Cap. VIII Integrale curbilinii

8.1 Integrale curbilinii de primul tip

O *curbă parametrizată* continuă *AB* se defineşte cu ajutorul a două funcții continue $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$, unde $I = [t_0, t_1]$.

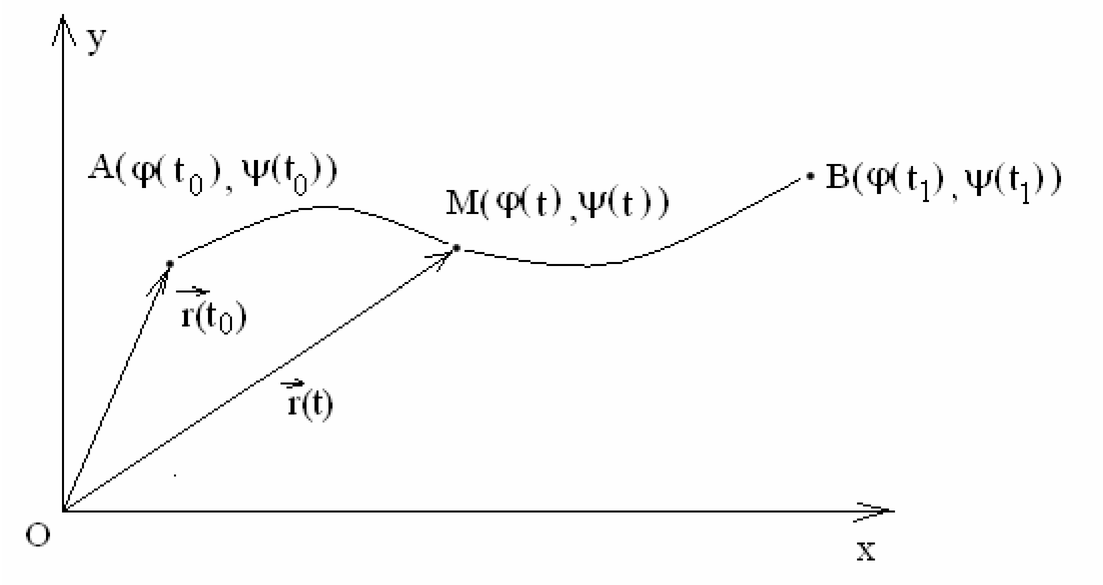

Figura 8.1

Ecuațiile *parametrice* ale curbei *AB* sunt:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \qquad t_0 \le t \le t_1 \qquad t \text{ parametru} \tag{1}$$

Ecuația *vectorială* a curbei *AB* este:

$$\vec{r}(t) = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j} \tag{2}$$

Curba *AB* este curbă parametrizată *netedă* , dacă funcțiile $\varphi(t)$ şi $\psi(t)$ au derivate continue pe intervalul $I = [t_0, t_1]$.

Fie *AB* o curbă plană, netedă sau netedă pe porțiuni, şi fie $f(M)$ o funcție definită pe *AB* sau pe un domeniu *D* care-l conține pe *AB*.

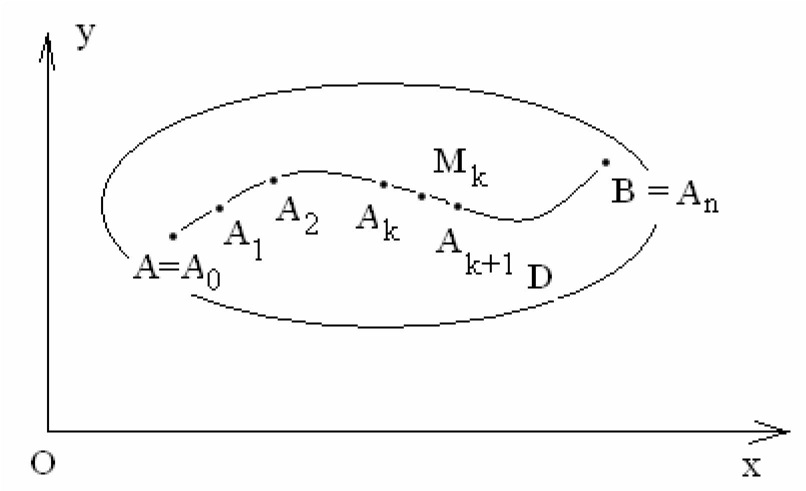

Figura 8.2

Considerăm punctele $A = A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n = B$ pe curba *AB*. Pe fiecare arc parțial $A_k A_{k+1}$ alegem un punct arbitrar M_k şi apoi construim suma:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(M_k)\Delta l_k \tag{3}$$

unde $\Delta l_k =$ lungimea arcului parțial $A_k A_{k+1}$.

Suma (3) se numeşte *sumă integrală* pentru $f(M)$ pe curba *AB*.
Fie Δl cea mai mare dintre lungimile arcelor parțiale, adică

$$\Delta l = \max_{0 \le k \le n-1} \Delta l_k \tag{4}$$

Definiție: Dacă suma integrală (3) are limită finită pentru $\Delta l \to 0$, care să fie independentă de modul de împărțire a lui *AB* în arce parțiale şi de alegerea punctelor M_k, atunci această limită se numeşte *integrală curbilinie de primul tip* a funcției scalare $f(M)$ pe curba *AB*.

Notații: $\int_{AB} f(M)\,dl$ sau $\int_{AB} f(x,y)\,dl$ unde punctul $(x,y) \in AB$

Conform definiției avem:

$$\int_{AB} f(M)\,dl = \lim_{\Delta l \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(M_k)\Delta l_k \tag{5}$$

Spunem că $f(M)$ este *integrabilă* pe curba *AB* , iar *AB* se numeşte *contur de integrare*.

În cele ce urmează demonstrăm existența integralei curbilinii de primul tip.

Astfel, pentru curba *AB* considerăm drept parametru, lungimea *l* a arcului care începe în punctul inițial *A*.

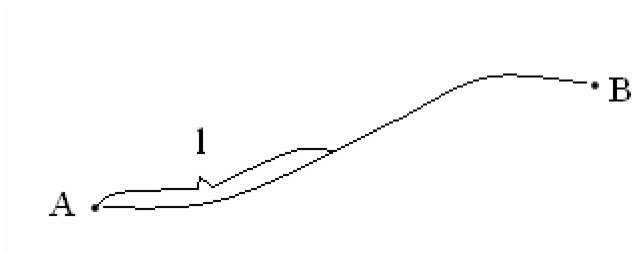

Figura 8.3

Cu acest parametru *l*, curba *AB* poate fi definită cu ajutorul *ecuațiilor naturale*:

$$\begin{cases} x = x(l) \\ y = y(l) \end{cases}, \qquad 0 \le l \le L \tag{6}$$

unde *L* este lungimea curbei *AB*. Cu această definiție a curbei, funcția $f(M)$, definită pe curbă va fi funcție de o singură variabilă l : $f\left(x(l), y(l)\right)$.

Notăm cu l_k valoarea lui *l* corespunzătoare punctului M_k de pe curbă, unde $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Suma integrală (3) poate fi rescrisă:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x(l_k), y(l_k)\right)\Delta l_k \tag{7}$$

Această sumă corespunde integralei definite:

$$\int_0^L f\left(x(l), y(l)\right) dl \tag{8}$$

Deoarece sumele integrale (3) şi (7) sunt egale, atunci şi integralele corespunzătoare sunt egale, şi avem:

$$\int_{AB} f(M)\,dl = \int_0^L f\left(x(l), y(l)\right) dl \tag{9}$$

Teoremă: Dacă $f(M)$ este *continuă* pe curba netedă *AB*, atunci integrala curbilinie $\int_{AB} f(M)\,dl$ există.

Proprietăți:

1.Valoarea integralei curbilinii de primul tip este independentă de sensul de integrare.

$$\int_{AB} f(M)\,dl = \int_{BA} f(M)\,dl \tag{10}$$

2. *Liniaritate*: Dacă există integralele curbilinii pentru funcțiile $f(M)$ şi $g(M)$ pe curba AB şi dacă $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci există şi integrala curbilinie a funcției $\alpha f(M) + \beta g(M)$ pe curba AB astfel încât:

$$\int_{AB} \left[\alpha f(M) + \beta g(M)\right] dl = \alpha \int_{AB} f(M)\,dl + \beta \int_{AB} g(M)\,dl \tag{11}$$

3. *Aditivitate*: Dacă $C \in AB$ şi există $\int_{AB} f(M)\,dl$, atunci există şi integralele: $\int_{AC} f(M)\,dl$, $\int_{CB} f(M)\,dl$ şi

$$\int_{AB} f(M)\,dl = \int_{AC} f(M)\,dl + \int_{CB} f(M)\,dl \tag{12}$$

4. Dacă $f(M) \geq 0$ pe curba *AB*, atunci

$$\int_{AB} f(M)\,dl \geq 0 \tag{13}$$

5. Dacă $f(M)$ este integrabilă pe curba *AB*, atunci şi $|f(M)|$ este integrabilă pe curba *AB* şi are loc:

$$\left|\int_{AB} f(M)\,dl\right| \leq \int_{AB} |f(M)|\,dl \tag{14}$$

6. *Formula de medie*: Dacă $f(M)$ este *continuă* pe curba *AB*, atunci pe curbă există cel puțin un punct M_m astfel încât:

$$\int_{AB} f(M)\,dl = f(M_m)L \tag{15}$$

unde *L* este lungimea curbei *AB*.

- *Calcularea integralei curbilinii de primul tip*

Fie curba AB definită prin ecuațiile parametrice:

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}, \qquad t_0 \le t \le t_1 \qquad t \text{ parametru} \qquad \begin{matrix} A \to t=t_0 \\ B \to t=t_1 \end{matrix}$$

<u>Ipoteză</u>: funcțiile $\varphi(t)$ şi $\psi(t)$ sunt continue pe $[t_0,t_1]$ împreună cu derivatele $\varphi'(t)$ şi $\psi'(t)$ şi mai mult

$$[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2>0$$

Elementul de arc al curbei este:

$$dl=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt \tag{16}$$

Atunci:

$$\int_{AB} f(x,y)\,dl=\int_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt \tag{17}$$

Integrala din dreapta este una definită.

Observație: Dacă curba AB este definită în mod explicit, adică $y=g(x)$, $x\in[a,b]$, unde $g(x)$ este continuu diferențiabilă pe $[a,b]$, şi

$$\begin{matrix} A \to x=a \\ B \to x=b \end{matrix}$$

iar x este considerat parametru, atunci:

$$\int_{AB} f(x,y)\,dl=\int_a^b f(x,g(x))\sqrt{1+[g'(x)]^2}\,dx \tag{18}$$

Integrala din dreapta este una definită.

- *Integralele curbilinii de primul tip în spațiu*

Fie curba AB definită prin ecuațiile parametrice:

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t), \\ z=\omega(t) \end{cases} \qquad t_0 \le t \le t_1 \qquad t \text{ parametru} \tag{19}$$

Integrala curbilinie de primul tip a unei funcții scalare pe această curbă se reduce la o integrală definită astfel:

$$\int_{AB} f(x,y,z)\,dl = \int_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\omega'(t)]^2}\,dt \tag{20}$$

Exemplu:
Calculați integrala curbilinie $\int_L (x+y)\,dl$, unde L este conturul triunghiului cu vârfurile în punctele $O(0,0)$, $A(1,0)$ şi $B(0,1)$.

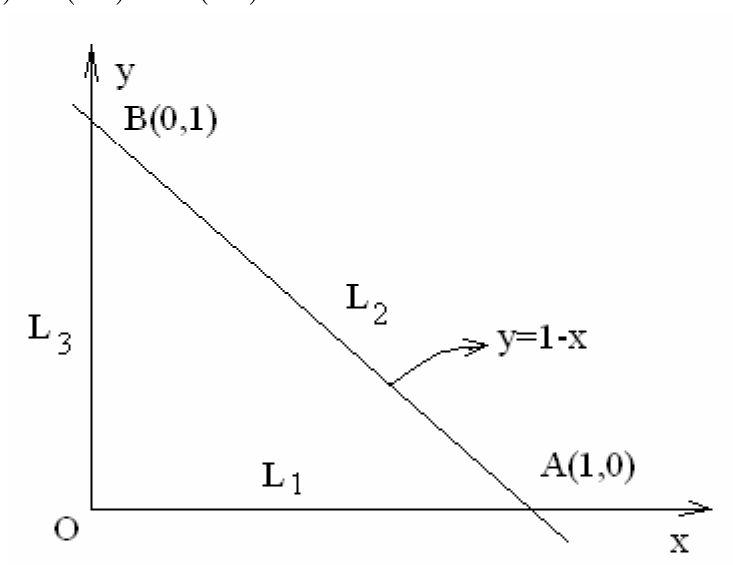

Figura 8.4

Din aditivitate, avem:

$$\int_L (x+y)\,dl = \int_{OA}(x+y)\,dl + \int_{AB}(x+y)\,dl + \int_{BO}(x+y)\,dl$$

Integrala pe *OA:* $0 \le x \le 1$, $y=0$, $dl=dx$, $y'=0$, $dl=\sqrt{1+0}\,dx$

$$\Rightarrow \qquad \int_{OA}(x+y)\,dl = \int_0^1 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Integrala pe *AB*: $0 \le x \le 1$, $y = 1-x$, $y'=-1$, $dl=\sqrt{1+(-1)^2}\,dx=\sqrt{2}\,dx$

$$\Rightarrow \quad \int_{AB} (x+y)\,dl = \int_{BA} (x+y)\,dl = \int_0^1 (x+1-x)\sqrt{2}dx = \sqrt{2}x\Big|_0^1 = \sqrt{2}$$

Integrala pe *BO:* $0 \le y \le 1$, $x = 0$, $dl = dy$

$$\Rightarrow \quad \int_{BO} (x+y)\,dl = \int_0^1 y\,dy = \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\int_L (x+y)\,dl = \frac{1}{2} + \sqrt{2} + \frac{1}{2} = 1 + \sqrt{2}$$

8.2 Integrale curbilinii de al doilea tip

Fie *AB* o curbă plană, netedă sau netedă pe porțiuni şi orientată, şi fie

$$\vec{F}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} \tag{21}$$

o funcție vectorială definită pe un domeniu *D* care conține curba *AB*.

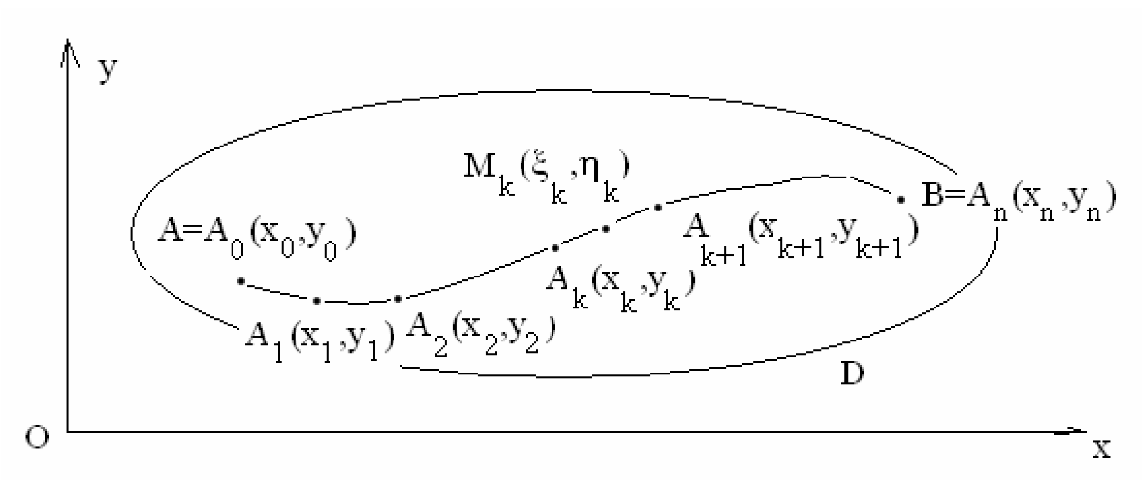

Figura 8.5

Impărțim curba *AB* în arce parțiale cu ajutorul punctelor $A = A_0, A_1, A_2, \dots, A_n = B$. Aceste puncte au coordonatele $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ respectiv. Pe fiecare arc parțial $A_k A_{k+1}$ alegem un punct arbitrar $M_k(\xi_k, \eta_k)$ şi formăm suma:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k \tag{22}$$

unde $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ sunt componentele lungimii arcului parțial. Considerăm Δl cea mai mare dintre lungimile arcelor parțiale $A_k A_{k+1}$.

Definiție: Dacă suma integrală are limită finită pentru $\Delta l \to 0$, care să fie independentă de modul de împărțire a lui *AB* în arce parțiale şi de alegerea punctelor M_k, atunci această limită se numeşte *integrală curbilinie de al doilea tip* a funcției vectoriale $\vec{F}(M)$ pe curba *AB*.

Notație: $\int_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$

Conform definiției

$$\int_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \lim_{\Delta l \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \left[P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k \right] \tag{23}$$

Teoremă: Dacă pe un domeniu *D* care conține curba *AB*, funcțiile $P(x, y)$ şi $Q(x, y)$ sunt *continue*, atunci există integrala

$$\int_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

Fie $\vec{r}(M) = x\vec{i} + y\vec{j}$ vectorul de poziție al punctului $M(x, y)$. Atunci, $d\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy$ şi sub integrala de mai sus avem un produs scalar:

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \left(\vec{F}, d\vec{r}\right) \tag{24}$$

In această situație integrala curbilinie de al doilea tip a funcției vectoriale $\vec{F}(M)$ pe curba *AB* poate fi notată pe scurt:

$$\int_{AB} \left(\vec{F}, d\vec{r}\right) \tag{25}$$

- *Calcularea integralei curbilinii de al doilea tip*

Fie curba AB definită prin ecuațiile parametrice:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \qquad t_0 \le t \le t_1$$

Funcțiile $\varphi(t)$ şi $\psi(t)$ sunt continue pe $[t_0, t_1]$ împreună cu derivatele lor $\varphi'(t)$ şi $\psi'(t)$ şi pe măsură ce t parcurge intervalul $[t_0, t_1]$, punctul $M(x, y)$ se mişcă pe curba AB de la A la B.

Dacă funcțiile $P(x, y)$ şi $Q(x, y)$ sunt continue pe un domeniu D care conține curba AB atunci integrala curbilinie se reduce la o integrală definită:

$$\int_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int_{t_0}^{t_1} \Big[P\big(\varphi(t), \psi(t)\big)\varphi'(t) + Q\big(\varphi(t), \psi(t)\big)\psi'(t) \Big] dt \qquad (26)$$

Exemplu:
Calculați integrala $\int_{AB} xdy - ydx$

1. pe segmentul de dreaptă care uneşte punctele $A(0,0)$ şi $B(1,1)$
2. pe parabola $y = x^2$ care conectează aceleaşi puncte

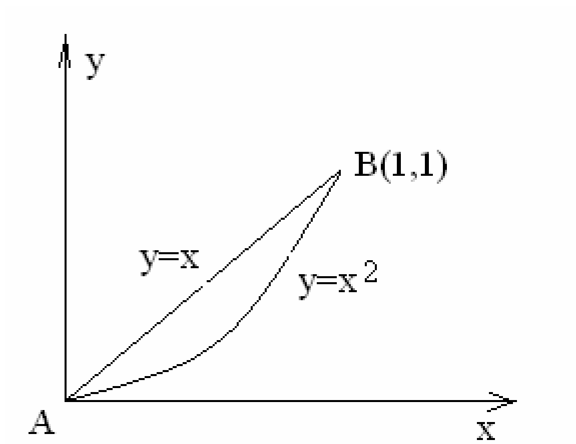

Figura 8.6

1) Ecuația dreptei AB este $y = x$, x fiind parametru cu $0 \le x \le 1$, iar $dy = dx$.

$$\int_{AB} xdy - ydx = \int_0^1 (xdx - xdx) = 0$$

2) Ecuația parabolei AB este $y = x^2$, x fiind parametru cu $0 \le x \le 1$, iar $dy = 2xdx$.

$$\int_{AB} xdy - ydx = \int_0^1 \left(x2xdx - x^2dx\right) = \int_0^1 x^2dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Observație: Valoarea integralei curbilinii de al doilea tip depinde de drumul de integrare.

- *Proprietățile integralei curbilinii de al doilea tip*

1. *Liniaritate* Dacă există integralele $\int_{AB} \left(\vec{F}_1, d\vec{r}\right)$ și $\int_{AB} \left(\vec{F}_2, d\vec{r}\right)$, atunci $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ există și integrala:

$$\int_{AB} \left(\alpha\vec{F}_1 + \beta\vec{F}_2, d\vec{r}\right) = \alpha \int_{AB} \left(\vec{F}_1, d\vec{r}\right) + \beta \int_{AB} \left(\vec{F}_2, d\vec{r}\right) \qquad (27)$$

2. *Aditivitate* Dacă curba AB este reuniunea părților AC și CB și dacă există $\int_{AB} \left(\vec{F}, d\vec{r}\right)$, atunci există și integralele $\int_{AC} \left(\vec{F}, d\vec{r}\right)$ și $\int_{CB} \left(\vec{F}, d\vec{r}\right)$ și mai mult,

$$\int_{AB} \left(\vec{F}, d\vec{r}\right) = \int_{AC} \left(\vec{F}, d\vec{r}\right) + \int_{CB} \left(\vec{F}, d\vec{r}\right) \qquad (28)$$

3. Spre deosebire de integrala curbilinie de primul tip, integrala curbilinie de al doilea tip depinde de direcția de parcurgere a curbei AB și schimbă semnul la modificarea sensului de parcurgere al curbei, adică

$$\int_{BA} Pdx + Qdy = -\int_{AB} Pdx + Qdy \qquad (29)$$

Observație: Ultima proprietate corespunde interpretării fizice a integralei curbilinii de al doilea tip ca lucrul mecanic efectuat de forțele de câmp $\vec{F}$ de-a lungul unui drum: modificarea sensului de mișcare pe curbă schimbă semnul lucrului mecanic efectuat de câmp de-a lungul curbei.

- *Relația dintre integralele curbilinii de primul și al doilea tip*

Considerăm integrala curbilinie de al doilea tip:

$$\int_{AB} \left(\vec{F}, d\vec{r}\right) \qquad (30)$$

unde AB este o curbă orientată (A este punctul inițial şi B este punctul final) definită de ecuația vectorială:

$$\vec{r} = \vec{r}(l) \tag{31}$$

unde l este lungimea curbei măsurată în sens pozitiv.

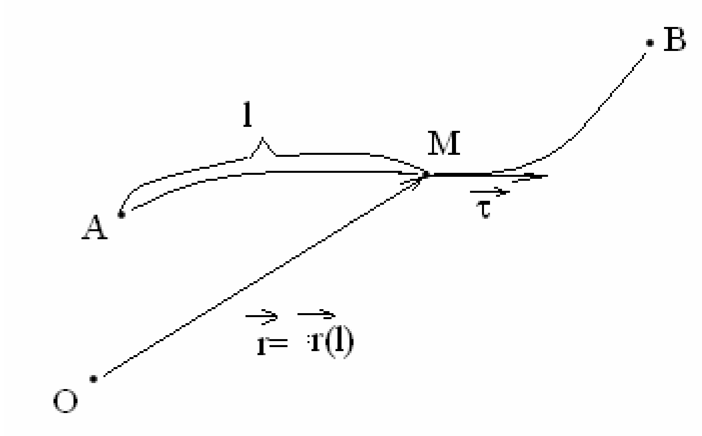

Figura 8.7

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{dl} \qquad d\vec{r} = \vec{\tau}\, dl \tag{32}$$

Vectorul $\vec{\tau}$ este vectorul unitate tangent la curba AB în punctul M.

$$\int_{AB} \left(\vec{F}, d\vec{r}\right) = \int_{AB} \left(\vec{F}, \vec{\tau}\, dl\right) = \int_{AB} \left(\vec{F}, \vec{\tau}\right) dl \tag{33}$$

Ultima integrală fiind o integrală curbilinie de primul tip.

8.3 Formula lui Green

Stabileşte o legătură între integrala *curbilinie* şi integrala *dublă*, folosită mai ales pentru calcularea integralelor curbilinii de-a lungul drumurilor închise.

Teorema Green: Dacă pe un domeniu închis D din planul xy, mărginit de un contur L neted pe porțiuni, funcțiile $P(x,y)$ şi $Q(x,y)$ sunt continue şi au derivate parțiale continue $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, atunci:

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \qquad (34)$$

Integrarea are loc de-a lungul frontierei *L* a domeniului *D*, frontieră parcursă astfel încât domeniul *D* să rămână în stânga.

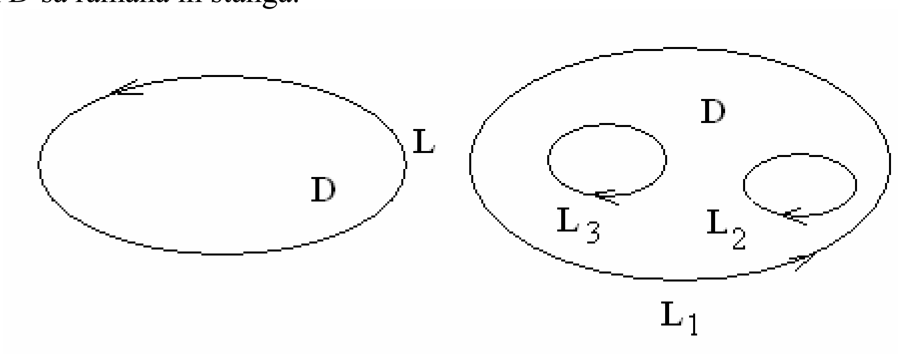

Figura 8.8

- *Aria unei figuri plane*

Considerăm $P(x,y) = -y$, $Q(x,y) = x$. Atunci,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -1$$

iar cu formula Green (34) obținem:

$$\oint_L -ydx + xdy = \iint_D 2dxdy = 2S$$

unde *S* este aria domeniului *D*.
In acest mod, am obținut o formulă pentru calculul ariei *S* a unui domeniu plan *D* folosind integrala curbilinie pe frontiera *L* a domeniului *D*:

$$S = \frac{1}{2} \oint_L xdy - ydx \qquad (35)$$

Exemplu:

Calculați aria domeniului mărginit de elipsa *L:* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$L : \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi)$$

$$S=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(a\cos t\ b\cos t+b\sin t\ a\sin t\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)dt=\pi ab$$

Observație: Fie *AB* o curbă în spațiu, netedă pe porțiuni, orientată. Presupunem că pe un domeniu Ω, care conține curba *AB*, este definită o funcție vectorială:

$$\vec{F}=P\left(x,y,z\right)\vec{i}+Q\left(x,y,z\right)\vec{j}+R\left(x,y,z\right)\vec{k} \qquad (36)$$

unde *P*, *Q* și *R* sunt funcții continue pe Ω.

Integrala curbilinie de al doilea tip în spațiu a funcției vectoriale $\vec{F}$ pe curba orientată *AB* este:

$$\int_{AB}\left(\vec{F},d\vec{r}\right)=\int_{AB}P\left(x,y,z\right)dx+Q\left(x,y,z\right)dy+R\left(x,y,z\right)dz \qquad (37)$$

Exerciții:

1) Calculați $\int_L xy\ dl$, unde *L* este un sfert din elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, aflat în primul cadran.

$$L:\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases} \qquad t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\int_L xy\ dl=\int_0^{\pi/2}a\cos t\ b\sin t\sqrt{\left(-a\sin t\right)^2+\left(b\cos t\right)^2}\,dt=ab\int_0^{\pi/2}\sin t\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt$$

$$\varphi=\sin t$$
$$d\varphi=\cos t\ dt$$

$$\int_L xy\ dl=ab\int_0^1\varphi\sqrt{a^2\varphi^2+b^2-b^2\varphi^2}\ d\varphi=ab\int_0^1\varphi\sqrt{b^2+\left(a^2-b^2\right)\varphi^2}\,d\varphi$$

$$\psi=b^2+\left(a^2-b^2\right)\varphi^2$$
$$d\psi=\left(a^2-b^2\right)2\varphi d\varphi$$

$$\int_L xy\, dl = ab\frac{1}{2\left(a^2-b^2\right)}\int_{b^2}^{a^2}\sqrt{\psi}\,d\psi = ab\frac{1}{2\left(a^2-b^2\right)}\left.\frac{\psi^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right|_{b^2}^{a^2} = \frac{ab}{3}\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2} = \frac{ab\left(a^2+ab+b^2\right)}{3\left(a+b\right)}$$

2) Calculați $\int_L \frac{dl}{x^2+y^2+z^2}$, unde L este prima rotație a curbei elicoidale:

$$L:\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases} \qquad t\in\left[0,2\pi\right]$$

$$\int_L \frac{dl}{x^2+y^2+z^2} = \int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{\left(-a\sin t\right)^2+\left(a\cos t\right)^2+b^2}}{a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t+b^2t^2}dt$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2t^2}dt = \sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{a^2+b^2t^2} =$$

$$\varphi = bt$$
$$d\varphi = bdt$$

$$\int_L \frac{dl}{x^2+y^2+z^2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}\int_0^{2\pi b}\frac{d\varphi}{a^2+\varphi^2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}\frac{1}{a}\left. arctg\frac{\varphi}{a}\right|_0^{2\pi b}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}arctg\frac{2\pi b}{a}$$

3) Calculați $\int_L ydx+xdy$, unde L este arcul de curbă $y=x^3$, care unește punctul $\left(0,0\right)$ cu punctul $\left(2,8\right)$.

Considerăm x parametru, $0\le x\le 2$, $y=x^3$, $dy=3x^2dx$.

$$\int_L ydx+xdy = \int_0^2\left(x^3dx+x3x^2dx\right) = 4\int_0^3 x^3dx = 4\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^2 = 16$$

4) Calculați $\int_L y^2dx+x^2dy$, unde L este este jumătatea superioară a elipsei:

$$L:\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \qquad t\in[0,\pi)$$

parcursă în sens invers acelor de ceas.

$$\int_L y^2dx + x^2dy = \int_0^{\pi}\Big((b\sin t)^2(-a\sin t)+(a\cos t)^2\, b\cos t\Big)dt$$

$$=\int_0^{\pi}\left(-ab^2\sin^3 t + a^2b\cos^3 t\right)dt = -ab^2\int_0^{\pi}\left(1-\cos^2 t\right)\sin t dt + a^2b\int_0^{\pi}\left(1-\sin^2 t\right)\cos t dt$$

$$= ab^2\int_{+1}^{-1}\left(1-\varphi^2\right)d\varphi + a^2b\int_0^0\left(1-\varphi^2\right)d\varphi = ab^2\left(\varphi-\frac{\varphi^3}{3}\right)\Bigg|_1^{-1} = ab^2\left(-2+\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{3}ab^2$$

8.4 Aplicații ale integralelor curbilinii

□ *Masa unei curbe*

O masă *m* este distribuită pe o curbă netedă *L* cu o densitate liniară $f(M)$. Dacă $f(M)$ şi *L* sunt cunoscute, ne propunem să determinăm masa *m*.

Împărțim curba *L* în *n* părți arbitrare M_kM_{k+1} $(k=0,1,\ldots,n-1)$ şi estimăm masa fiecărei părți M_kM_{k+1} presupunând că pe fiecare din ele densitatea este constantă şi egală cu densitatea dintr-un punct al bucății, de exemplu fie acesta punctul cel mai din stânga. Astfel, densitatea pe bucata M_kM_{k+1} este $f(M_k)$.

Valoarea aproximativă a masei totale *m* a curbei este:

$$m \simeq \sum_{k=0}^{n-1} f(M_k)\Delta l_k \tag{38}$$

unde Δl_k este lungimea părții M_kM_{k+1}. Eroarea de aproximare va fi cu atât mai mică cu cât numărul bucăților în care e împărțită curba este mai mare. Considerăm:

$$\Delta l = \max_{0\le k\le n-1}\Delta l_k \tag{39}$$

Valoarea exactă a masei curbei L se obține trecând la limită în suma (38):

$$m = \lim_{\Delta l \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(M_k\right) \Delta l_k \tag{40}$$

Cum această limită reprezintă definiția integralei curbilinii de primul tip, avem:

$$m = \int_L f\left(M\right) dl \tag{41}$$

□ *Aria unei suprafețe cilindrice*

Considerăm o curbă AB în planul xy şi o funcție continuă $f\left(M\right) \geq 0$ definită pe curbă. Mulțimea de puncte $\left(M, f\left(M\right)\right)$ sau $\left(x, y, f\left(x, y\right)\right)$ formează o curbă pe suprafața cilindrică cu baza curba AB şi generatoarele paralele cu axa Oz. Vrem să determinăm aria suprafeței cilindrice $ABCD$ mărginită inferior de curba AB, superior de curba $z = f\left(M\right)$, $M \in$ curbei AB, şi verticalele AC şi BD.

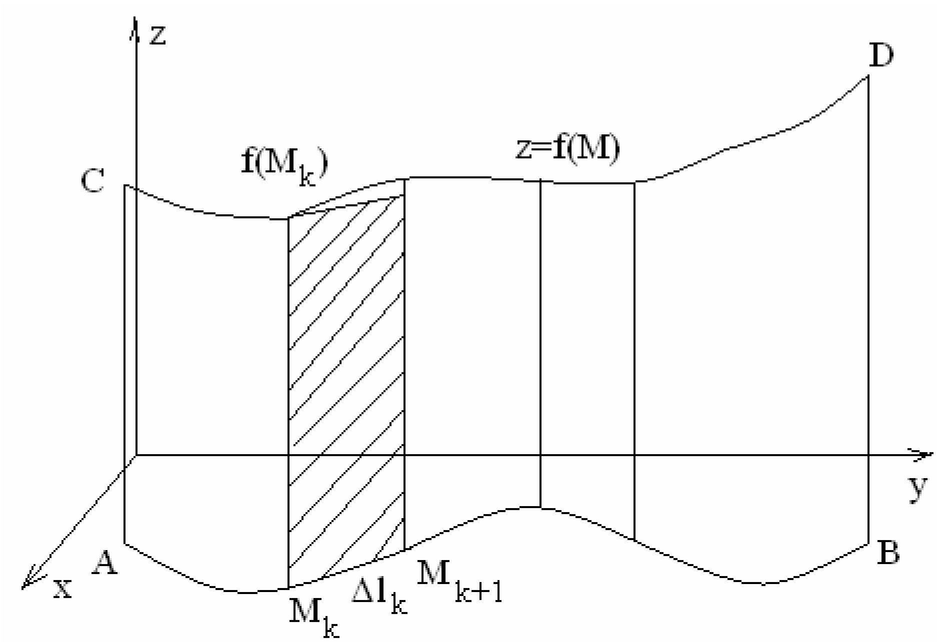

Figura 8.9

Pentru a rezolva problema, considerăm etapele:

1) Împărțim curba AB în n arce cu punctele:

$$A = M_0, M_1, \ldots, M_k, M_{k+1}, \ldots, M_n = B$$

2) Din fiecare punct M_k ridicăm perpendiculare pe planul *xy*, cu înălțimile $f(M_k)$. Acestea vor împărți suprafața cilindrică *ABCD* în *n* fâşii.

3) Înlocuim fiecare fâşie cu un dreptunghi cu baza Δl_k, unde Δl_k este lungimea arcului $M_k M_{k+1}$ şi înălțimea egală cu $f(M)$ într-un punct al arcului, de exemplu M_k. Aria aproximativă a fâşiei *k* va fi $f(M_k)\Delta l_k$, iar a suprafeței cilindrice *ABCD*:

$$S \simeq \sum_{k=0}^{n-1} f(M_k)\Delta l_k \tag{42}$$

Continuarea in curs ☺

- □ *Calcularea lucrului mecanic*