - A| < \varepsilon$ pentru orice $n > N$. Nu este necesar să-l determinăm pe cel mai mic *N* care satisface această condiție.

Exerciții:

- □ Să se arate că şirul cu termenul general $a_n = \frac{n+1}{5n+2}$ are limita $\frac{1}{5}$.
- □ Să se arate că şirul cu termenul general $a_n = \frac{n^2}{2n^2+2}$ are limita $\frac{1}{2}$. Să se determine rangurile de la care începând toți termenii şirului diferă de $\frac{1}{2}$ cu mai puțin de $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}$.
- □ Să se arate că $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{n^3+1} = 0$
- □ Să se arate că $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + (-2)^n}{3^n} = 0$

Teorema 1 (*Criteriul de convergență Cauchy*)
Pentru ca şirul $\{a_n\}$ să fie convergent este necesar şi suficient ca pentru orice $\varepsilon > 0$ să existe numărul natural *N* astfel încât $\forall n > N$, $\forall m > N$

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \qquad (35)$$

Un şir care satisface enunțul acestei teoreme se numeşte *şir Cauchy*.

Altă formulare pentru criteriul Cauchy:

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon)$ a.i. $\forall n > N,\ \forall p \in \mathbb{N}$ avem $\left|a_{n+p} - a_n\right| < \varepsilon$

Exerciții:

□ Să se demonstreze convergența pentru șirurile:

$$a_n = \frac{\cos x}{3} + \frac{\cos 2x}{3^2} + \ldots + \frac{\cos nx}{3^n}$$

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$$

□ Să se arate că șirul următor este divergent:

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

Teorema 2 (*Unicitatea limitei*)

Un șir $\{a_n\}$ nu poate avea două limite distincte.

Demonstrație: Fie A o limită a șirului $\{a_n\}$ și fie $B \neq A$. Pentru a demonstra că B nu poate fi limită pentru $\{a_n\}$, considerăm un ε atât de mic încât $\varepsilon -$vecinătatea lui A și $\varepsilon -$vecinătatea lui B să nu se intersecteze. De exemplu, putem considera $\varepsilon = \left|B - A\right|/3$.

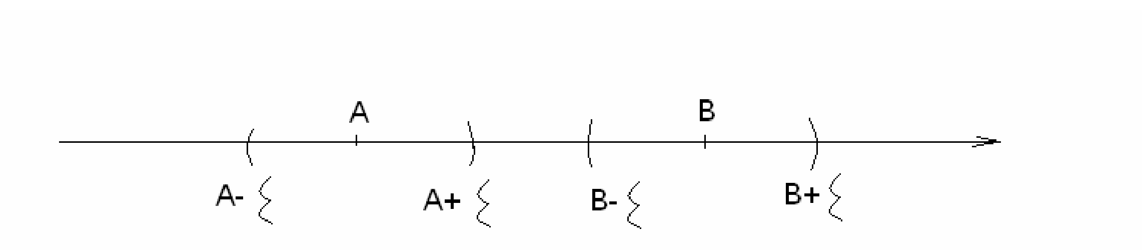


Figura 1.4 unicitatea limitei

Deoarece $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, doar un număr finit de termeni a_n se pot afla în afara intervalului deschis $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$. Atunci, intervalul deschis $(B - \varepsilon, B + \varepsilon)$ conține cel mult un număr finit de termeni a_n și deci B nu poate să fie limită pentru șirul $\{a_n\}$.

Şiruri mărginite

Un şir $\{a_n\}$ se numeşte:

a) *mărginit superior* dacă există un număr *M* astfel încât $a_n \le M$, $\forall n$.

b) *mărginit inferior* dacă există un număr *m* astfel încât $a_n \ge m$, $\forall n$.

c) *mărginit* dacă $\{a_n\}$ este mărginit superior şi inferior, adică dacă există numerele *m* şi *M* astfel încât $m \le a_n \le M$ pentru $\forall n$.

Observaţie: Toţi termenii unui şir mărginit sunt conţinuţi în intervalul închis $[m, M]$ de pe dreapta reală.

Exemple: Şirul $\{n\} = 1,2,3,\ldots,n,\ldots$ este mărginit inferior

Şirul $\{a_n\}$ cu $a_n = \dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n}$ este mărginit deoarece $1 \le a_n \le 2$, $\forall n$.

Altă definiţie a mărginirii: un şir $\{a_n\}$este *mărginit* dacă există un număr $K > 0$ astfel încât

$$|a_n| \le K, \quad \forall n \tag{36}$$

Folosind simboluri logice putem rescrie această definiţie:

$$\{a_n\}\text{mărginit} \Leftrightarrow \exists K > 0,\ \forall n\ \ |a_n| \le K$$
$$\{a_n\}\text{nemărginit} \Leftrightarrow \forall K > 0,\ \exists n\ \ |a_n| > K$$

Exemplu:
Arătaţi că şirul $\{2^n\}$ este nemărginit.

Intr-adevăr, pentru $\forall K > 0$, $\exists n$ astfel încât $2^n > K$, adică $n > \log_2 K$. Atunci, şirul $\{2^n\}$ este nemărginit.

Definiţie: Un şir se numeşte *divergent* la ∞ şi scriem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ dacă, pentru orice $M > 0$, oricât de mare, există un număr $N = N(M)$ astfel încât:

$$|a_n| > M\ ,\quad \forall n > N$$

Un şir $\{a_n\}$ astfel încât $\forall M > 0$, $\exists N \quad \forall n > N$, $a_n > M \quad (a_n < -M)$ este divergent la $+\infty$ (sau la $-\infty$). In aceste situații scriem

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \qquad (\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty)$$

Teorema 3: Orice şir $\{a_n\}$ convergent este mărginit, adică există numerele *m* şi *M* astfel încât

$$m \le a_n \le M\ , \qquad\qquad \forall n$$

Demonstrație: Fie $A = \lim_{n\to\infty} a_n$ şi fie $\varepsilon > 0$ un număr arbitrar. Atunci există *N* astfel încât intervalul deschis $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ să conțină toți termenii a_n cu $n > N$ şi $a_1, a_2, \ldots, a_N$ sunt singurii termeni ai şirului ce se pot afla în exteriorul intervalului :

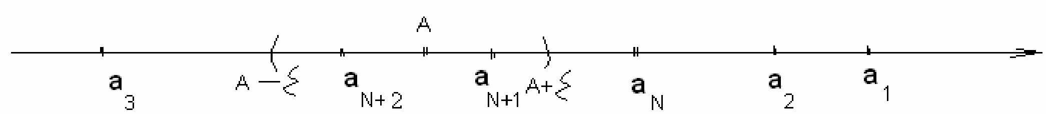


Figura 1.5 Dispunerea termenilor şirului convergent

Astfel, în exteriorul intervalului există doar un număr finit de termeni şi alegem $\tilde{a}$ ca fiind egal cu cel mai mic dintre aceştia, iar $\hat{a}$ cu cel mai mare dintre aceştia. Considerăm:

$$m = \min\{\tilde{a}, A-\varepsilon\}$$
$$M = \max\{\hat{a}, A+\varepsilon\}$$

Atunci, intervalul închis $[m, M]$ conține termenii $a_1, a_2, \ldots, a_N$ şi intervalul deschis $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$. Deoarece toți termenii şirului a_n cu $n > N$ sunt în intervalul $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$, atunci intervalul închis $[m, M]$ conține toți termenii şirului $\{a_n\}$. Rezultă că şirul este mărginit.

Observație: Teorema 3 spune că mărginirea este o condiție necesară pentru convergență, însă aceasta nu este şi suficientă.

Exemplu: Şirul

$$1,0,1,0,1,\ldots \qquad (37)$$

este mărginit dar nu este convergent.

Pentru a arăta că şirul dat este divergent presupunem contrariul, adică şirul (37) are limita A. Atunci pentru orice ε, de exemplu $\varepsilon = 1/4$, există N astfel încât

$$|a_n - A| < \frac{1}{4}, \qquad \forall n > N$$

Adică trebuie să aibă loc

$$|0 - A| = |A| < \frac{1}{4} \qquad \text{şi} \qquad |1 - A| < \frac{1}{4} \qquad \forall n > N$$

$$\Rightarrow \qquad 1 = |1 - A + A| \leq |1 - A| + |A| < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \qquad \text{absurd}$$

Presupunerea noastră de convergență este falsă. Şirul este divergent.

Operații cu şiruri convergente

Teorema 4: Fie $\{a_n\}$ şi $\{b_n\}$ două şiruri convergente la A şi B respectiv, adică

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = B$$

Atunci următoarele limite există:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = A + B \qquad (38)$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = A - B$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = A \cdot B$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{A}{B} \qquad \text{dacă } b_n \neq 0 \text{ pentru orice } n \text{ şi } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0 .$$

Demonstrăm doar prima operație cu limite de şiruri.

Demonstrație: Fie $\varepsilon > 0$ un număr arbitrar. Deoarece $\lim_{n\to\infty} a_n = A$,

$$\exists N_1 \ \text{ astfel încât } |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n > N_1 \qquad (39)$$

Similar, deoarece $\lim_{n\to\infty} b_n = B$

$$\exists N_2 \ \text{ astfel încât } |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n > N_2 \qquad (40)$$

Considerăm $N = \max\{N_1, N_2\}$. Atunci pentru $\forall n > N$ are loc:

$$\left|(a_n + b_n) - (A + B)\right| = \left|(a_n - A) + (b_n - B)\right| \le |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Astfel,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \ \text{a.î.} \ \forall n > N \ \Rightarrow \left|(a_n + b_n) - (A + B)\right| < \varepsilon$$

Cu definiția limitei, rezultă că $A + B$ este limita şirului $\{a_n + b_n\}$.

Regula cleştelui: Fie $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ şi $\{c_n\}$ trei şiruri de numere reale care verifică inegalitățile:

$$a_n \le b_n \le c_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Dacă $\{a_n\}$ şi $\{c_n\}$ sunt convergente la acelaşi număr *A*, atunci şi $\{b_n\}$ este convergent la aceeaşi limită *A*.

Exerciții:

- □ Fie şirul:

$$a_n = \frac{\alpha_0 n^k + \alpha_1 n^{k-1} + \ldots + \alpha_k}{\beta_0 n^p + \beta_1 n^{p-1} + \ldots + \beta_p}$$

Să se arate că $\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0, & k < p \\ \dfrac{\alpha_0}{\beta_0}, & k = p \\ \infty, & k > p \end{cases}$

- □ Calculați: $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1 + 2 + 3 + \ldots + n}{n^2}$

□ Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n!}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$

□ Calculați limitele şirurilor cu termenul general:

$$a_n=\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) \qquad\qquad a_n=\frac{3^n+5^n}{3^{n+1}+5^{n+1}}$$

Şiruri monotone

Un şir $\{a_n\}$ se numeşte:

a) crescător dacă $a_1\le a_2\le\ldots\le a_n\le a_{n+1}\le\ldots$.

b) descrescător dacă $a_1\ge a_2\ge\ldots\ge a_n\ge a_{n+1}\ge\ldots$.

c) monoton dacă $\{a_n\}$ este fie crescător fie descrescător.

Un şir $\{a_n\}$ crescător este *mărginit* dacă este mărginit superior, adică dacă există un număr M a.î. $a_n\le M$, $\forall n$ şi toți termenii şirului sunt conținuți în intervalul închis $[a_1,M]$.

Un şir $\{a_n\}$ descrescător este *mărginit* dacă este mărginit inferior, adică dacă există un număr m a.î. $a_n\ge m$, $\forall n$ şi toți termenii şirului sunt conținuți în intervalul închis $[m,a_1]$.

Teorema 5: Orice şir monoton şi mărginit are limită.

Demonstrație:

Deoarece şirul $\{a_n\}$ este mărginit, termenii şirului formează o mulțime care are supremum şi infimum. Fie M supremum pentru mulțime şi arătăm că $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=M$ cu condiția ca şirul să fie crescător.

Din definiția lui supremum pentru $\forall\varepsilon>0$ există a_N a.î.

$$M-\varepsilon<a_N\le M$$

$$0\le M-a_N<\varepsilon$$

Deoarece s-a presupus $\{a_n\}$ crescător avem

$$0\le M-a_n\le M-a_N<\varepsilon,\quad \forall n>N$$

$$0 \le M - a_n < \varepsilon, \qquad \forall n > N$$

$$\left| a_n - M \right| < \varepsilon, \qquad \forall n > N$$

Ceea ce stabileşte că *M* este limita şirului $\{a_n\}$.
In mod asemănător se poate arăta că $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = m$ cu condiţia ca $\{a_n\}$ să fie descrescător şi mărginit şi *m* să fie infimum pentru mulţimea termenilor.

Observaţie: Pentru ca un şir să fie convergent nu este necesar ca şirul să fie monoton.

Exemplu:
Şirul $\left\{ \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} \right\}$ nu este monoton dar converge la zero.

Lema Cantor

Fie şirul de intervale închise

$$\sigma_n = [a_n, b_n], \qquad n = 1, 2, \ldots$$

a.î. $\sigma_{n+1} \subset \sigma_n$, $n = 1, 2, \ldots$ şi $d_n = b_n - a_n \to 0$ pentru $n \to \infty$. Atunci există un singur punct care aparţine la toate intervalele σ_n.

Lema Cantor se referă la proprietatea numerelor reale de a umple dreapta reală fără a lăsa goluri pe aceasta.