Cap. IX Analiză vectorială

9.1 Câmp scalar. Derivata după o direcție

Fie $u = f(M)$ sau $u = f(x, y, z)$ un *câmp scalar* definit de o funcție scalară $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. De exemplu, un câmp de temperatură sau un câmp de presiune.

În spațiul $\mathbb{R}^3$, considerăm un punct M_0 şi o direcție definită de un vector $\vec{l}$. Fie un alt punct M astfel încât $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{l}$ şi notăm $\left|\overrightarrow{M_0M}\right| = \Delta l$. Creşterea câmpului asociată modificării argumentului de la M_0 la M, este

$$\Delta u = f(M) - f(M_0) \tag{1}$$

Definiție: Derivata câmpului $u = f(M)$ în punctul M_0 după direcția $\vec{l}$ este prin definiție:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{f(M) - f(M_0)}{\Delta l} \tag{2}$$

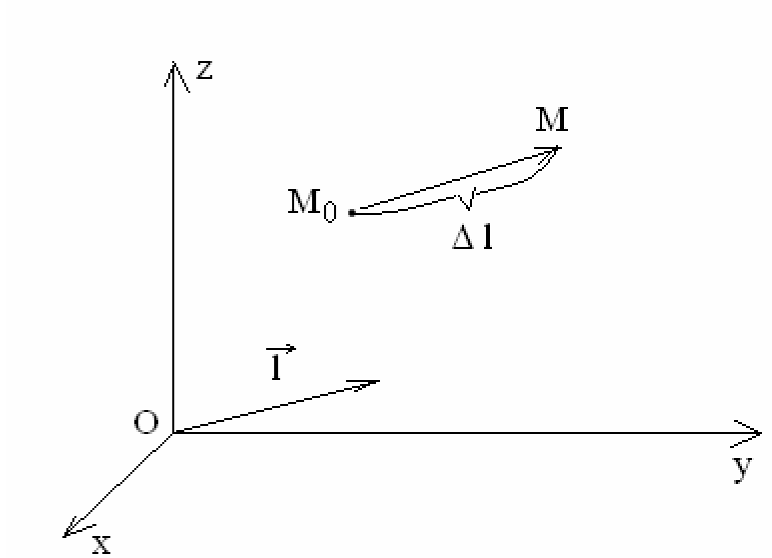


Figura 9.1

Observație: In condiții de diferențiabilitate, în coordonate carteziene, derivata câmpului scalar după o direcție se poate calcula astfel:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}\cdot\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}\cdot\cos\beta+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}\cdot\cos\gamma \tag{3}$$

unde $\cos\alpha$, $\cos\beta$ şi $\cos\gamma$ sunt cosinuşii directori ai vectorului $\overrightarrow{M_0M}$ sau $\vec{l}$.

Exemplu:
Determinați derivata câmpului scalar $u=xe^y+ye^x-z^2$ în punctul $M_0(3,0,2)$ în direcția punctului $M_1(4,1,3)$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}=\left.\left(e^y+ye^x\right)\right|_{(3,0,2)}=e^0+0\cdot e^3=1$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}=\left.\left(xe^y+e^x\right)\right|_{(3,0,2)}=3\cdot e^0+e^3=3+e^3$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}=\left.(-2z)\right|_{(3,0,2)}=-4$$

$$\overrightarrow{M_0M_1}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k} \qquad \left|\overrightarrow{M_0M_1}\right|=\sqrt{3}$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}=1\times\frac{1}{\sqrt{3}}+\left(3+e^3\right)\times\frac{1}{\sqrt{3}}+(-4)\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{e^3}{\sqrt{3}}$$

Concluzie: $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}=\frac{e^3}{\sqrt{3}}>0$, deci câmpul scalar creşte în M_0 în direcția dată.

Caz particular:
Pentru un câmp plan $u=f(x,y)$ derivata câmpului în punctul M_0 după direcția $\vec{l}$ este:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}\cdot\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}\cdot\sin\alpha \tag{4}$$

unde unghiul α reprezintă unghiul dintre vectorul $\vec{l}$ şi axa Ox.

Exemplu:
Calculați derivata câmpului scalar $u = arctg\ xy$ în punctul $M_0(1,1)$ de pe parabola $y = x^2$ în direcția curbei (în sensul creşterii abscisei).

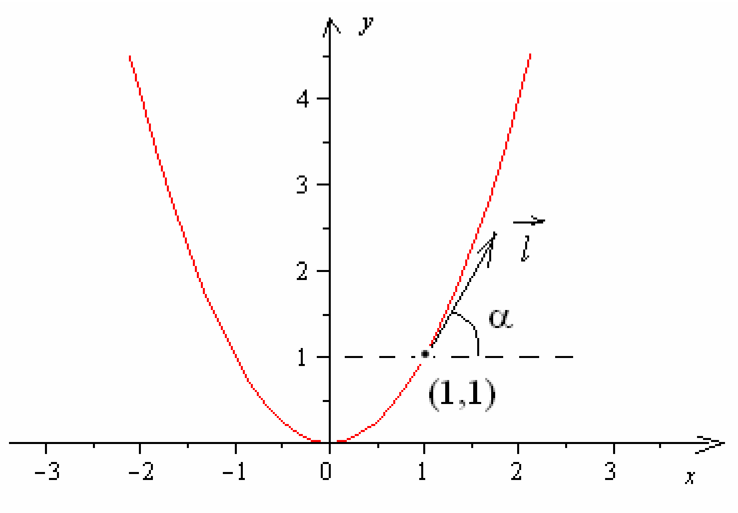


Figura 9.2

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = \left.\frac{y}{1+x^2y^2}\right|_{(1,1)} = \frac{1}{2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = \left.\frac{x}{1+x^2y^2}\right|_{(1,1)} = \frac{1}{2}$$

$$tg\ \alpha = y'(x)\big|_{x=1} = 2 \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{3}{2\sqrt{5}}$$

Concluzie: $\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = \dfrac{3}{2\sqrt{5}} > 0$

9.2 Gradientul unui câmp scalar

Fie un câmp scalar definit de funcția scalară

$$u = f\left(x, y, z\right) \qquad (5)$$

unde *f* este o funcție diferențiabilă.

Definiție: Gradientul unui câmp scalar *u* într-un punct dat $M\left(x, y, z\right)$, este vectorul notat $grad\ u$, definit prin:

$$grad\ u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} \qquad (6)$$

Acesta este dependent de funcția de câmp şi de punctul în care se calculează.

Fie $\vec{l}^{\,0}$ vectorul unitate în direcția $\vec{l}$

$$\vec{l}^{\,0} = \frac{\vec{l}}{\left|\vec{l}\right|} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k} \qquad (7)$$

Atunci, relația (3) care defineşte derivata unui câmp scalar după o direcție poate fi scrisă sub forma unui produs scalar:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \left(grad\ u, \vec{l}^{\,0}\right) \qquad (8)$$

Adică, derivata câmpului scalar *u* după direcția $\vec{l}$ este egală cu produsul scalar al gradientului câmpului cu vectorul unitate $\vec{l}^{\,0}$.

Proprietățile gradientului:

1. Gradientul câmpului scalar are direcția perpendiculară pe suprafețele de nivel sau pe curbele de nivel dacă câmpul este plan.

$$grad\ u \perp \text{ suprafata de nivel u} = ct$$

Dacă pentru o funcție de două variabile, curbele de nivel arată ca în figura 9.3, atunci vectorul $grad\ u$ va fi perpendicular pe aceste curbe.

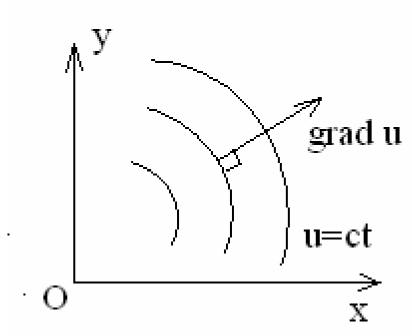


Figura 9.3

Exemplu:
Pentru un câmp scalar liniar:

$$u = ax + by + cz, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$grad\ u = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

O suprafață de nivel pentru acest câmp are forma:

$$ax + by + cz = ct$$

Vectorul normal la această suprafață (plan) este:

$$\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

Exemplu:
Pentru un câmp scalar plan $u = x^2 + y^2$, curbele de nivel sunt cercuri $x^2 + y^2 = ct$

$$grad\ u = 2x\vec{i} + 2y\vec{j}$$

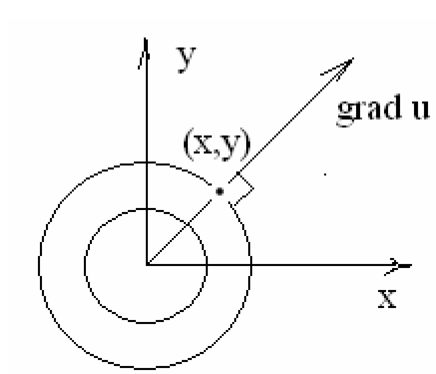
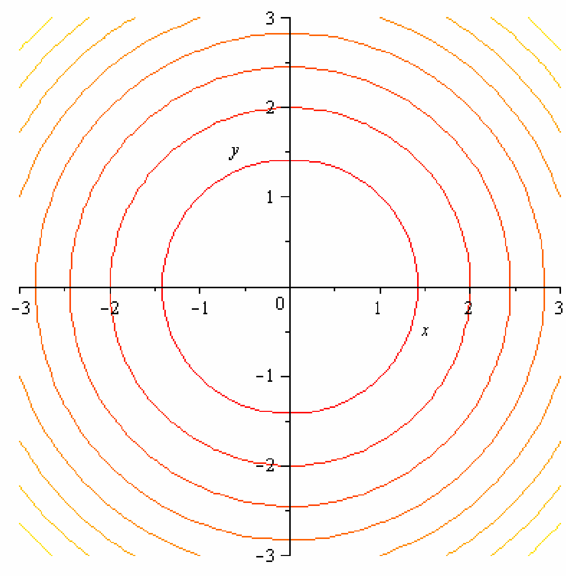
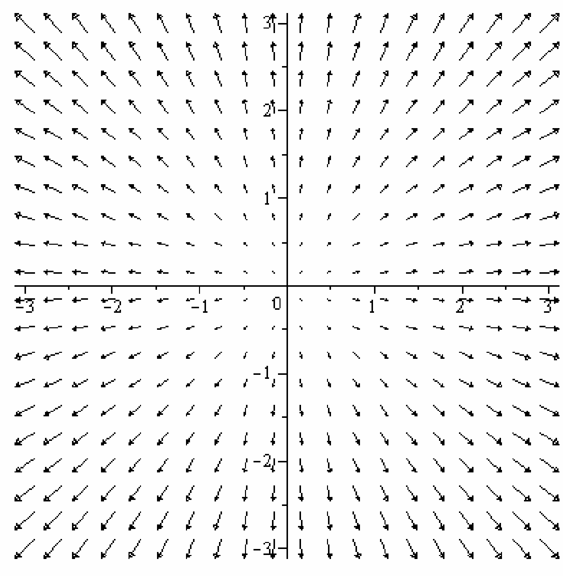


Figura 9.4





2. Gradientul este orientat în sensul creşterii funcției de câmp.

3. Lungimea (modulul) gradientului este egală cu cea mai mare derivată după o direcție în punctul câmpului în care se calculează gradientul.

$$\max \frac{\partial u}{\partial l} = |grad\ u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} \tag{9}$$

Observație: In această formulă maximul se ia după toate direcțiile posibile într-un punct dat al câmpului.

Într-adevăr,

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \left(grad\ u, \vec{l}^{\,0}\right) = |grad\ u| \cdot 1 \cdot \cos\varphi \tag{10}$$

unde φ este unghiul dintre vectorii $\vec{l}$ şi $grad\ u$. Cum valoarea maximă a lui $\cos\varphi$ este unu, atunci valoarea maximă a derivatei $\partial u / \partial l$ este $|grad\ u|$.

Exemplu:
In punctul $M_0(1,1,1)$ determinați direcția de variație maximă a câmpului scalar:

$$u = xy + yz + xz$$

şi valoarea acestei variații maxime.

Direcția de variație maximă a câmpului este dată de $grad\ u$:

$$grad\ u = (y+z)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (y+x)\vec{k}$$

$$grad\ u(M_0) = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

Acest vector determină direcția de creştere maximă a câmpului în punctul $M_0(1,1,1)$. Mărimea acestei variații maxime a câmpului în punct este:

$$\max \frac{\partial u}{\partial l} = \left| grad\ u(M_0) \right| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}$$

Mărimile care sunt independente de alegerea sistemului de coordonate şi caracterizează anumite proprietăți ale unui obiect, se numesc *invarianți* pentru obiect. De exemplu, lungimea unei curbe este un invariant, unghiul dintre tangenta la curbă şi axa *Ox* nu este un invariant.

Definiția invariantă a gradientului unui câmp scalar: Gradientul unui câmp scalar este un vector cu direcția de-a lungul normalei la suprafața de nivel, cu sensul în direcția creşterii funcției de câmp. Mărimea gradientului este egală cu cea mai mare derivată după o direcție într-un punct dat.

În consecință, mărimea şi direcția gradientului caracterizează rata de creştere a câmpului. Forma invariantă a gradientului este:

$$grad\ \mathrm{u} = \left| grad\ u \right| \vec{n}^0 \tag{11}$$

unde $\vec{n}^0$ are direcția creşterii câmpului, iar $\left| grad\ \mathrm{u} \right| = \partial u / \partial n$. Atunci:

$$grad\ \mathrm{u} = \frac{\partial u}{\partial n} \vec{n}^0 \tag{12}$$

Într-adevăr, dacă în $\frac{\partial u}{\partial l} = \left(grad\ u, \vec{l}^0 \right)$ înlocuim $\vec{l} \to \vec{n}$, obținem $\frac{\partial u}{\partial n} = \left(grad\ u, \vec{n}^0 \right)$ şi apoi $\frac{\partial u}{\partial n} = \left(\left| grad\ u \right| \vec{n}^0, \vec{n}^0 \right)$ şi atunci $\frac{\partial u}{\partial n} = \left| grad\ u \right|$.

Exemplu:
Determinați gradientul funcției distanță $r = d(M_0, M)$:

$$r=\sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2+\left(z-z_0\right)^2} \qquad (13)$$

unde $M\left(x,y,z\right)$ este un punct arbitrar din câmp, iar $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ este un punct fixat din câmp.
Suprafețele de nivel sunt sfere cu centrul în $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$.

$$grad\ r=\frac{\partial r}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial r}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial r}{\partial z}\vec{k}$$

$$=\frac{\left(x-x_0\right)\vec{i}+\left(y-y_0\right)\vec{j}+\left(z-z_0\right)\vec{k}}{\sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2+\left(z-z_0\right)^2}}=\vec{r}_0$$

unde $\vec{r}_0$ este vectorul unitate în direcția $\overrightarrow{M_0M}$.

Concluzie: $grad\ r=\vec{r}^{\,0}$ (14)

- **Proprietăți de calcul:**

1. $grad\left(Cu\left(M\right)\right)=Cgrad\ u\left(M\right),\ \ C=const$ (15)

2. $grad\left(u+v\right)=grad\ u+grad\ v$ (16)

3. $grad\left(uv\right)=v\ grad\left(u\right)+u\ grad\left(v\right)$ (17)

Într-adevăr,

$$grad\left(uv\right)=\frac{\partial\left(uv\right)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\left(uv\right)}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\left(uv\right)}{\partial z}\vec{k}$$

$$=\left(v\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial v}{\partial x}\right)\vec{i}+\left(v\frac{\partial u}{\partial y}+u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\vec{j}+\left(v\frac{\partial u}{\partial z}+u\frac{\partial v}{\partial z}\right)\vec{k}$$

$$=v\left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\right)+u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial v}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial v}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$=v\ grad\left(u\right)+u\ grad\left(v\right)$$

4. $grad\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\ grad\ u-u\ grad\ v}{v^2}, \quad v\neq 0$ (18)

5. $grad\ F(u)=F'(u)\,grad\ u$ (19)

Într-adevăr,

$$grad\ \mathrm{F}(u)=\frac{\partial F(u)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial F(u)}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial F(u)}{\partial z}\vec{k}$$

$$=F'(u)\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+F'(u)\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+F'(u)\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

$$=F'(u)\,grad\ u$$

Caz particular: $grad\ F(r)=F'(r)\vec{r}^{\,0}$ (20)

9.3 Câmp vectorial. Linii de câmp şi ecuațiile diferențiale ale acestora

Definiție: Dacă în fiecare punct $M(x,y,z)$ al spațiului, este definit vectorul:

$$\vec{a}=\vec{a}(M)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k} \tag{21}$$

se spune că s-a definit *câmpul vectorial* $\vec{a}$.

Exemple:
Câmpul de forțe $\vec{F}$, câmpul de viteze $\vec{v}$ dintr-un fluid în mişcare.

În continuare, desenăm câteva câmpuri vectoriale plane.

1) $\vec{F}=3\vec{i}+\vec{j}$

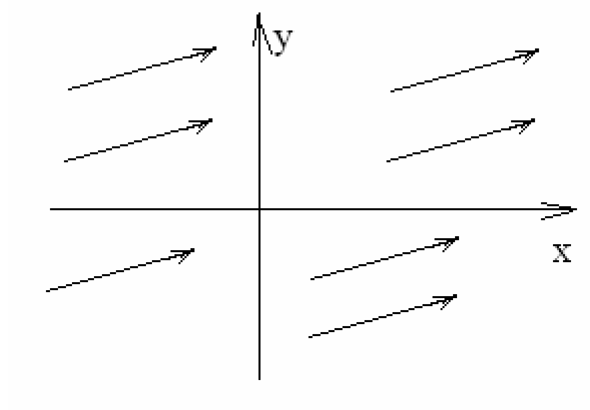


Figura 9.5

2) $\vec{F} = x\vec{i}$

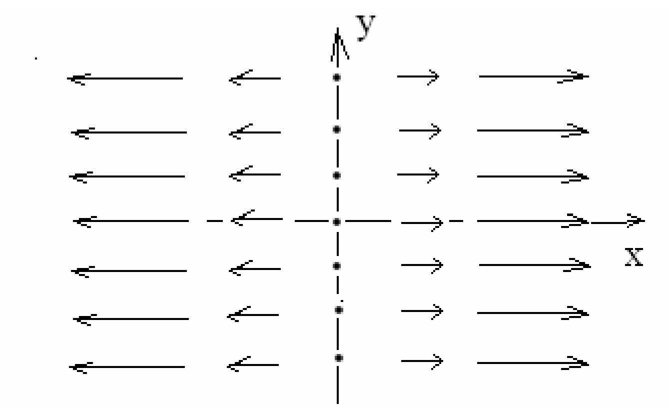


Figura 9.6

3) $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j}$

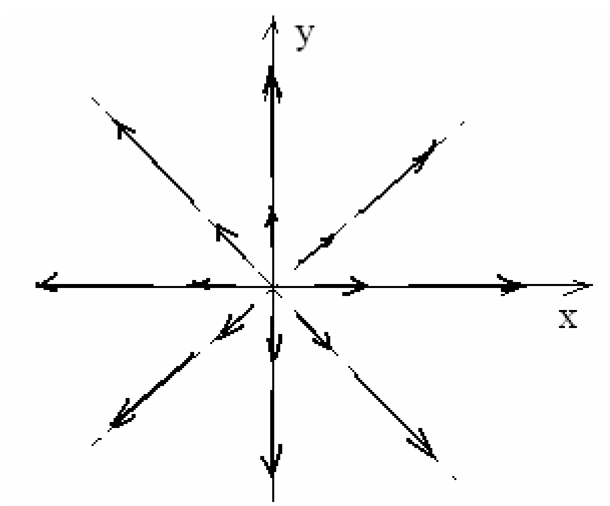


Figura 9.7

4) $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j}$

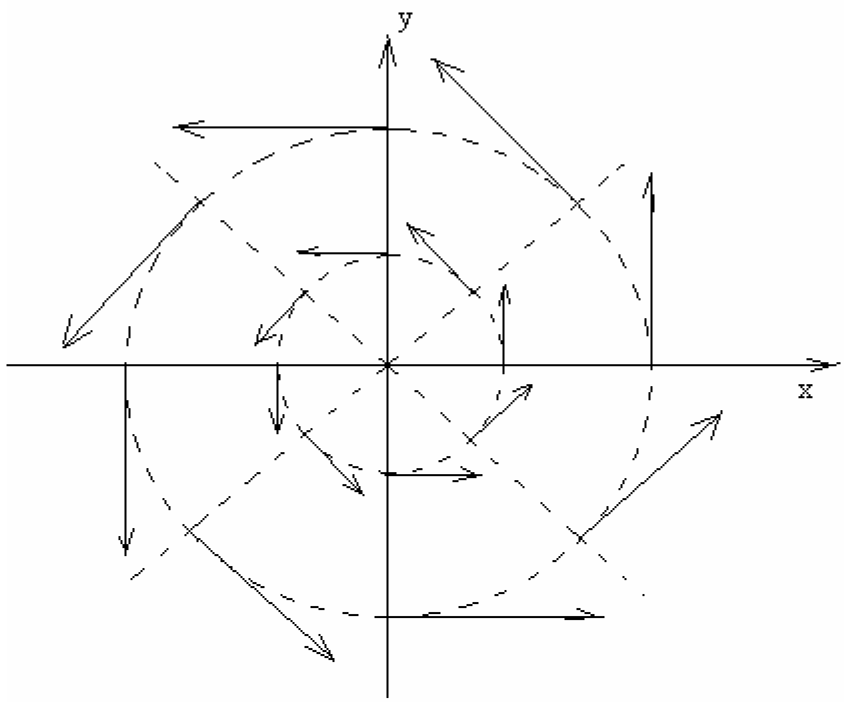


Figura 9.7b

Geometric, un câmp vectorial poate fi reprezentat prin *linii de câmp*. Linia de câmp a unui câmp vectorial $\vec{a}$ este o curbă astfel încât o tangentă la ea în orice punct *M* are aceeaşi direcţie ca şi vectorul de câmp $\vec{a}$ din acel punct.

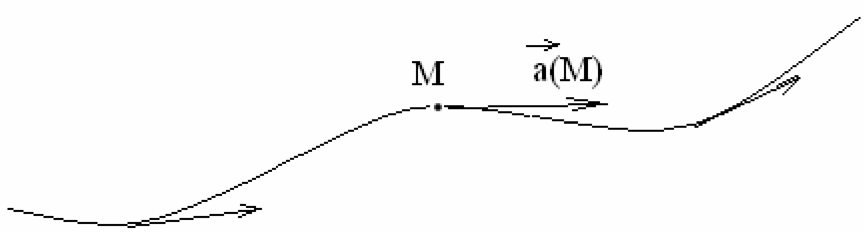


Figura 9.8

- Ecuaţiile diferenţiale ale liniilor de câmp

Fie un câmp vectorial definit de vectorul

$$\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k} \qquad (22)$$

unde $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ sunt funcții continue cu derivate parțiale mărginite.

Considerăm în câmp, o curbă definită vectorial:

$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k} \tag{23}$$

Vectorul $\vec{r}(t)$ este vectorul de poziție al unui punct care se mişcă pe curbă, iar *t* este parametrul curbei. Atunci, vectorul tangent la curbă este

$$\vec{\tau}=\frac{d\vec{r}(t)}{dt} \tag{24}$$

Din definiția liniei de câmp, curba (23) este linie de câmp dacă vectorii

$$\vec{a}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

şi

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}$$

sunt coliniari în fiecare punct al liniei de câmp. Condiția de coliniaritate pentru vectori constă în proporționalitatea coordonatelor acestora. Deci, pe linia de câmp, trebuie să fie satisfăcute relațiile:

$$\frac{dx}{P(x,y,z)}=\frac{dy}{Q(x,y,z)}=\frac{dz}{R(x,y,z)} \tag{25}$$

Aceste ecuații diferențiale ale linilor de câmp formează un sistem de ecuații diferențiale, care prin integrare ne dau:

$$\begin{cases}\varphi_1(x,y,z)=C_1\\ \varphi_2(x,y,z)=C_2\end{cases} \tag{26}$$

Acesta este un sistem de ecuații din care determinăm liniile de câmp ca intersecție de două suprafețe. Prin modificarea parametrilor C_1 şi C_2 vom obține o familie de linii de câmp.

Exemplu:

Determinați liniile de câmp pentru câmpul $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+2z\vec{k}$.

Ecuațiile diferențiale ale liniilor de câmp sunt:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{2z}$$

Sau:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{y}\\ \dfrac{dx}{x}=\dfrac{dz}{2z}\end{cases}$$

Integrînd:

$$\begin{cases}\ln C_1+\ln|x|=\ln|y|\\ \ln C_2+2\ln|x|=\ln|z|\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=C_1x\\ z=C_2x^2\end{cases},\qquad C_1,C_2\in\mathbb{R}$$

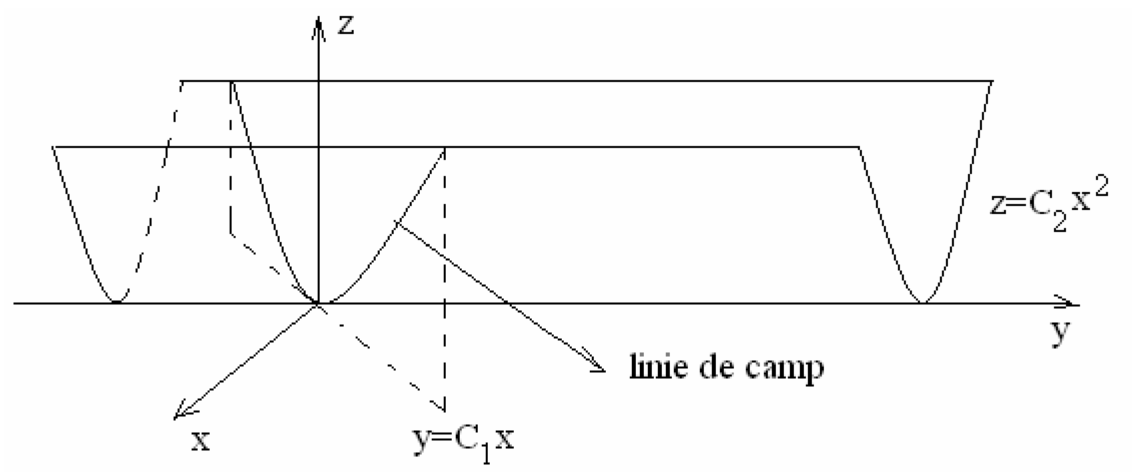


Figura 9.9

Intersecţia planelor $y=C_1x$ cu cilindrii parabolici $z=C_2x^2$ reprezintă o familie de linii de câmp cu doi parametri $C_1,C_2\in\mathbb{R}$.

9.4 Fluxul câmpului vectorial printr-o suprafaţă

Considerăm câmpul de viteze $\vec{v}$ al unui fluid în mişcare. Fie Σ o suprafaţă în câmp. *Curgerea* fluidului prin Σ este cantitatea de fluid care trece prin Σ în unitatea de timp. Această curgere poate fi calculată uşor dacă viteza $\vec{v}$ este *constantă* şi suprafaţa Σ este *plană*.

Curgerea fluidului va fi egală cu volumul corpului cilindric cu baze paralele (Σ) şi generatoarea cu lungimea $|\vec{v}|$, deoarece în unitatea de timp fiecare particulă se deplasează un drum egal cu $|\vec{v}|$, în direcţia lui $\vec{v}$.

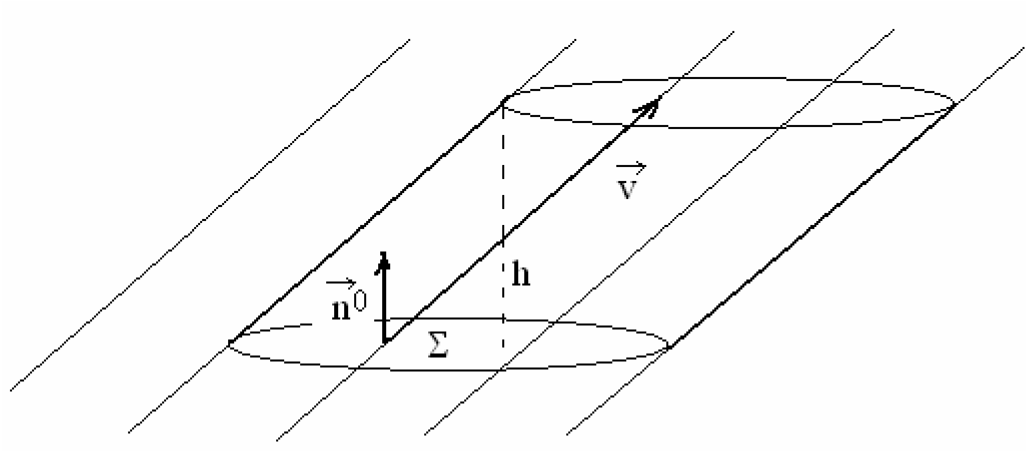


Figura 9.10

Curgerea va fi:

$$\Phi = S \cdot h \tag{27}$$

unde S este aria bazei Σ, iar $h = pr_{\vec{n}}\vec{v} = \left(\vec{v}, \vec{n}^0\right)$ este înălţimea cilindrului. Aici, $\vec{n}$ este vectorul normal la baza Σ.

In concluzie, pentru o viteză constantă $\vec{v}$ şi o suprafaţă plană Σ, curgerea este:

$$\Phi = \left(\vec{v}, \vec{n}^0\right) \cdot S \tag{28}$$

Dacă viteza $\vec{v}$ variază continuu şi dacă suprafaţa Σ este netedă atunci putem împărţi Σ în bucăţi parţiale $\Sigma_k \left(k = 1, 2, \ldots, n\right)$ atât de mici încât să putem aproxima pe fiecare Σ_k ca fiind plană şi vectorul $\vec{v}$ constant pe aceasta.

Intrucât curgerea fluidului prin Σ este egală cu suma curgerilor prin toate bucăţile parţiale Σ_k, vom scrie următoarea formulă aproximativă pentru curgere:

$$\Phi \cong \sum_{k=1}^{n} \left(\vec{v}, \vec{n}^0\right)_{P_k} \cdot \Delta\sigma_k \tag{29}$$

unde P_k este un punct din bucata Σ_k, $\Delta\sigma_k$ este aria lui Σ_k , iar $\left(\vec{v},\vec{n}^0\right)_{P_k}$ este produsul scalar calculat cu $\vec{v}$ şi $\vec{n}^0$ consideraţi în punctual $P_k \in \Sigma_k$.

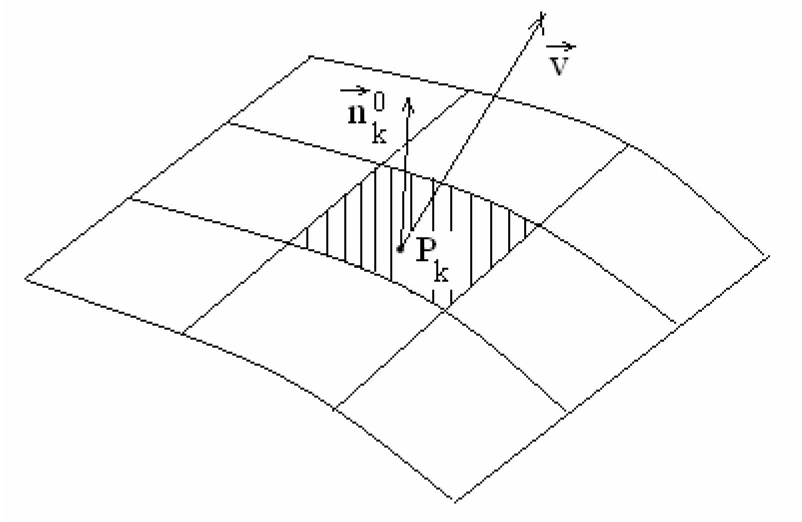


Figura 9.11

Curgerea prin Σ va fi limita relaţiei precedente (29), atunci când cel mai mare dintre diametrele bucăţilor parţiale Σ_k tinde la zero

$$\Phi = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left(\vec{v},\vec{n}^0\right)_{P_k}\cdot\Delta\sigma_k = \iint_{\Sigma}\left(\vec{v},\vec{n}^0\right)d\sigma \qquad (30)$$

unde d este cel mai mare dintre diametrele bucăţilor parţiale Σ_k $(k=1,\ldots,n)$. Integrala care defineşte curgerea fluidului este o integrală de suprafaţă a funcţiei scalare $\left(\vec{v},\vec{n}^0\right)$ pe suprafaţa Σ.

În analogie cu noţiunea de *curgere* printr-o suprafaţă, vom introduce noţiunea de *flux* a unui vector $\vec{a}$ prin suprafaţa Σ.

Definiţie: *Fluxul unui vector* $\vec{a}$ printr-o suprafaţă Σ este integrala pe suprafaţa Σ a proiecţiei lui $\vec{a}$ pe normala la suprafaţă:

$$\Phi = \iint_{\Sigma}\left(\vec{a},\vec{n}^0\right)d\sigma = \iint_{\Sigma}a_n d\sigma = \iint_{\Sigma}\left(\vec{a},d\vec{\sigma}\right) \qquad (31)$$

unde $d\vec{\sigma} = \vec{n}^0 d\sigma$.

Observaţie: Integrala din definiţie există dacă câmpul vectorial $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ este continuu, adică componentele sale $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ şi $R(x,y,z)$ sunt continue, şi dacă suprafaţa Σ este netedă.

Exemplu:
Considerăm câmpul electric produs de o sursă punctiformă plasată în originea sistemului de coordonate. Intensitatea câmpului într-un punct oarecare P va fi:

$$\vec{E} = \frac{q}{r^2}\vec{r}^{\,0}$$

unde q este sarcina, $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ este vectorul de poziție al punctului P. Vrem să calculăm fluxul lui $\vec{E}$ prin S_R, o sferă cu rază R și centrul în originea sistemului de coordonate.

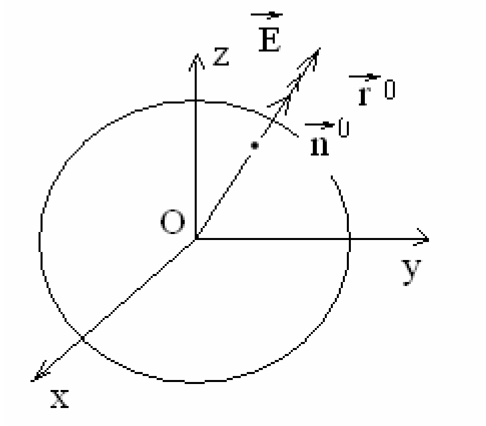


Figura 9.12

$$\left(\vec{E},\vec{n}^0\right) = \left(\vec{E},\vec{r}^{\,0}\right) = \left(\frac{q}{r^2}\vec{r}^{\,0},\vec{r}^{\,0}\right) = \frac{q}{r^2}\left(\vec{r}^{\,0},\vec{r}^{\,0}\right) = \frac{q}{r^2}$$

$$\Phi = \iint_{S_R}\left(\vec{E},\vec{n}_0\right)d\sigma = \frac{q}{R^2}\iint_{S_R}d\sigma = \frac{q}{R^2}4\pi R^2 = 4\pi q$$

- Proprietățile fluxului unui vector printr-o suprafață

1. *Liniaritate*

$$\iint_{\Sigma}\left(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b},\vec{n}^0\right)d\sigma = \lambda\iint_{\Sigma}\left(\vec{a},\vec{n}^0\right)d\sigma + \mu\iint_{\Sigma}\left(\vec{b},\vec{n}^0\right)d\sigma \qquad (6)$$

2. *Aditivitate* Dacă $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$,

$$\iint_{\Sigma}\left(\vec{a},\vec{n}^0\right)d\sigma = \iint_{\Sigma_1}\left(\vec{a},\vec{n}^0\right)d\sigma + \iint_{\Sigma_2}\left(\vec{a},\vec{n}^0\right)d\sigma \qquad (7)$$

3. Fluxul depinde de orientarea suprafeței, adică de orientarea normalei la o suprafață. Conceptul de flux stabilit se referă doar la suprafețele cu două fețe

(orientabile). Notăm cu Σ^+ fața lui Σ pe care considerăm normala $\vec{n}$, şi cu Σ^- fața lui Σ pe care considerăm normala $-\vec{n}$. Evident $\vec{n}_-^0 = -\vec{n}_+^0$.

$$\iint_{\Sigma^-} \left(\vec{a}, \vec{n}_-^0\right) d\sigma = -\iint_{\Sigma^+} \left(\vec{a}, \vec{n}_+^0\right) d\sigma \tag{8}$$

Exemplu:

Calculați fluxul vectorului de poziție $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ prin suprafața unui cilindru circular drept cu înălțimea H, raza bazei R şi axa egală cu axa z.

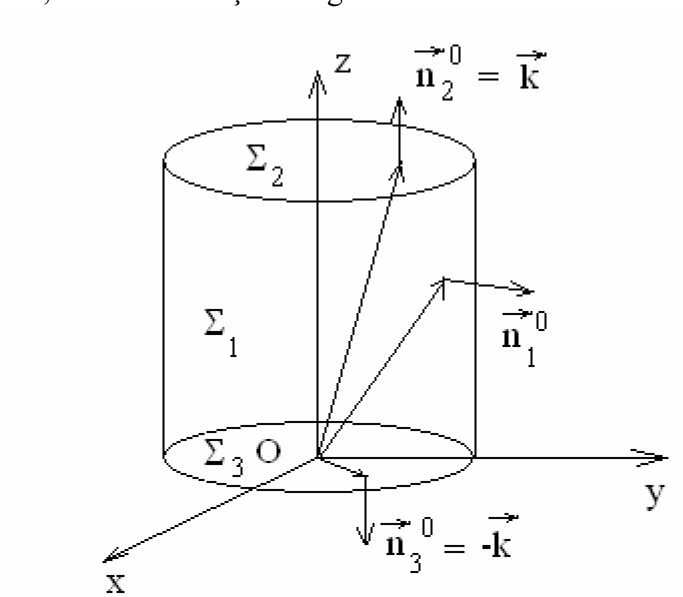


Figura 9.13

$$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$$

$$\left(\vec{r}, \vec{n}_1^0\right) = pr_{\vec{n}_1^0}\vec{r} = R$$

$$\Phi_1 = \iint_{\Sigma_1} \left(\vec{r}, \vec{n}_1^0\right) d\sigma = R\iint_{\Sigma_1} d\sigma = R2\pi RH$$

$$\left(\vec{r}, \vec{n}_2^0\right) = \left(\vec{r}, \vec{k}\right) = pr_{\vec{k}}\vec{r} = H$$

$$\Phi_2 = \iint_{\Sigma_2} \left(\vec{r}, \vec{n}_2^0\right) d\sigma = H\iint_{\Sigma_2} d\sigma = H\pi R^2$$

$$\left(\vec{r}, \vec{n}_3^0\right) = \left(\vec{r}, -\vec{k}\right) = pr_{-\vec{k}}\vec{r} = 0$$

$$\Phi_3 = \iint_{\Sigma_2} \left(\vec{r}, \vec{n}_3^0 \right) d\sigma = 0$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 2\pi R^2 H + \pi R^2 H + 0 = 3\pi R^2 H$$

9.5 Fluxul unui vector printr-o suprafață deschisă

Metode de calculare a fluxului unui vector printr-o suprafață deschisă:

- **Proiecția pe un plan de coordonate**.

Fie *S* o suprafață proiectabilă în mod unic într-un domeniu D_{xy} din planul *xy*. Suprafața *S* poate fi definită de ecuația $z = f(x, y)$, şi deoarece elementul de suprafață pe *S* este

$$d\sigma = \frac{dxdy}{|\cos\gamma|} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy \tag{9}$$

fluxul prin *S* înseamnă integrala dublă:

$$\Phi = \iint_S \left(\vec{a}, \vec{n}^0\right) d\sigma = \iint_{D_{xy}} \left. \frac{\left(\vec{a}, \vec{n}^0\right)}{|\cos\gamma|} \right|_{z=f(x,y)} dxdy \tag{10}$$

Observație: Vectorul unitate $\vec{n}^0$ al normalei la fața aleasă a suprafeței se determină cu:

$$\vec{n}^0 = \pm \frac{grad\left[z - f(x, y)\right]}{\left|grad\left[z - f(x, y)\right]\right|} = \pm \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} \tag{11}$$

Semnul plus corespunde unui unghi γ ascuțit între normala $\vec{n}^0$ şi axa *z*, iar semnul minus corespunde unui unghi γ obtuz.

Simbolul $\left. \frac{\left(\vec{a}, \vec{n}^0\right)}{|\cos\gamma|} \right|_{z=f(x,y)}$ înseamnă că ar trebui să substituim $f(x, y)$ în locul lui *z*.

Exemplu: Determinați fluxul vectorului $\vec{a} = y^2\vec{j} + z\vec{k}$ prin o parte a suprafeței parabolice $z = x^2 + y^2$ tăiată de planul $z = 2$. Normala se consideră spre exteriorul paraboloidului.

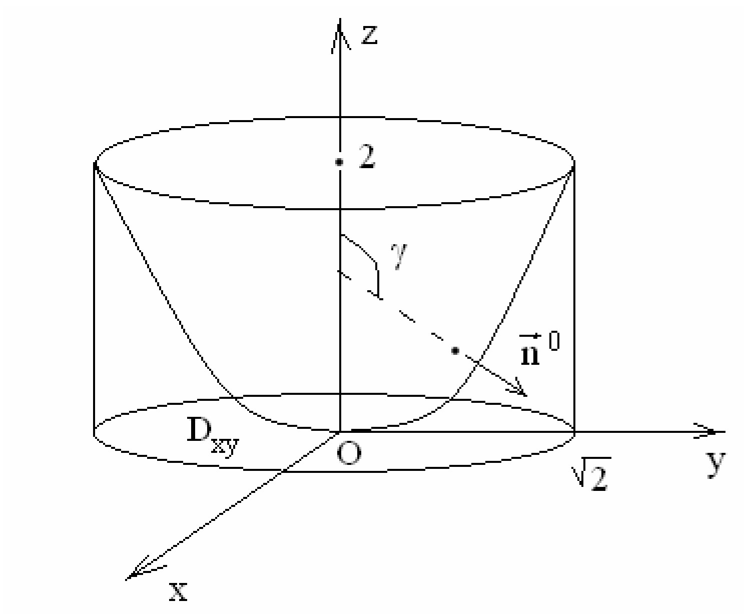


Figura 9.14

Proiecția suprafeței parabolice pe planul *xy* este:

$$D_{xy} = \{(x, y),\ x^2 + y^2 \le 2\}$$

Vectorul unitate normal la suprafață se calculează astfel:

$$\vec{n}^0 = \pm\frac{grad\left(z - x^2 - y^2\right)}{\left|grad\left(z - x^2 - y^2\right)\right|} = \pm\frac{-2x\vec{i} - 2y\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$$

Deoarece vectorul unitate normal la suprafață $\vec{n}^0$, formează un unghi obtuz cu axa *Oz*, alegem semnul minus.

$$\vec{n}^0 = \frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$$

$$\left(\vec{a}, \vec{n}^0\right) = \frac{2y^3 - z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$$

$$\cos\gamma = \measuredangle\left(\vec{n}^0, \vec{k}\right) = -\frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$$

$$\frac{1}{|\cos\gamma|}=\sqrt{4x^2+4y^2+1}$$

$$\left.\frac{\left(\vec{a},\vec{n}^0\right)}{|\cos\gamma|}\right|_{z=f(x,y)}=\left.\left(\frac{2y^3-z}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\cdot\sqrt{4x^2+4y^2+1}\right)\right|_{z=x^2+y^2}=2y^3-x^2-y^2$$

$$\Phi=\iint_S\left(\vec{a},\vec{n}^0\right)d\sigma=\iint_{D_{xy}}\left(2y^3-x^2-y^2\right)dxdy$$

Datorită simetriei domeniului D_{xy}, transformăm integrala în coordonate polare.

$$\begin{cases}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\end{cases}\qquad\qquad \begin{array}{l}\rho:0\to\sqrt{2}\\ \varphi:0\to 2\pi\end{array}$$

$$\Phi=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}\left(2\rho^3\sin^3\varphi-\rho^2\right)\rho d\rho=\int_0^{2\pi}\left.\left(2\sin^3\varphi\frac{\rho^5}{5}-\frac{\rho^4}{4}\right)\right|_0^{\sqrt{2}}d\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{2}{5}\left(\sqrt{2}\right)^5\sin^3\varphi-\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}\right)^4\right)d\varphi=$$

$$=\frac{8}{5}\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\varphi\right)\sin\varphi d\varphi-\int_0^{2\pi}d\varphi=-\frac{8}{5}\sqrt{2}\int_1^1\left(1-t^2\right)dt-2\pi=-2\pi$$