7.7 Calcularea integralei triple în coordonate carteziene

Ca şi în cazul integralei duble, problema se reduce la a scrie integrala ca o succesiune de integrale simple.

Presupunem că $f(x, y, z)$ este o funcţie continuă pe un domeniu $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

- Considerăm domeniul Ω un paralelipiped dreptunghic.

$$\Omega = \{(x, y, z),\ \ a \le x \le b,\ \ c \le y \le d,\ \ l \le z \le m\}$$

Proiecţia lui Ω pe planul *yz* este dreptunghiul:

$$R = \{(y, z),\ \ c \le y \le d,\ \ l \le z \le m\}$$

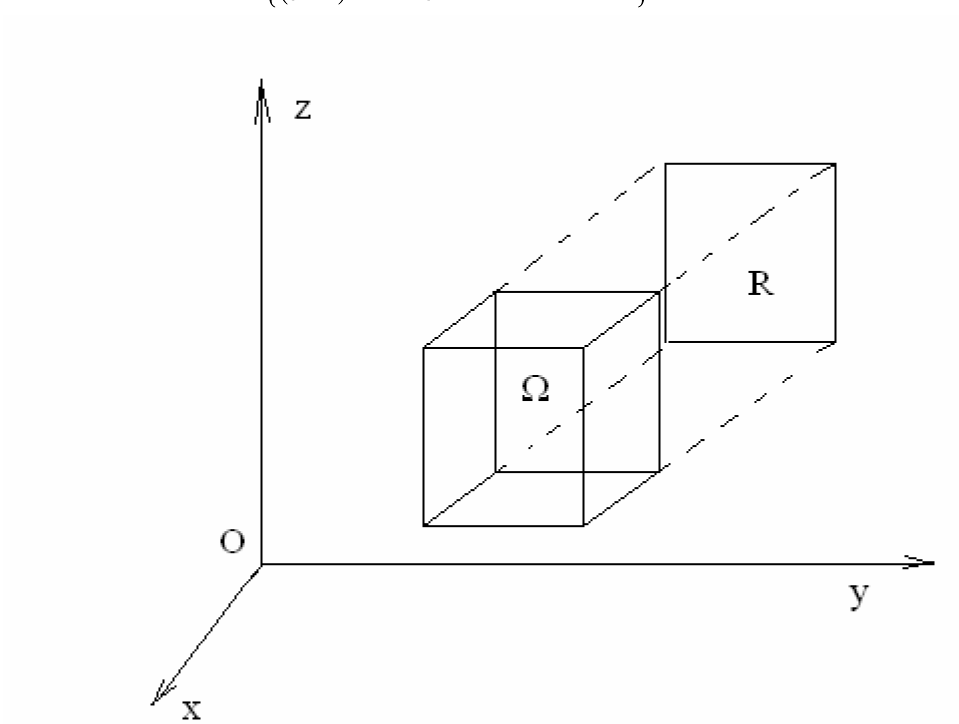

Figura 7.27

Atunci, vom avea:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)\,dV = \int_a^b dx \iint_R f(x, y, z)\,dS \tag{76}$$

Substituind integrala dublă cu o succesiune de integrale simple, obţinem:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dV = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_l^m f(x,y,z)\,dz \qquad (77)$$

Deci, dacă domeniul Ω este un paralelipiped dreptunghic, putem reduce integrala triplă la trei integrale simple.

Formula (77) poate fi rescrisă astfel:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dV = \iint\limits_{D} \left(\int\limits_l^m f(x,y,z)\,dz \right) dxdy \qquad (78)$$

unde $D = \{(x,y),\ a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$ este un dreptunghi în planul *xy*. Acest dreptunghi este proiecția ortogonală a paralelipipedului Ω pe planul *xy*.

Exemplu:
Calculați:

$$\iiint\limits_{\Omega} (xyz + x)\,dxdydz\,, \qquad \Omega = [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$$

$$\iiint\limits_{\Omega} (xyz + x)\,dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 (xyz + x)\,dz$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \left(xy\frac{z^2}{2} + xz \Big|_0^1 \right) dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \left(\frac{xy}{2} + x \right) dy = \int\limits_0^1 \left(\frac{xy^2}{4} + xy \right)\Bigg|_0^1 dx = \int\limits_0^1 \left(\frac{5}{4}x \right) dx = \frac{5}{4}\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{5}{8}$$

- Considerăm domeniul Ω astfel încât o suprafață *S* care mărgineşte domeniul Ω este intersectată de orice dreaptă paralelă cu axa *z* în nu mai mult de două puncte sau după o dreaptă. Presupunem că suprafața S_1 mărgineşte inferior domeniul Ω şi este definită de funcția $z = \varphi_1(x,y)$ şi că suprafața S_2 mărgineşte superior domeniul Ω şi este definită de funcția $z = \varphi_2(x,y)$.

Proiectăm S_1 şi S_2 pe planul *xy* într-un domeniu *D* mărginit de curba *L* . Domeniul Ω este mărginit lateral de o suprafață cilindrică S_3 cu generatoarele paralele cu axa *z*.
Prin analogie cu relația (78) putem scrie:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dV = \iint\limits_{D} \left(\int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dxdy \qquad (79)$$

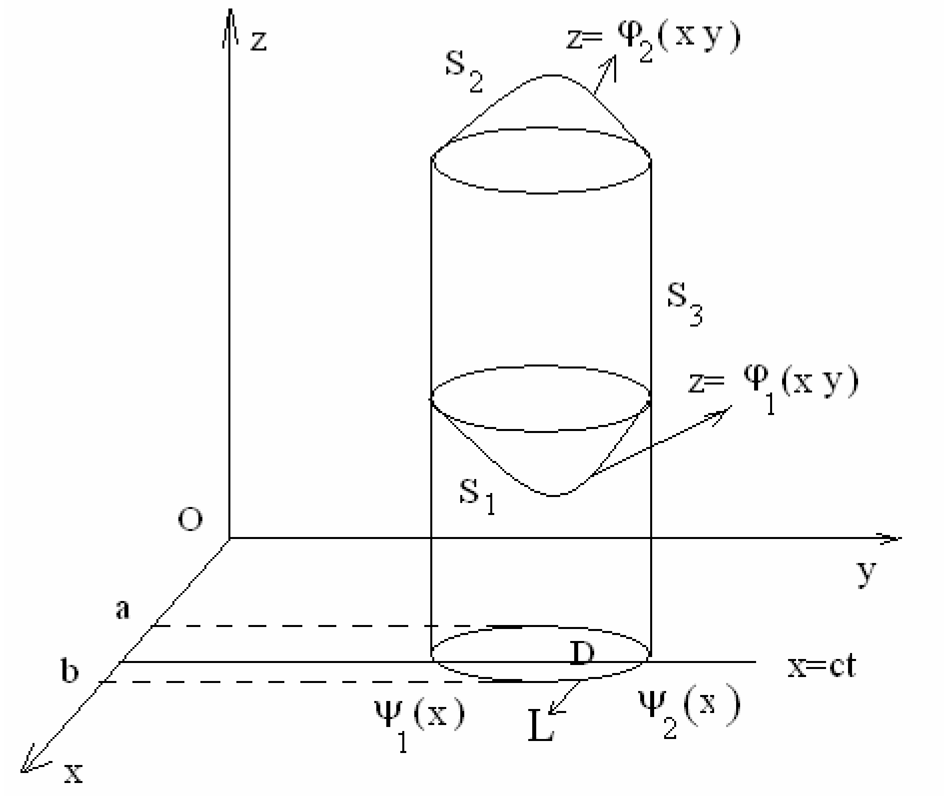

Figura 7.28

Dacă domeniul *D* din planul *xy* este mărginit de curbele $y=\psi_1(x)$ şi $y=\psi_2(x)$ şi $a \le x \le b$, atunci integrala dublă poate fi înlocuită cu o succesiune de integrale simple:

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dV = \int_a^b dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \qquad (80)$$

Aceasta este o generalizare a relației (77).

Exemplu:
Calculați volumul tetraedrului mărginit de planele $x=0$, $y=0$, $z=0$ şi $x+2y+z-6=0$.

$$x: 0 \to 6$$
$$y: 0 \to -\frac{x}{2}+3$$
$$z: 0 \to 6-x-2y$$

$$V = \iiint_{\Omega} 1\,dxdydz = \int_0^6 dx \int_0^{3-\frac{x}{2}} dy \int_0^{6-x-2y} dz$$

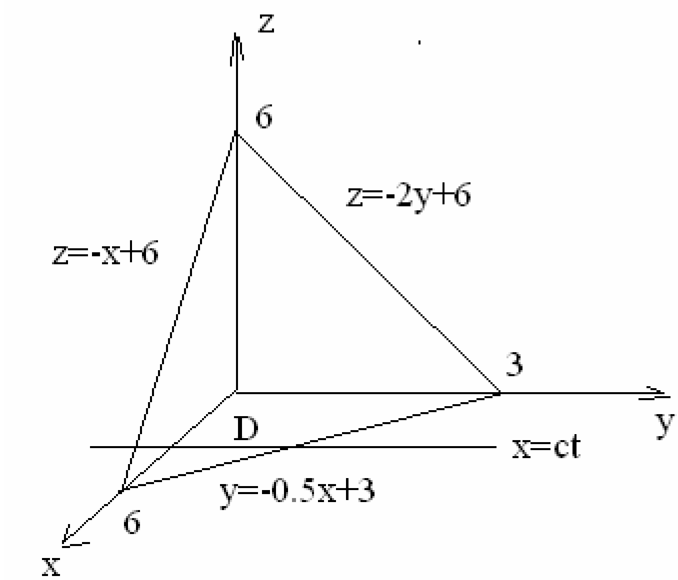

Figura 7.29

$$V=\int_0^6 dx\int_0^{3-\frac{x}{2}}(6-x-2y)\,dy=\int_0^6\left(6y-xy-2\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{3-\frac{x}{2}}dx=\int_0^6\left(6\left(3-\frac{x}{2}\right)-x\left(3-\frac{x}{2}\right)-\left(3-\frac{x}{2}\right)^2\right)dx$$

$$=\int_0^6\left(18-3x-3x+\frac{x^2}{2}-9+3x-\frac{x^2}{4}\right)dx=\int_0^6\left(9-3x+\frac{x^2}{4}\right)dx=\left(9x-3\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{12}\right)\Bigg|_0^6=54-54+18=18$$

7.8 Integrala triplă în coordonate cilindrice şi sferice

Într-o integrală triplă variabilele sunt schimbate în aceeaşi manieră ca într-o integrală dublă. Presupunem că $f(x,y,z)$ este o funcție continuă pe un domeniu închis $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ şi funcțiile:

$$x=x(\xi,\eta,\tau),\quad y=y(\xi,\eta,\tau),\quad z=z(\xi,\eta,\tau)\qquad(81)$$

sunt continue împreună cu derivatele lor parțiale pe un domeniu închis Ω^*. Mai mult, presupunem că funcțiile (81) stabilesc o corespondență *unu-la-unu* între punctele $(\xi,\eta,\tau)\in\Omega^*$ şi punctele $(x,y,z)\in\Omega$.

O schimbare de variabile într-o integrală triplă este dictată de formula:

$$\iiint\limits_{\Omega} f\left(x,y,z\right)dxdydz = \iiint\limits_{\Omega^*} f\left[x\left(\xi,\eta,\tau\right),y\left(\xi,\eta,\tau\right),z\left(\xi,\eta,\tau\right)\right]\left|J\right|d\xi d\eta d\tau \qquad (82)$$

unde *J* este jacobianul transformării (81):

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial x}{\partial \tau} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \tau} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \tau} \end{vmatrix} \qquad (83)$$

Practic, frecvent o integrală triplă în coordonate carteziene este transformată într-o integrală în coordonate cilindrice sau sferice.

- *Integrale triple în coordonate cilindrice*

În coordonate cilindrice, poziția unui punct $P\left(x,y,z\right)$ în spațiu este determinată de trei numere ρ,φ,z dintre care ρ şi φ sunt coordonatele polare ale proiecției P' a lui *P* pe planul *xy* şi *z* este coordonata *z* a lui *P*. Numerele $\left(\rho,\varphi,z\right)$ se numesc *coordonate cilindrice* ale punctului *P*.

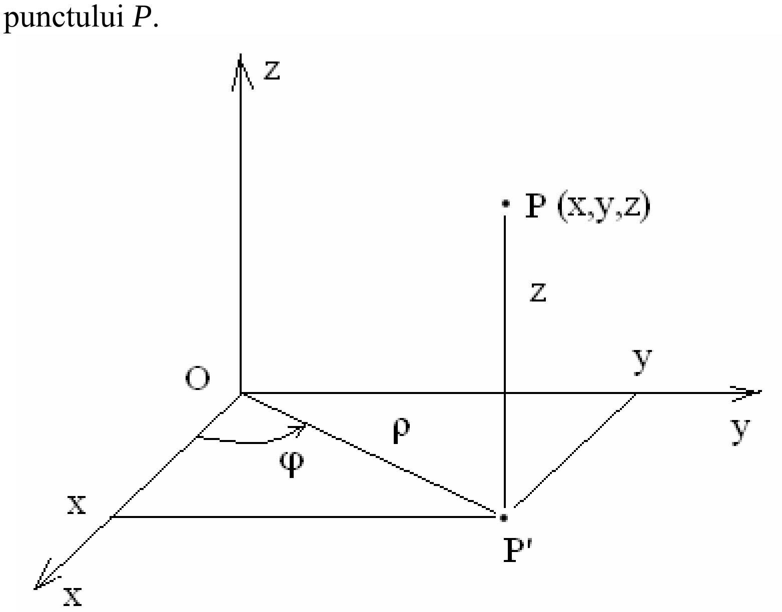

Figura 7.30 Coordonatele cilindrice

$$\begin{aligned} &0 \le \rho < +\infty \\ &0 \le \varphi < 2\pi \\ &-\infty < z < +\infty \end{aligned} \qquad (84)$$

În coordonate cilindrice, suprafețele de coordonate $\rho = ct$, $\varphi = ct$ şi $z = ct$ sunt respectiv: cilindri circulari cu axa egală cu axa z, semiplane adiacente axei z şi plane paralele cu planul *xy*.

Relațiile dintre coordonatele carteziene şi cele cilindrice sunt:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \tag{85}$$

Aceste funcții transformă domeniul Ω^* în Ω şi jacobianul transformării este:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho \tag{86}$$

Deoarece $\rho \geq 0$, atunci $|J| = \rho$ şi pentru integrale triple formula (82) de transformare din coordonate carteziene în coordonate cilindrice devine:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)\,dxdydz = \iiint_{\Omega^*} f\left[\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z\right]\rho d\rho d\varphi dz \tag{87}$$

Exemplu:
Determinați volumul corpului mărgint de suprafețele: $z = x^2 + y^2$ şi $z = 2 - x^2 - y^2$.

Intersecția celor două suprafețe este curba:

$$L: \begin{cases} \rho = 1 & \text{cilindru} \\ z = 1 & \text{plan} \end{cases}$$

Cu proiecția pe planul *xy*:

$$L': \begin{cases} \rho = 1 & \text{cilindru} \\ z = 0 & \text{plan} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\rho : 0 \to 1 \\ &\varphi : 0 \to 2\pi \\ &z : \rho^2 \to 2 - \rho^2 \end{aligned}$$

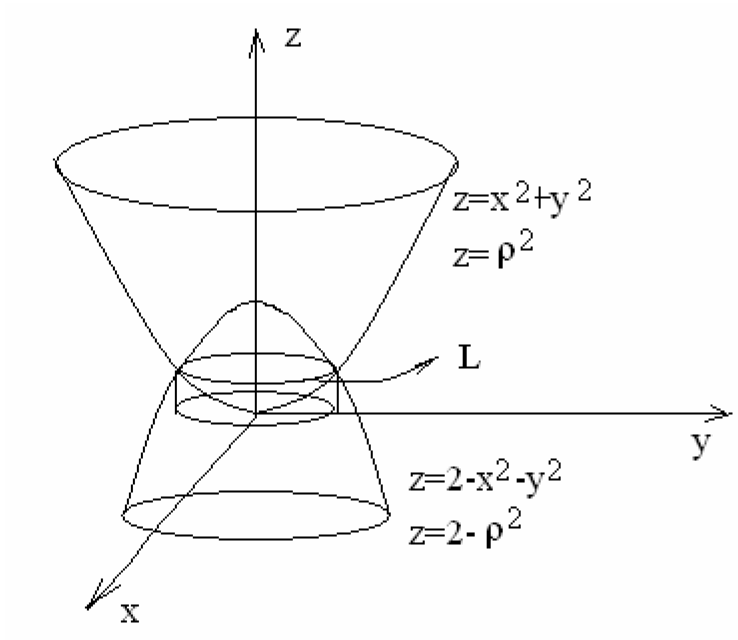

Figura 7.31

$$V=\iiint_{\Omega}1dxdydz=\iiint_{\Omega^*}\rho d\rho d\varphi dz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho d\rho\int_{\rho^2}^{2-\rho^2}dz=2\pi\int_0^1\rho\left(z\Big|_{\rho^2}^{2-\rho^2}\right)d\rho=2\pi\int_0^1\rho\left(2-\rho^2-\rho^2\right)d\rho=4\pi\int_0^1\left(\rho-\rho^3\right)d\rho$$

$$=4\pi\left(\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=4\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=\pi$$

- *Integrale triple în coordonate sferice*

În coordonate sferice, poziția unui punct $P(x,y,z)$ în spațiu este determinată de trei numere r,φ,θ dintre care r este distanța de la originea sistemului de coordonate la punctul *P*, φ este unghiul dintre axa *x* şi proiecția vectorului radial *OP* al lui *P* pe planul *xy* şi θ este unghiul dintre axa *z* şi vectorul radial *OP* al lui *P*. Numerele (r,φ,θ) se numesc *coordonate sferice* ale punctului *P*.

$$0\le r<+\infty$$
$$0\le\varphi<2\pi$$
$$0\le\theta\le\pi \qquad (88)$$

În coordonate sferice, suprafețele de coordonate sunt:

$r=ct$ sfere cu centrul în origine
$\varphi=ct$ semiplane adiacente axei z
$\theta=ct$ conuri circulare cu axa egală cu axa z

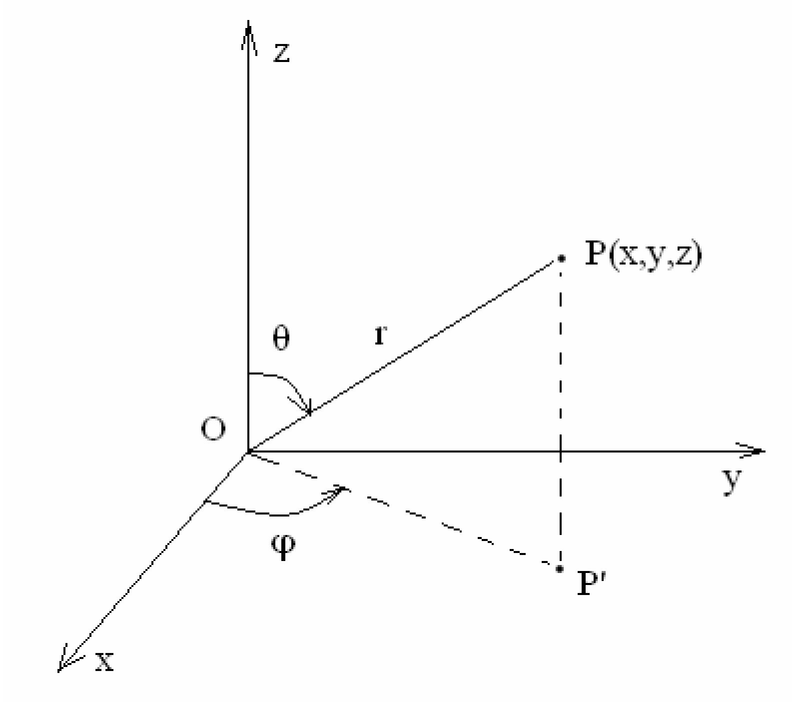

Figura 7.32

Relațiile dintre coordonatele carteziene şi cele sfericerice sunt:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \tag{89}$$

Aceste funcții transformă domeniul Ω^* în Ω şi jacobianul transformării este:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{vmatrix} = r^2\sin\theta \tag{90}$$

Deoarece $r^2\sin\theta \geq 0$, atunci $|J| = r^2\sin\theta$ şi pentru integrale triple formula (82) de transformare din coordonate carteziene în coordonate sferice devine:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{\Omega^*} f\left[r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta\right] r^2\sin\theta\, drd\varphi d\theta \tag{91}$$

Exemplu:
Determinați volumul corpului mărginit de suprafețele: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, $x^2 + y^2 = z^2$, $a < b$.

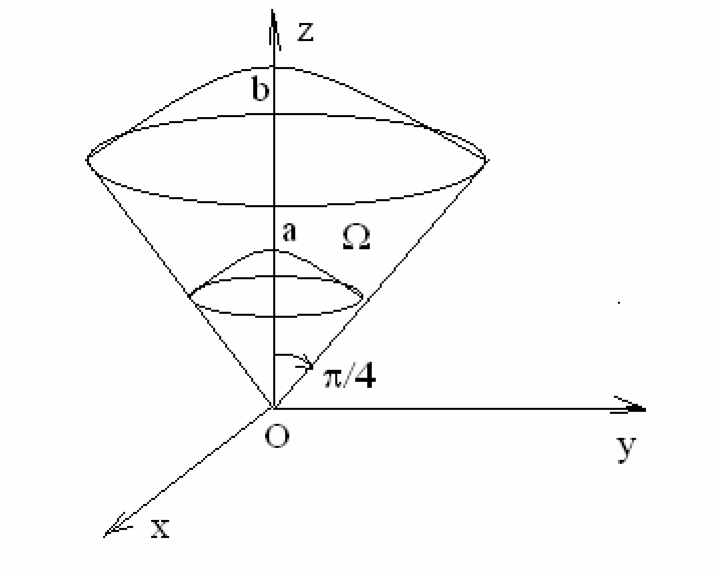

Figura 7.33

Domeniul Ω se află în interiorul conului. Cele două sfere sunt concentrice. Datorită simetriei domeniului vom trece la coordonate sferice.

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Din ecuațiile sferelor avem $a \le r \le b$, iar din ecuația conului determinăm domeniul de variație a coordonatei θ.

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad \Rightarrow \quad r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi = r^2\cos^2\theta$$

$tg^2\theta = 1$ $\quad\quad$ $\theta = \frac{\pi}{4}$ ecuația conului în coordonate sferice

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$$

$$V = \iiint_{\Omega} 1dxdydz = \iiint_{\Omega^*} r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \sin\theta d\theta \int_a^b r^2 dr = 2\pi\left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi/4} \frac{r^3}{3}\Big|_a^b = 2\pi\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)\frac{b^3-a^3}{3} = \frac{\pi}{3}\left(2-\sqrt{2}\right)\left(b^3-a^3\right)$$