Calcularea ariei unei suprafețe. Considerăm o suprafață π care are proiecția pe planul *xy* domeniul *D*. Această suprafață este descrisă de ecuația $z = f(x, y)$.

Vom presupune suprafața *netedă*, adică pe *D* funcția $f(x, y)$ este continuă şi are derivate parțiale continue $f_x'(x, y)$ şi $f_y'(x, y)$.

Începem prin a defini aria unei suprafețe. Împărțim domeniul *D*, proiecția suprafeței pe planul *xy*, în domenii parțiale D_1, D_2, …, D_n. Aceste domenii parțiale nu au puncte interioare comune şi au ariile ΔS_1, ΔS_2, …, ΔS_n, respectiv. Fie *d* cel mai mare diametru al domeniilor parțiale D_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. În fiecare D_k, alegem în mod arbitrar un punct $P_k(\xi_k, \eta_k)$. Acestui punct îi corespunde un punct $M_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ pe suprafața π unde $\zeta_k = f(\xi_k, \eta_k)$.

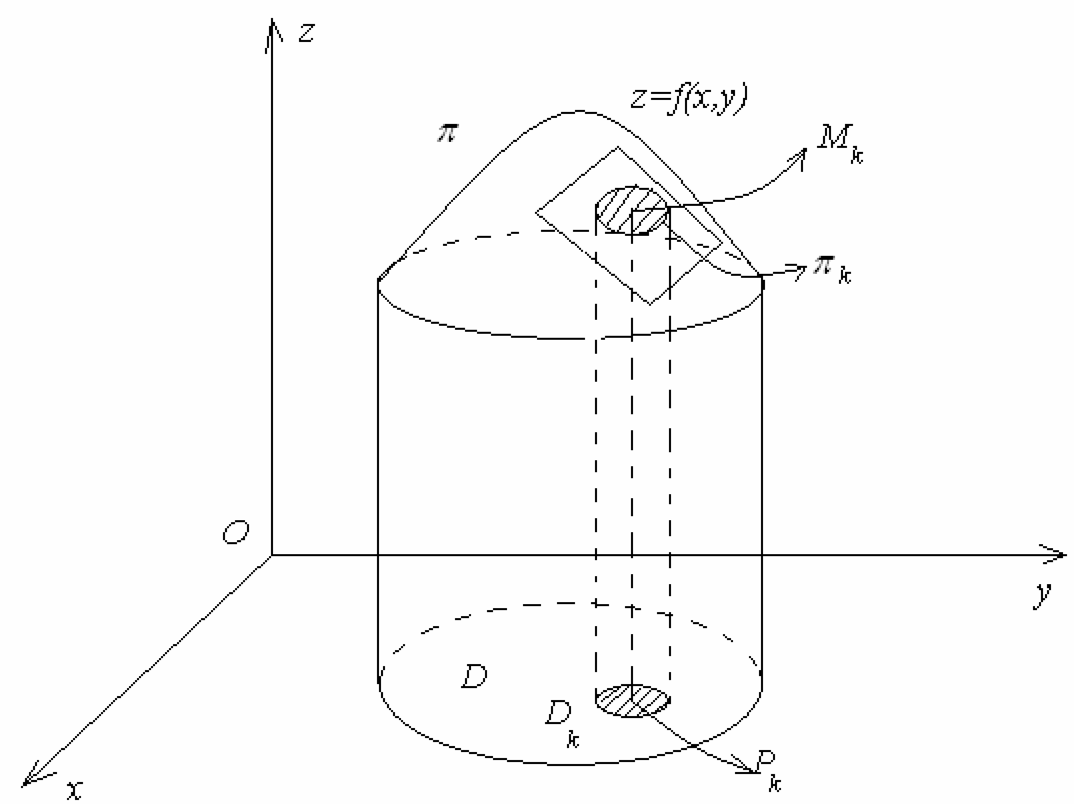

Figura 7.20

Construim un plan tangent la suprafața π în punctul M_k. Ecuația acestui plan este:

$$z - \zeta_k = f_x'(\xi_k, \eta_k)(x - \xi_k) + f_y'(\xi_k, \eta_k)(y - \eta_k) \tag{43}$$

Prin frontiera domeniului parțial D_k construim o suprafață cilindrică cu generatoarele paralele cu axa z. Această suprafață va intersecta planul tangent în M_k după drumul π_k care va fi frontiera unei suprafețe cu aria $\Delta\sigma_k$. Drumul π_k se proiectează pe planul xy în frontiera domeniului parțial D_k. Supunem toate domeniile parțiale D_k la aceeaşi procedură şi considerăm suma:

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta\sigma_k \tag{44}$$

Definiție: Dacă suma (44) are limită pentru $d \to 0$, adică

$$\lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta\sigma_k = S \tag{45}$$

atunci S se numeşte *aria suprafeței* π. Aici d este cel mai mare dintre diametrele domeniilor parțiale D_k, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Vrem să găsim o *formulă* pentru a calcula aria unei suprafețe.
Se ştie că aria proiecției unei figuri plane pe un plan este egală cu produsul dintre aria figurii care se proiectează şi cosinusul unghiului ascuțit dintre planul de proiecție şi planul în care se află figura. Notăm cu γ_k unghiul dintre planul tangent la suprafața π în M_k şi planul xy.

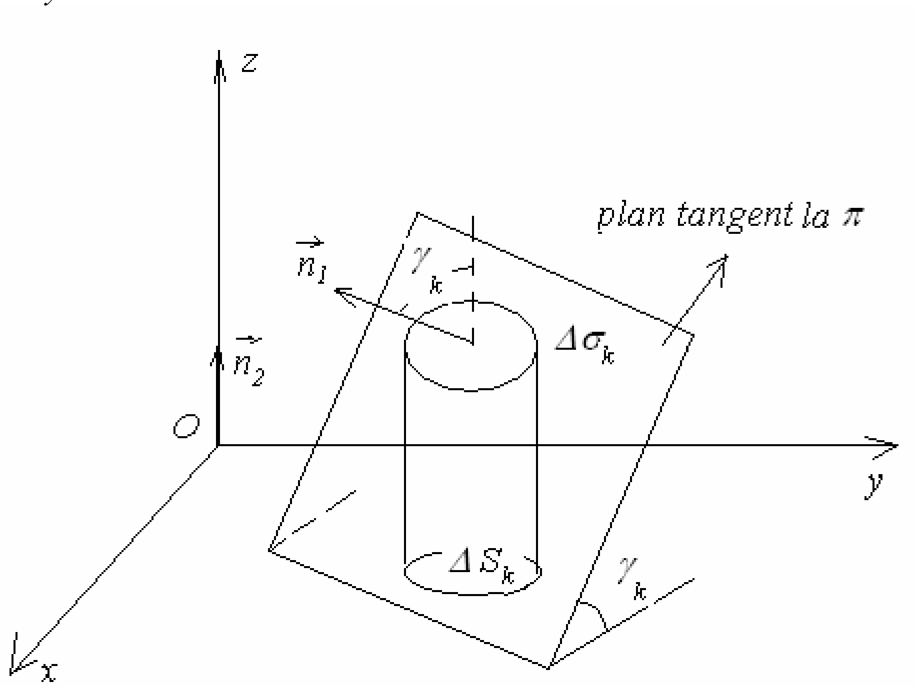

Figura 7.21

$$\Delta S_k = \Delta\sigma_k \left|\cos\gamma_k\right| \tag{46}$$

$$\Delta\sigma_k = \frac{\Delta S_k}{\left|\cos\gamma_k\right|} \tag{47}$$

Unghiul γ_k este şi unghiul dintre axa z şi normala la planul tangent la suprafaţa π în M_k. Vom nota normala la planul tangent la suprafaţa π în M_k :

$$\vec{n}_1 = f_x'\left(\xi_k,\eta_k\right)\vec{i} + f_y'\left(\xi_k,\eta_k\right)\vec{j} - \vec{k} \tag{48}$$

Şi vectorul unitate pe axa z:

$$\vec{n}_2 = \vec{k} \tag{49}$$

$$\left|\cos\gamma_k\right| = \frac{\left|\left(\vec{n}_1,\vec{n}_2\right)\right|}{\left|\vec{n}_1\right|\left|\vec{n}_2\right|} = \frac{1}{\sqrt{1+\left[f_x'\left(\xi_k,\eta_k\right)\right]^2+\left[f_y'\left(\xi_k,\eta_k\right)\right]^2}} \tag{50}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\Delta\sigma_k = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\left[f_x'\left(\xi_k,\eta_k\right)\right]^2+\left[f_y'\left(\xi_k,\eta_k\right)\right]^2}\,\Delta S_k \tag{51}$$

Prin ipoteză $f_x'\left(x,y\right)$ şi $f_y'\left(x,y\right)$ sunt continue pe D , şi atunci funcţia:

$$\sqrt{1+\left[f_x'\left(x,y\right)\right]^2+\left[f_y'\left(x,y\right)\right]^2}$$

este integrabilă pe D. Pentru $d \to 0$ suma (3.51) are limită finită:

$$\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n}\Delta\sigma_k = \iint_D \sqrt{1+\left[f_x'\left(x,y\right)\right]^2+\left[f_y'\left(x,y\right)\right]^2}\,dS \tag{52}$$

Cu relaţia (45) care defineşte aria S a suprafeţei π, obţinem:

$$S = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy \tag{53}$$

unde D_{xy} este proiecţia suprafeţei π pe planul xy.

Definiție: Expresia

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy \qquad (54)$$

se numeşte *element de suprafață*.

Dacă proiecția suprafeței π se face pe planul *xz*, atunci obținem:

$$S = \iint\limits_{D_{xz}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dxdz \qquad (55)$$

unde D_{xz} este proiecția suprafeței π pe planul *xz*.
Dacă proiecția suprafeței π se face pe planul *yz*, atunci obținem:

$$S = \iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dydz \qquad (56)$$

unde D_{yz} este proiecția suprafeței π pe planul *yz*.

Exemplu:
Determinați aria suprafeței unei sfere cu raza *R*, centrul în originea sistemului de coordonate şi ecuație $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

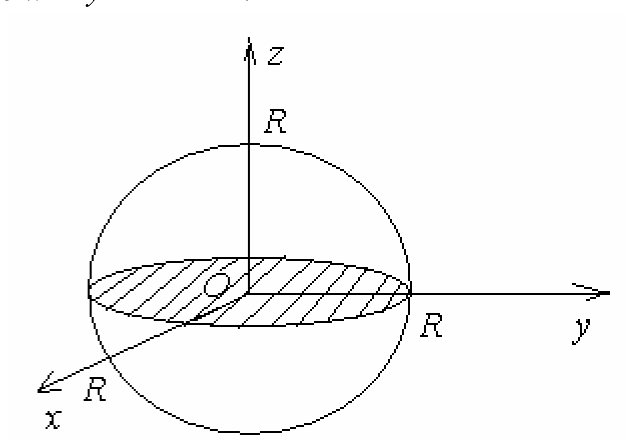

Figura 7.22

Ecuația semisferei superioare este:

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

$$d\sigma = \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{R^2 - x^2 - y^2}}\,dxdy$$

$$d\sigma = \frac{Rdxdy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

Domeniul de integrare este discul circular $x^2 + y^2 \le R^2$

$$S = 2\iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\,dxdy$$

Datorită simetriei, transformăm integrala în coordonate polare:

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi \qquad J = r$$

$$S = 2R\iint_{D^*} \frac{rdrd\varphi}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 2R\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{rdr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 4\pi R\left(-\sqrt{R^2 - r^2}\right)\Big|_0^R = 4\pi R^2$$

Formule utile:

- Elementul de suprafață al suprafeței cilindrice cu raza *R* este:

$$d\sigma = R\ d\varphi\ dz \tag{57}$$

- Elementul de suprafață al suprafeței sferice cu raza *R* este:

$$d\sigma = R^2 \sin\theta\ d\theta\ d\varphi \tag{58}$$

Folosind formula (58) pentru elementul de suprafață al unei suprafețe sferice, putem calcula aria sferei:

$$S = 2\iint_\pi R^2 \sin\theta\ d\theta\ d\varphi = 2R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta = 2R^2 2\pi\left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi/2} = 4\pi R^2$$

Integrala de suprafață

Considerăm o funcție continuă $f(M)$ definită pe o suprafață netedă π. Împărțim suprafața π în suprafețele parțiale π_1, π_2, …, π_n cu ariile $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$, …, $\Delta\sigma_n$, respectiv. În fiecare suprafață parțială considerăm câte un punct arbitrar M_1, M_2, …, M_n şi construim suma

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta\sigma_k \tag{59}$$

sumă ce o numim *sumă integrală* pentru $f(M)$ pe suprafața π.

Definiție: Dacă cel mai mare diametru *d* al suprafețelor parțiale π_k tinde la zero şi suma (59) are limită finită independentă de modul de împărțire al lui π în suprafețe parțiale şi de alegerea punctelor M_k, atunci această limită se numeşte *integrala lui* $f(M)$ *pe suprafața* π (integrala de suprafață de primul tip) şi se notează:

$$\iint_{\pi} f(M)\,d\sigma \ \text{ sau } \iint_{\pi} f(x,y,z)\,d\sigma = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta\sigma_k \tag{60}$$

Observație: Proprietățile integralei duble rămân valabile şi la integrala de suprafață.

Teoremă: Dacă π este o suprafață netedă definită de ecuația $z=\varphi(x,y)$ şi $\varphi(x,y)$ are derivate parțiale continue pe domeniul *D* mărginit şi închis şi dacă $f(x,y,z)$ este o funcție continuă definită pe π, atunci are loc:

$$\iint_{\pi} f(x,y,z)\,d\sigma = \iint_{D} f\big(x,y,\varphi(x,y)\big)\sqrt{1+\left(\varphi_x'\right)^2+\left(\varphi_y'\right)^2}\,dxdy \tag{61}$$

Integrala de suprafață din stânga există dacă există integrala dublă din dreapta. *D* este proiecția suprafeței π pe planul *xy*.

Observație: Integrala $\iint_{\pi}\mu(P)\,d\sigma$, cu $\mu(P)\geq 0$ pe π poate fi interpretată ca masa *m* a stratului reprezentat de suprafața π, pe care masa este distribuită cu densitatea de suprafață $\mu=\mu(P)$.

Exemplu:
Determinați masa stratului parabolic:

$$z = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) \qquad\qquad 0 \le z \le 1$$

a cărui densitate variază în acord cu funcția $\mu = z$.

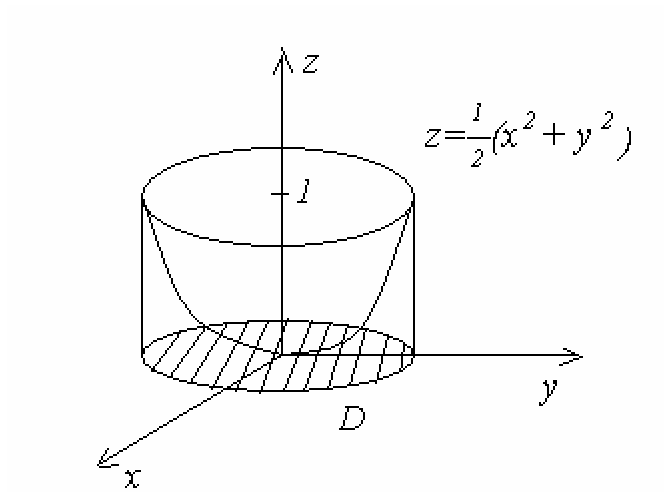

Figura 7.23

$$m = \iint_{\pi} \mu(P)\, d\sigma = \iint_{D} z\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\iint_{D}\left(x^2 + y^2\right)\sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dxdy = \frac{1}{2}\iint_{D^*} r^2\sqrt{1 + r^2}\, rdrd\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r^3\sqrt{1 + r^2}\, dr$$

$$t = \sqrt{1 + r^2} \qquad r = \sqrt{t^2 - 1}$$

$$dr = \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}}\, dt$$

$$= \frac{1}{2} 2\pi \int_1^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{t^2 - 1}\right)^3 t \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}}\, dt = \pi \int_1^{\sqrt{3}} \left(t^2 - 1\right) t^2 dt = \pi\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{3}}$$

$$= \pi\left(\frac{9\sqrt{3}}{5} - \frac{3\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) = \pi\left(\frac{12\sqrt{3}}{15} + \frac{2}{15}\right) = \frac{2\pi}{15}\left(6\sqrt{3} + 1\right)$$

Exerciții:

1. Determinați aria unei părți din planul $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ care se află între planele de coordonate.

$$R: \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}$$

2. Calculați aria paraboloidului $x^2+y^2=2az$ care se afță în interiorul cilindrului $x^2+y^2=3a^2$.

$$R: \frac{14}{3}\pi a^2$$

3. Calculați integrala de suprafață $\iint_{\pi} xyz\, d\sigma$ unde π este o parte a planului $x+y+z=1$ care se află între planele de coordonate.

$$R: \frac{\sqrt{3}}{120}$$

Vezi ☺ seminar

7.6 Integrale triple

Formularea problemei

Presupunem că un corp material ocupă o regiune tridimensională $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Mai presupunem că în fiecare punct al corpului cunoaştem densitatea acestuia

$$\mu = \mu(P) = \mu(x, y, z) \tag{62}$$

Ne propunem să determinăm masa corpului. În acest scop, împărțim regiunea Ω în regiuni parțiale Ω_1, Ω_2, …, Ω_n cu volumele ΔV_1, ΔV_2, …, ΔV_n, respectiv. În fiecare Ω_k alegem un punct arbitrar P_k. Presupunem că densitatea corpului este aproximativ constantă în interiorul unei regiuni parțiale Ω_k, şi este egală cu $\mu(P_k)$. Masa Δm_k a regiunii parțiale Ω_k este

$$\Delta m_k \simeq \mu(P_k)\Delta V_k \tag{63}$$

Masa întregului corp va fi:

$$m \simeq \sum_{k=1}^{n} \mu(P_k) \Delta V_k \tag{64}$$

Fie d cel mai mare dintre diametrele regiunilor parțiale Ω_k, $k = 1, \ldots, n$. Dacă suma (64) are limită finită pentru $d \to 0$, limită care să fie independentă de modul de împărțire a lui Ω în regiuni parțiale şi de alegerea punctelor $P_k \in \Omega_k$, atunci această limită o considerăm a fi *masa corpului*.

$$m = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} \mu(P_k) \Delta V_k \tag{65}$$

Pe de altă parte, această limită este cunoscută ca fiind *integrala triplă* a funcției $\mu(P)$ pe domeniul Ω, şi se notează

$$\iiint_{\Omega} \mu(P)\, dV = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} \mu(P_k) \Delta V_k \tag{66}$$

Atunci

$$m = \iiint_{\Omega} \mu(P)\, dV = \iiint_{\Omega} \mu(x, y, z)\, dxdydz \tag{67}$$

Aici *dxdydz* este un element de volum *dV* în coordonate cartezienee.

Definiția formală a integralei triple Considerăm o funcție mărginită $f(P)$ definită pe un domeniu închis Ω. Împărțim Ω în *n* regiuni parțiale Ω_1, Ω_2, …, Ω_n şi notăm cu ΔV_1, ΔV_2, …, ΔV_n, respectiv volumele acestora. În fiecare Ω_k alegem un punct arbitrar $P_k(x_k, y_k, z_k)$. Construim suma integrală

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(P_k) \Delta V_k \tag{68}$$

Fie d cel mai mare dintre diametrele regiunilor parțiale Ω_k, $k = 1, \ldots, n$.

Definiție: Dacă pentru $d \to 0$ suma integrală (68) are limită independentă de modul de împărțire a lui Ω în regiuni parțiale şi de alegerea punctelor $P_k \in \Omega_k$, atunci această limită se numeşte *integrală triplă* a funcției $f(x, y, z)$ pe Ω şi se notează

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)\, dV \quad \text{sau} \quad \iiint_{\Omega} f(P)\, dV$$

Funcția $f(x, y, z)$ se numeşte *integrabilă* pe Ω. Prin definiție avem:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)\, dV = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k \qquad (69)$$

Teoremă: Dacă o funcție $f(x, y, z)$ este *continuă* pe un domeniu închis Ω, atunci aceasta este *integrabilă* pe Ω.

Proprietățile integralei triple

Fie funcțiile $f(P)$ şi $\varphi(P)$ integrabile pe domeniul Ω.

1. *Liniaritate*

$$\iiint_{\Omega} (\alpha f(P) + \beta \varphi(P))\, dV = \alpha \iiint_{\Omega} f(P)\, dV + \beta \iiint_{\Omega} \varphi(P)\, dV \qquad (70)$$

unde α, β sunt constante arbitrare.

2. *Monotonie* Dacă $f(P) \le \varphi(P)$ pe Ω, atunci

$$\iiint_{\Omega} f(P)\, dV \le \iiint_{\Omega} \varphi(P)\, dV \qquad (71)$$

3. *Calcularea volumului* Dacă $f(P) = 1$ pe Ω, atunci

$$\iiint_{\Omega} dV = V \qquad (72)$$

unde V este volumul lui Ω.

4. *Estimarea integralei* Dacă o funcție $f(P)$ este continuă pe un domeniu Ω închis şi M şi m sunt valorile sale maximă şi minimă, atunci

$$mV \le \iiint_{\Omega} f(P)\, dV \le MV \qquad (73)$$

5. *Aditivitate* Dacă $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, şi cele două mulțimi nu au puncte interioare comune, iar $f(P)$ este integrabilă pe Ω, atunci $f(P)$ este integrabilă pe fiecare Ω_1 şi Ω_2 şi

$$\iiint_{\Omega} f(P)\, dV = \iiint_{\Omega_1} f(P)\, dV + \iiint_{\Omega_2} f(P)\, dV \qquad (74)$$

Teorema de medie: Dacă o funcție $f(P)$ este continuă pe un domeniu închis Ω, atunci există un punct $P_m \in \Omega$ astfel încât

$$\iiint_{\Omega} f(P)\, dV = f(P_m)V \tag{75}$$

unde V este volumul lui Ω.