*9.5 Fluxul unui vector printr-o suprafață deschisă-continuare*

**Observație:** Dacă vrem să calculăm fluxul vectorului

$$\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

prin suprafața $S$ definită de ecuația $z = f(x,y)$, prin proiecția pe planul $xy$, nu este necesar să determinăm vectorul unitate $\vec{n}^0$ normal la suprafață. În locul acestuia este suficient vectorul normal:

$$\vec{n} = \pm grad\left[z - f(x,y)\right] = \pm\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \vec{k}\right)$$

Formula de calcul a fluxului devine:

$$\Phi = \iint_S \left(\vec{a},\vec{n}^0\right)d\sigma = \iint_{D_{xy}} \left(\vec{a},\vec{n}^0\right)\Big|_{z=f(x,y)} \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}} \left(\vec{a},\vec{n}\right)\Big|_{z=f(x,y)} dxdy = \pm\iint_{D_{xy}} \left(-P\left(x,y,f(x,y)\right)\frac{\partial f}{\partial x} - Q\left(x,y,f(x,y)\right)\frac{\partial f}{\partial y} + R\left(x,y,f(x,y)\right)\right)dxdy$$

**Exemplu:**
Calculați fluxul vectorului $\vec{a} = xz\vec{i}$ prin fața externă a paraboloidului $z = 1 - x^2 - y^2$ mărginit de planul $z = 0$ $(z \geq 0)$.

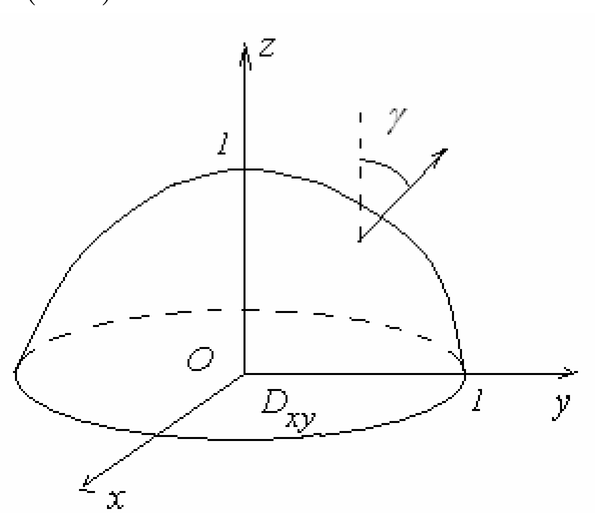


Figura 9.15

$$\vec{n} = grad\left(z - 1 + x^2 + y^2\right) = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}$$

$$\left(\vec{a},\vec{n}\right)\Big|_{z=f(x,y)} = 2x^2\left(1-x^2-y^2\right)$$

$$\Phi = \iint\limits_{D_{xy}} 2x^2\left(1-x^2-y^2\right)dxdy$$

Datorită simetriei domeniului $D_{xy}$, transformăm integrala în coordonate polare.

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{aligned} \rho &: 0\to 1 \\ \varphi &: 0\to 2\pi \end{aligned}$$

$$\Phi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 2\rho^2\cos^2\varphi\left(1-\rho^2\right)\rho d\rho = \int_0^{2\pi} 2\cos^2\varphi d\varphi \int_0^1 \rho^3\left(1-\rho^2\right)d\rho$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi\left(\frac{\rho^4}{4}-\frac{\rho^6}{6}\right)\Bigg|_0^1 = \left(\varphi\Big|_0^{2\pi} + \frac{\sin 2\varphi}{2}\Bigg|_0^{2\pi}\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right) = 2\pi\frac{1}{12} = \frac{\pi}{6}$$

- **Proiecția pe trei plane de coordonate**

Fie $S$ o suprafață proiectabilă în mod unic pe cele trei plane de coordonate. Notăm cu $D_{xy}$, $D_{xz}$ şi $D_{yz}$ proiecțiile lui $S$ pe planele $xy$, $xz$ şi $yz$ respectiv.
Ecuația $F\left(x,y,z\right)=0$ care defineşte suprafața $S$ este rezolvabilă în mod unic, în fiecare argument, adică există

$$x=f_1\left(y,z\right),\qquad y=f_2\left(x,z\right),\qquad z=f_3\left(x,y\right)$$

Fluxul vectorului

$$\vec{a}=P\left(x,y,z\right)\vec{i}+Q\left(x,y,z\right)\vec{j}+R\left(x,y,z\right)\vec{k}$$

prin suprafața $S$ a cărui vector unitate normal este

$$\vec{n}^0=\cos\alpha\ \vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}+\cos\gamma\ \vec{k}$$

poate fi scris astfel:

$$\Phi=\iint\limits_S\left(\vec{a},\vec{n}^0\right)d\sigma=\iint\limits_S\left[P\left(x,y,z\right)\cos\alpha+Q\left(x,y,z\right)\cos\beta+R\left(x,y,z\right)\cos\gamma\right]d\sigma$$

Avem în vedere că:

$$\begin{cases} d\sigma\cos\alpha = \pm dydz \\ d\sigma\cos\beta = \pm dxdz \\ d\sigma\cos\gamma = \pm dxdy \end{cases}$$

cu semnul fiecărei formule ales în corespondență cu semnul lui $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, pe suprafața *S*, fluxul devine:

$$\Phi = \pm\iint_{D_{yz}} P\left[f_1(y,z),y,z\right]dydz \pm \iint_{D_{xz}} Q\left[x,f_2(x,z),z\right]dxdz \pm \iint_{D_{xy}} R\left[x,y,f_3(x,y)\right]dxdy$$

**Exemplu:**

Calculați fluxul câmpului vectorial $\vec{a} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ prin triunghiul din planul $x+y+z=l$, $l>0$, tăiat de planele $x=0$, $y=0$, $z=0$ (unghiul γ este ascuțit).

$$\vec{n}^0 = \frac{grad\left(z+x+y-l\right)}{\left|grad\left(z+x+y-l\right)\right|} = \frac{\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{3}}$$

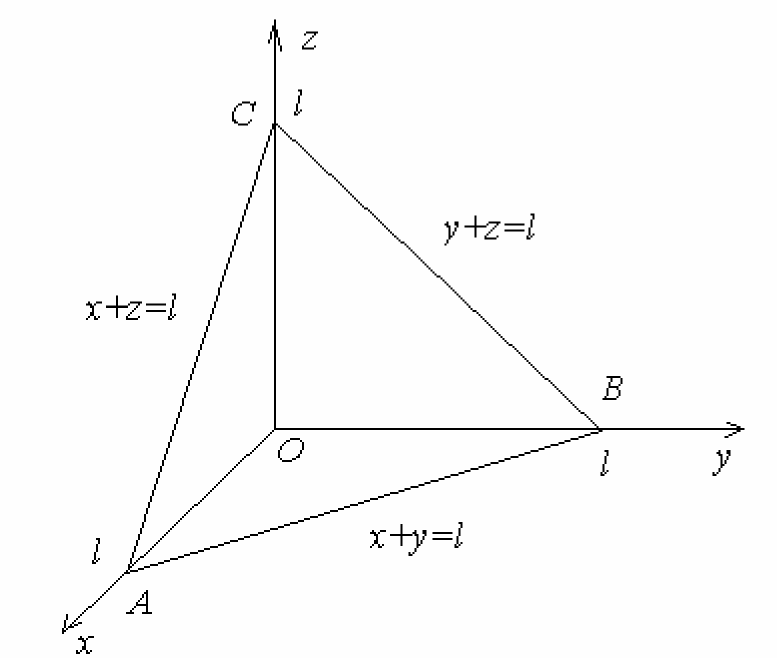


Figura 9.16

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0$$

Toate integralele din formula fluxului se iau cu plus.

$$\Phi = \iint_{D_{yz}} ydydz + \iint_{D_{xz}} zdxdz + \iint_{D_{xy}} xdxdy$$

$$\iint_{D_{yz}} ydydz = \int_0^l dy \int_0^{l-y} ydz = \int_0^l y(l-y)dy = \left( l\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_0^l = l^3\left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{l^3}{6}$$

$$\iint_{D_{xz}} zdxdz = \int_0^l dx \int_0^{l-x} zdz = \int_0^l \frac{(l-x)^2}{2} dx = \frac{1}{2}\left( l^2x - 2l\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^l = \frac{l^3}{6}$$

$$\iint_{D_{xy}} xdxdy = \int_0^l dx \int_0^{l-x} xdy = \int_0^l x(l-x)dx = \left( l\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^l = l^3\left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{l^3}{6}$$

$$\Phi = \frac{l^3}{6} + \frac{l^3}{6} + \frac{l^3}{6} = \frac{l^3}{2}$$

### *9.6 Fluxul unui câmp vectorial printr-o suprafață închisă*

**Teoremă:** Dacă într-un domeniu $G \subset \mathbb{R}^3$, componentele câmpului vectorial

$$\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k} \tag{1}$$

sunt continue şi au derivatele parţiale $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ continue, atunci fluxul câmpului vectorial $\vec{a}$ prin orice suprafață închisă *S*, netedă pe porțiuni, din domeniul *G*, este egal cu integrala triplă a funcției $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ pe domeniul *V* mărginit de suprafața *S*:

$$\Phi = \oiint_S \left( \vec{a}, \vec{n}^0 \right) d\sigma = \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV \tag{2}$$

Aceasta este *formula Gauss-Ostrogradsky*. Aici $\vec{n}^0$ este vectorul unitate al normalei exterioare la suprafaţa $S$ şi $\oiint\limits_S$ notează fluxul printr-o suprafaţă închisă.

**Exemple:**

1. Determinaţi fluxul vectorului $\vec{a} = 2x\vec{i} - (z-1)\vec{k}$ prin suprafaţa închisă:

$$S : \left\{x^2 + y^2 = 4,\ z = 0,\ z = 1\right\}$$

prin definiţie şi cu formula Gauss-Ostrogradsky.

- Cu definiţia:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$$

$$\Phi_1 = \iint\limits_{S_1} \left(\vec{a}, \vec{n}_1^0\right) d\sigma = \iint\limits_{S_1} (z-1)\, d\sigma = -\iint\limits_{S_1} d\sigma = -\pi R^2 = -4\pi$$

$$\Phi_2 = \iint\limits_{S_2} \left(\vec{a}, \vec{n}_2^0\right) d\sigma = -\iint\limits_{S_2} (z-1)\, d\sigma = 0$$

$$\vec{n}_3^0 = \frac{grad\left(x^2 + y^2 - 4\right)}{\left|grad\left(x^2 + y^2 - 4\right)\right|} = \frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{2}$$

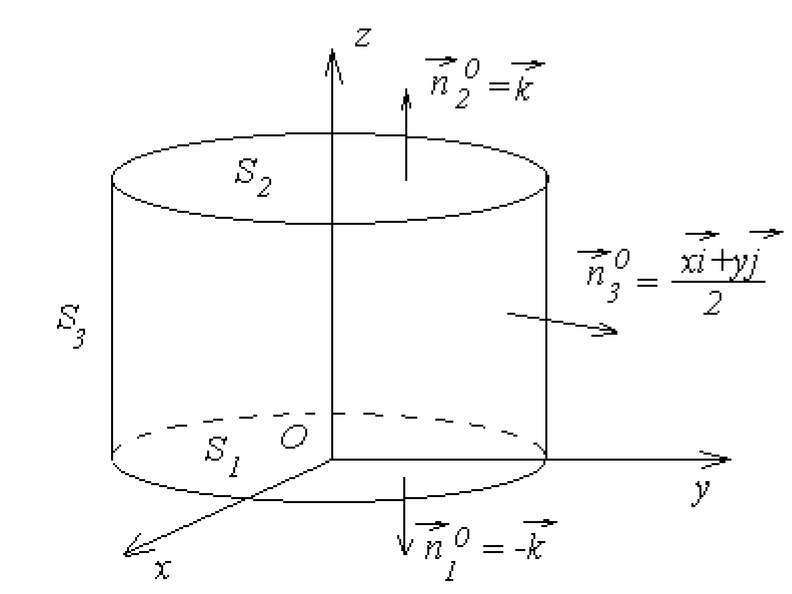


Figura 9.17

$$\Phi_3 = \iint_{S_3} \left(\vec{a}, \vec{n}_3^0\right) d\sigma = \iint_{S_3} x^2 d\sigma$$

Având în vedere simetria suprafeței, vom folosim coordonate cilindrice:

$$\begin{cases} x = 2\cos\varphi \\ y = 2\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad d\sigma = 2d\varphi dz$$

$$\Phi_3 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 4\cos^2\varphi 2dz = 4\int_0^{2\pi} \left(1+\cos 2\varphi\right) d\varphi = 8\pi$$

$$\Phi = -4\pi + 0 + 8\pi = 4\pi$$

- Cu Gauss-Ostrogradsky:

$$\Phi = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dV = \iiint_V \left(2+0-1\right) dV = \iiint_V dV = 4\pi$$

2. Determinați fluxul vectorului $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ prin sfera de rază $R$ şi centru originea sistemului de coordonate prin definiție şi cu formula Gauss-Ostrogradsky.

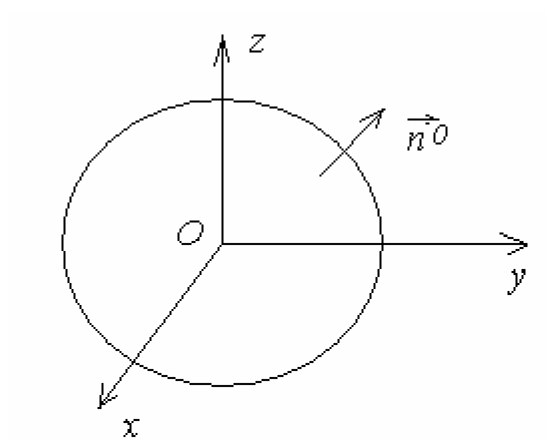


Figura 9.18

- Cu definiția:

$\vec{n}^0$ este vectorul unitate normal la sferă

$$\vec{n}^0 = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{R} = \frac{\vec{r}}{R}$$

$$\left(\vec{r}, \vec{n}^0\right) = \left(\vec{r}, \frac{\vec{r}}{R}\right) = \frac{R^2}{R} = R = ct$$

$$\Phi = \oiint_{S_R} \left(\vec{r}, \vec{n}^0\right) d\sigma = R \oiint_{S_R} d\sigma = R 4\pi R^2 = 4\pi R^3$$

- Cu Gauss-Ostrogradsky:

$$\Phi = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dV = \iiint_V (1+1+1) dV = 3\iiint_V dV = 3\frac{4\pi R^3}{3} = 4\pi R^3$$

3. Determinați fluxul vectorului $\vec{a} = 3x\vec{i} - y\vec{j} - z\vec{k}$ prin prin suprafața închisă:

$$S: \begin{cases} z = 9 - x^2 - y^2 \\ z = 0 \quad (z > 0) \end{cases}$$

prin definiție şi cu formula Gauss-Ostrogradsky.

- Cu definiția:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

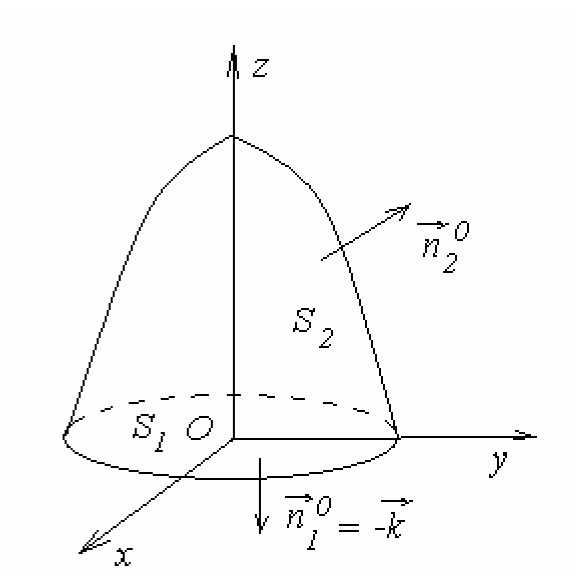


Figura 9.19

$$\Phi_1 = \iint_{S_1} \left(\vec{a}, \vec{n}_1^0\right) d\sigma = \iint_{S_1} z d\sigma = 0$$

$$\vec{n}_2 = grad\left(z + x^2 + y^2 - 9\right) = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}$$

$$\Phi_2 = \iint_{S_2} \left(\vec{a}, \vec{n}_2^0\right) d\sigma = \iint_{D_{xy}} \left(\vec{a}, \vec{n}_2\right)\Big|_{z=f(x,y)} dxdy$$

$$\left(\vec{a}, \vec{n}_2\right)\Big|_{z=9-x^2-y^2} = \left(6x^2 - 2y^2 - z\right)\Big|_{z=9-x^2-y^2} = 7x^2 - y^2 - 9$$

Având în vedere simetria suprafeței, vom folosim coordonate polare:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \rho : 0 \to 3 \\ \varphi : 0 \to 2\pi \end{array}$$

$$\Phi_2 = \iint_{D_{xy}} \left(\vec{a}, \vec{n}_2\right)\Big|_{z=f(x,y)} dxdy = \iint_{D_{xy}} \left(7x^2 - y^2 - 9\right) dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \left(7\rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi - 9\right)\rho d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \left(8\rho^2\cos^2\varphi - \rho^2 - 9\right)\rho d\rho$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(8\frac{\rho^4}{4}\cos^2\varphi - \frac{\rho^4}{4} - 9\frac{\rho^2}{2}\right)\Bigg|_0^3 d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(162\cos^2\varphi - \frac{81}{4} - \frac{81}{2}\right) d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(81 + 81\cos 2\varphi - \frac{243}{4}\right) d\varphi = \frac{81}{4} 2\pi = \frac{81}{2}\pi$$

- Cu Gauss-Ostrogradsky:

$$\Phi = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dV = \iiint_V (3 - 1 - 1) dV = \iiint_V dV$$

Având în vedere simetria suprafeței, vom folosim coordonate cilindrice:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad dV = \rho d\rho d\varphi dz \qquad \begin{array}{c} \rho : 0 \to 3 \\ \varphi : 0 \to 2\pi \\ z : 0 \to 9 - \rho^2 \end{array}$$

$$\Phi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \rho d\rho \int_0^{9-\rho^2} dz = 2\pi \int_0^3 \rho\left(9-\rho^2\right) d\rho = 2\pi\left(9\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^3 = 2\pi\left(\frac{81}{2}-\frac{81}{4}\right) = \frac{81}{2}\pi$$

**Remarcă:** Când suprafața $S$ este deschisă, adesea este convenabil să închidem suprafața şi să utilizăm formula Gauss-Ostrogradsky.

**Exemplu:**

Determinați fluxul vectorului $\vec{a} = \left(y^2+z^2\right)\vec{i} - y^2\vec{j} + 2yz\vec{k}$ prin suprafața $S: x^2+z^2=y^2$, $\left(0 \le y \le 1\right)$.

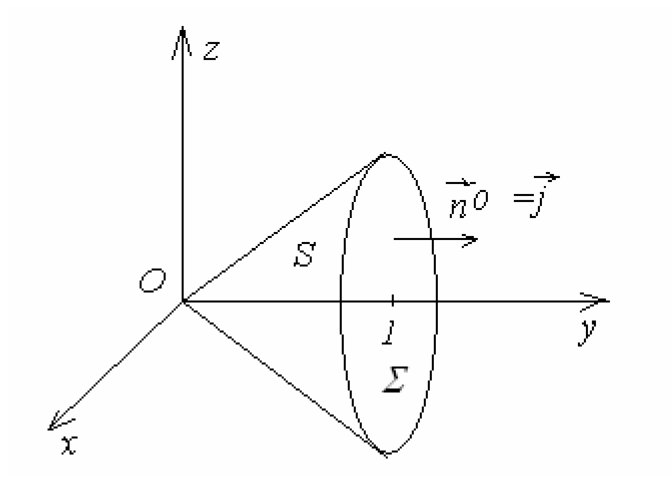


Figura 9.20

Suprafața $S$ reprezintă un con cu axa $Oy$. Închidem conul cu discul Σ din planul $y=1$.

Notații: $\Phi_1$ fluxul necunoscut

$\Phi_2$ fluxul prin Σ

$$\Phi_1+\Phi_2 = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right) dV = \iiint_V \left(0-2y+2y\right) dV = 0$$

$$\Phi_1+\Phi_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_1 = -\Phi_2$$

$$\Phi_2 = \iint_\Sigma \left(\vec{a},\vec{n}^0\right) d\sigma = \iint_\Sigma \left(\vec{a},\vec{j}\right) d\sigma = \iint_\Sigma \left(-y^2\right) d\sigma = -\iint_\Sigma d\sigma = -\pi$$

$$\Phi_1 = -\Phi_2 = \pi$$

### *9.7 Divergența unui câmp vectorial*

Considerăm câmpul vectorial al vitezelor dintr-un fluid în mişcare. Fie *S* o suprafață închisă în fluid.

- Dacă fluxul prin *S* este *pozitiv*, aceasta sugerează că pentru spațiul mărginit de *S*, ieşirea de fluid este mai mare decât intrarea. Spunem că există *surse* în *S* care generează fluid.
- Dacă fluxul prin *S* este *negativ*, intrarea este mai mare decât ieşirea. Spunem că există *absorbție* în *S* pentru fluid.

În consecință, cantitatea:

$$\Phi = \oiint_S \left(\vec{a}, \vec{n}^0\right) d\sigma \qquad (3)$$

caracterizează natura câmpului vectorial din interiorul suprafeței *S*, anume prezența punctelor sursă şi absorbție de câmp în interiorul lui *S*. Conceptul de *flux* al unui vector printr-o suprafață închisă conduce la noțiunea de *divergență* a câmpului. Divergența unui câmp vectorial este o funcție scalară care asociază un număr fiecărui punct din câmp.

Fie *M* un punct dat din câmp. Închidem punctul cu o suprafață arbitrară *S*, de exemplu o sferă cu o rază suficient de mică. Notăm cu (*V*) domeniul mărginit de *S* şi cu *V* volumul acestuia.
Fluxul vectorului $\vec{a}$ prin *S* este:

$$\Phi = \oiint_S \left(\vec{a}, \vec{n}^0\right) d\sigma \qquad (4)$$

Considerăm raportul:

$$\frac{\oiint_S \left(\vec{a}, \vec{n}^0\right) d\sigma}{V} \qquad (5)$$

Deoarece numărătorul ne indică generarea realizată de sursele din (*V*), atunci raportul (5) ne indică generarea medie din unitatea de volum sau cantitatea de surse pe unitatea de volum.

**Definiție:** Dacă raportul (5) are limită finită atunci când (*V*) se reduce la punctul *M*, atunci această limită defineşte *divergența câmpului vectorial* $\vec{a}$ în punctul *M* şi se notează $div\ \vec{a}(M)$:

$$div\ \vec{a}(M) = \lim_{(V) \to M} \frac{\oiint_S \left(\vec{a}, \vec{n}^0\right) d\sigma}{V} \qquad (6)$$

Dacă $div\,\vec{a}(M) > 0$, atunci în punctul *M* avem o sursă de câmp.

Dacă $div\,\vec{a}(M) < 0$, atunci în punctul *M* avem un punct de absorbție de câmp.

**Observație:** Conform definiției, divergența unui câmp vectorial $\vec{a}$ în punctul *M* este o densitate volumică a fluxului cîmpului vectorial $\vec{a}$ în acel punct.

- **Metodă de calcul a divergenței în coordonate carteziene**

Fie câmpul vectorial:

$$\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k} \tag{7}$$

cu componentele funcții continue care au derivate parțiale $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ continue pe o vecinătate a punctului *M*.

Aplicăm teorema Gauss-Ostrogradsky fluxului câmpului $\vec{a}$ prin orice suprafață închisă *S* din vecinătatea lui *M*, care conține punctul *M*:

$$\oiint_S (\vec{a},\vec{n}^0)\,d\sigma = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dV \tag{8}$$

Integralei triple din dreapta îi aplicăm teorema de medie:

$$\oiint_S (\vec{a},\vec{n}^0)\,d\sigma = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)_{M_m} V \tag{9}$$

Substituim această relație în definiția (6):

$$div\,\vec{a}(M) = \lim_{(V)\to M} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)_{M_m} \tag{10}$$

Când (*V*) se reduce la punctul *M* şi $M_m \to M$, şi cu ipoteza de continuitate a derivatelor parțiale, avem:

$$div\,\vec{a}(M) = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)_M \tag{11}$$

$$div\,\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \tag{12}$$

Toate cantitățile din formula (12) se calculează în acelaşi punct.

Formula Gauss-Ostrogradsky poate fi rescrisă:

$$\oiint_S \left(\vec{a}, \vec{n}^0\right) d\sigma = \iiint_V div\ \vec{a}\ dV \tag{13}$$

- **Reguli de calcul pentru divergență**

1. *Liniaritate*

$$div\left(C_1\vec{a}_1 + C_2\vec{a}_2 + \ldots + C_n\vec{a}_n\right) = C_1 div\ \vec{a}_1 + C_2 div\ \vec{a}_2 + \ldots + C_n div\ \vec{a}_n \tag{14}$$

unde $C_1$, $C_2$, ..., $C_n$ sunt constante.

2. Divergența unui vector constant $\vec{c}$ este nulă.

$$div\ \vec{c} = 0 \tag{15}$$

3. Divergența produsului unei funcții scalare $u(M)$ cu un vector $\vec{a}(M)$:

$$div\left(u\vec{a}\right) = u\ div\ \vec{a} + \left(grad\ u, \vec{a}\right) \tag{16}$$

Într-adevăr, dacă $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, atunci

$$div(u\vec{a}) = div\left(uP\vec{i} + uQ\vec{j} + uR\vec{k}\right) = \frac{\partial(uP)}{\partial x} + \frac{\partial(uQ)}{\partial y} + \frac{\partial(uR)}{\partial z}$$

$$= u\frac{\partial P}{\partial x} + u\frac{\partial Q}{\partial y} + u\frac{\partial R}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x}P + \frac{\partial u}{\partial y}Q + \frac{\partial u}{\partial z}R$$

$$= u\ div\ \vec{a} + \left(grad\ u, \vec{a}\right)$$

**Exemplu:**
Calculați divergența vectorului:

$$\vec{a} = \varphi(r)\vec{r}^0 = \varphi(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

unde $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ şi $r = |\vec{r}|$ este distanţa de la origine la un punct arbitrar $M(x, y, z)$.

$$div\ \vec{a} = div\left(\frac{\varphi(r)}{r}\vec{r}\right) = \frac{\varphi(r)}{r} div\ \vec{r} + \left(grad\frac{\varphi(r)}{r}, \vec{r}\right)$$

$$div\ \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

$$grad\frac{\varphi(r)}{r} = \left(\frac{\varphi(r)}{r}\right)' grad\ r = \frac{r\varphi'(r) - \varphi(r)}{r^2}\vec{r}^0$$

$$\left(grad\frac{\varphi(r)}{r}, \vec{r}\right) = \left(\frac{r\varphi'(r) - \varphi(r)}{r^2}\vec{r}^0, \vec{r}\right) = \frac{r\varphi'(r) - \varphi(r)}{r} = \varphi'(r) - \frac{\varphi(r)}{r}$$

$$div\ \vec{a} = 3\frac{\varphi(r)}{r} + \varphi'(r) - \frac{\varphi(r)}{r} = 2\frac{\varphi(r)}{r} + \varphi'(r)$$

**Definiţie:** Dacă în toate punctele unui domeniu $G \subset R^3$, divergenţa unui câmp vectorial $\vec{a}$ definit pe *G*, este nulă, adică:

$$div\ \vec{a} = 0 \tag{17}$$

atunci câmpul se numeşte *solenoidal* pe domeniul *G*.

**Observaţie:** În câmp solenoidal, fluxul câmpului vectorial prin orice suprafaţă închisă *S* din câmp, este nul

$$\oint\!\!\!\oint_S (\vec{a}, \vec{n}^0) d\sigma = 0 \tag{18}$$

- **Proprietăţile unui câmp solenoidal (fără surse)**

Fie Σ o suprafaţă plană în câmpul vectorial $\vec{a}$ şi fie γ frontiera lui Σ, adică $\gamma = \partial\Sigma$. Totalitatea liniilor de câmp care trec prin frontiera γ formează un *tub vectorial*. Considerăm o secţiune arbitrară a tubului $\Sigma_1$. Normala $\vec{n}_1$ la $\Sigma_1$ este orientată în direcţia câmpului $\vec{a}$.

**Teorema1:** Într-un câmp solenoidal $\vec{a}$, fluxul vectorului $\vec{a}$ prin orice secţiune a unui tub vectorial este acelaşi.

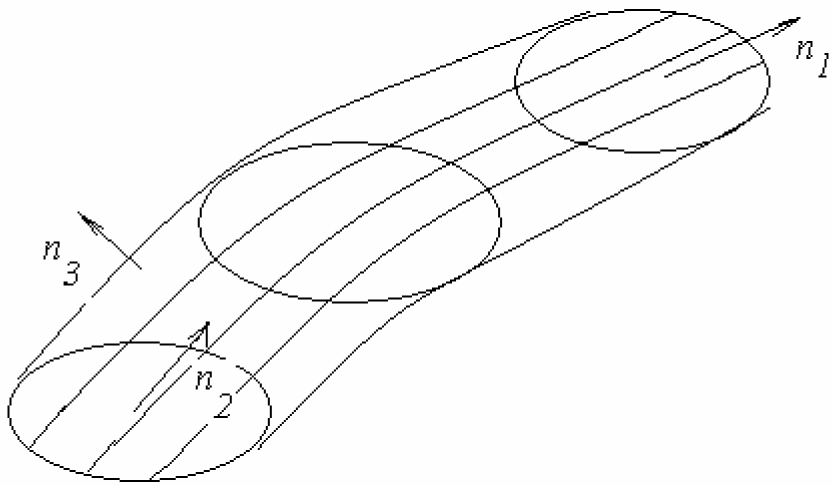


Figura 9.21

*Demonstrație:* Fie $\Sigma_1$ şi $\Sigma_2$ două secțiuni arbitrare, care nu se intersectează, ale aceluiaşi tub vectorial. Trebuie să arătăm că:

$$\iint_{\Sigma_1} \left(\vec{a}, \vec{n}_1^0\right) d\sigma = \iint_{\Sigma_2} \left(\vec{a}, \vec{n}_2^0\right) d\sigma \tag{19}$$

Notăm cu $\Sigma_3$ suprafața laterală a tubului, cuprinsă între cele două secțiuni arbitrare. Cele trei suprafețe $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ şi $\Sigma_3$ formează împreună o suprafață închisă $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3$. Deoarece câmpul $\vec{a}$ este presupus solenoidal, avem:

$$\oiint_{\Sigma} \left(\vec{a}, \vec{n}^0\right) d\sigma = 0$$

Cu proprietatea de aditivitate a fluxului, putem scrie:

$$\iint_{\Sigma_1} \left(\vec{a}, \vec{n}_1^0\right) d\sigma + \iint_{\Sigma_2} \left(\vec{a}, -\vec{n}_2^0\right) d\sigma + \iint_{\Sigma_3} \left(\vec{a}, \vec{n}_3^0\right) d\sigma = 0$$

Pe suprafața $\Sigma_3$, care este formată din linii de câmp, avem $\vec{n}_3^0 \perp \vec{a}$ . Atunci, $\left(\vec{a}, \vec{n}_3^0\right) = 0$ pe suprafața $\Sigma_3$, şi astfel ultima integrală este nulă. Deci,

$$\iint_{\Sigma_1} \left(\vec{a}, \vec{n}_1^0\right) d\sigma = \iint_{\Sigma_2} \left(\vec{a}, \vec{n}_2^0\right) d\sigma$$

Fie $L$ un contur închis, orientat, care este frontiera suprafeței $\Sigma$. Vom spune că $L$ este *bordul orientat* al suprafeței $\Sigma$.

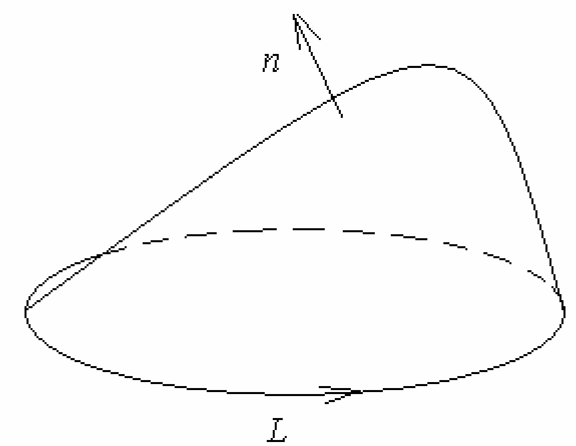


Figura 9.22

Considerăm vectorul normal $\vec{n}$ la $\Sigma$ astfel încât să existe o legătură directă între $\vec{n}$ şi parcurgerea bordului $L$.

**Teorema 2:** Într-un câmp solenoidal $\vec{a}$, fluxul vectorului $\vec{a}$ prin orice suprafață care are acelaşi bord orientat este acelaşi, adică:

$$\iint_{\Sigma_1}\left(\vec{a},\vec{n}_1^0\right)d\sigma=\iint_{\Sigma_2}\left(\vec{a},\vec{n}_2^0\right)d\sigma \tag{20}$$

**Observație:** Într-un câmp solenoidal liniile de câmp nu încep şi nu se termină în câmp. Acestea pot fi curbe închise sau deschise ce pot avea capetele pe frontiera domeniului pe care e definit câmpul.

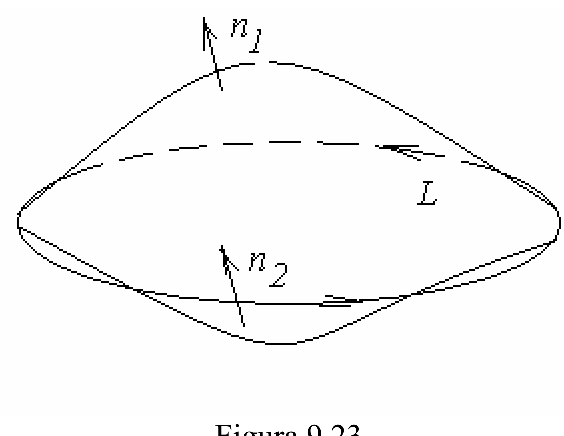


Figura 9.23

.

**Exemplu:**
Considerăm câmpul produs de o sarcină punctuală $q$ plasată în originea sistemului de coordonate. Intensitatea câmpului este:

$$\vec{E} = \frac{q}{r^2}\vec{r}^{\,0}$$

$$div\ \vec{E} = div\left(\frac{q}{r^2}\vec{r}^{\,0}\right) = div\left(\frac{q}{r^3}\vec{r}\right)$$

unde $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ şi $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
Pentru $r \neq 0$ avem

$$div\left(\frac{q}{r^3}\vec{r}\right) = \frac{q}{r^3}div\ \vec{r} + \left(grad\ \frac{q}{r^3}, \vec{r}\right)$$

$$= 3\frac{q}{r^3} + \left(-3\frac{q}{r^4}\vec{r}^{\,0}, r\ \vec{r}^{\,0}\right) = 3\frac{q}{r^3} - 3\frac{q}{r^3} = 0$$

Câmpul $\vec{E}$ este solenoidal în orice domeniu $G$ care nu conține punctul $O(0,0,0)$.
Fluxul câmpului $\vec{E}$ prin sfera $S_R$ de rază $R$ şi centru punctul $O(0,0,0)$ este:

$$\Phi = \oiint_{S_R}\left(\vec{E}, \vec{n}^{\,0}\right)d\sigma = \oiint_{S_R}\left(\frac{q}{r^2}\vec{r}^{\,0}, \vec{r}^{\,0}\right)d\sigma = \frac{q}{R^2}\oiint_{S_R}d\sigma = \frac{q}{R^2}4\pi R^2$$

$$\Phi = 4\pi q$$

Fluxul câmpului $\vec{E}$ prin orice suprafață închisă care conține originea $O(0,0,0)$ este $4\pi q$ .