7.4 Schimbarea de variabile în integrala dublă

Coordonate curbilinii Presupunem că pe domeniul D^*, din planul *uv*, sunt definite două funcții:

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases} \tag{22}$$

continue şi cu derivate parțiale continue.

Cu funcțiile (22), fiecărui punct $M^*(u,v) \in D^*$ îi corespunde un punct $M(x,y)$ în planul *xy*, şi mulțimii D^*, îi corespunde o mulțime *D* de puncte în planul *xy*.

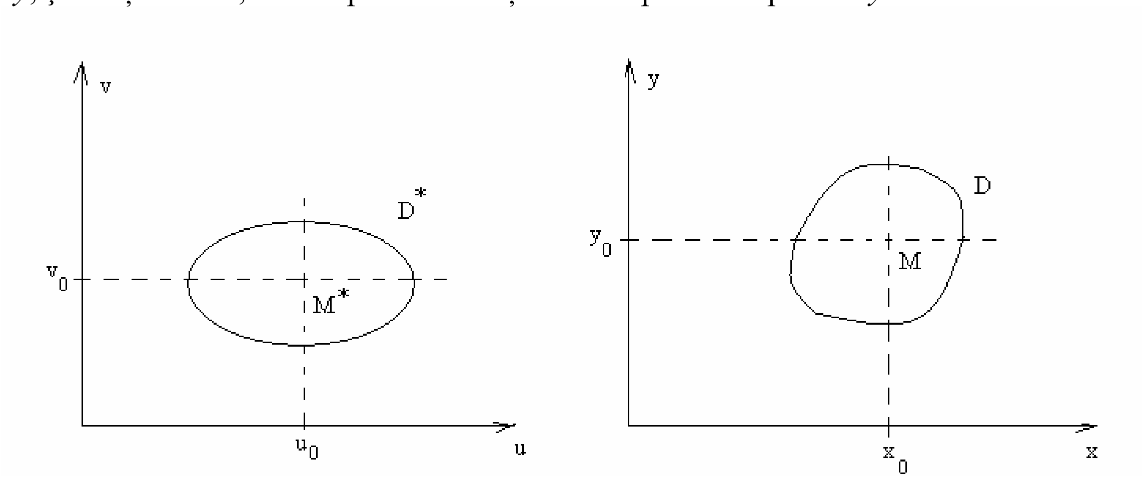

Figura 7.12

Spunem că funcțiile (22) transformă mulțimea D^* în *D*. Presupunem că la puncte (u,v) diferite, le corespund puncte (x,y) diferite. Acest lucru este echivalent cu a spune că funcțiile (22) sunt rezolvabile în mod unic în *u* şi *v*:

$$\begin{cases} u = g(x,y) \\ v = h(x,y) \end{cases} \tag{23}$$

In acest caz, are loc o transformare *unu-la-unu* a domeniilor *D* şi D^*. Atunci, orice curbă continuă $L^* \subset D^*$ se va transforma într-o curbă continuă $L \subset D$.

Dacă funcțiile $g(x,y)$ şi $h(x,y)$ sunt continue, atunci orice curbă continuă $L \subset D$ se va transforma într-o curbă continuă $L^* \subset D^*$.

Definiție: Deoarece cu o pereche de numere (u_0, v_0) dată pentru variabilele u şi v din D^*, putem determina în mod unic, nu numai poziția punctului $M^*(u_0, v_0)$ din D^*, dar şi poziția punctului corespunzător $M(x_0, y_0)$ din D întrucât $x_0 = \varphi(u_0, v_0)$, $y_0 = \psi(u_0, v_0)$, putem considera numerele u şi v ca fiind noi coordonate ale lui M în planul xy. Acestea se numesc *coordonate curbilinii* ale punctului M.

Mulțimea de puncte din D astfel încât una dintre coordonate să rămână constantă se numeşte *linie de coordonate*. Considerăm în (22) $v = v_0$ şi obținem ecuațiile parametrice ale liniei de coordonate:

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v_0) \\ y = \psi(u, v_0) \end{cases} \tag{24}$$

Aici, variabila u apare ca un parametru.
Dacă dăm lui v diverse valori posibile, vom obține o *familie de linii de coordonate* $v = ct$ în planul xy. În mod similar putem obține o familie de linii de coordonate $u = ct$.

Dacă corespondența dintre D^* şi D este *unu-la-unu*, atunci liniile de coordonate ale unei familii nu se intersectează, şi prin orice punct a lui D trece o singură linie din fiecare familie.

Observație: Rețeaua liniilor de coordonate curbilinii din planul xy este o reprezentare a rețelei dreptunghiulare din planul uv.

Elementul de arie în coordonate curbilinii. Jacobianul.
Într-un domeniu D^* din planul uv considerăm un mic dreptunghi $P_1^* P_2^* P_3^* P_4^*$ cu laturile paralele cu axele u şi v şi având lungimile Δu şi Δv respectiv.

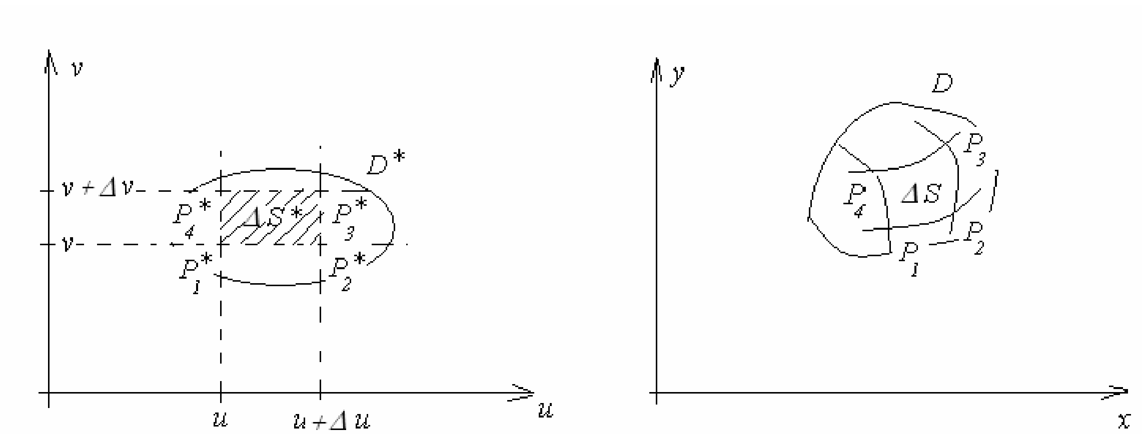

Figura 7.13

$$\Delta S^* = \Delta u \Delta v$$

Presupunem că $\Delta u > 0$ şi $\Delta v > 0$.
Dreptungiul $P_1^* P_2^* P_3^* P_4^*$ se transformă cu funcțiile

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases}$$

în patrulaterul curbiliniu $P_1 P_2 P_3 P_4$ din *D*. Dacă punctele P_i^* $i = 1,2,3,4$ au coordonatele

$$P_1^*(u,v),\ P_2^*(u+\Delta u, v),\ P_3^*(u+\Delta u, v+\Delta v),\ P_4^*(u, v+\Delta v) \qquad (25)$$

atunci, prin transformările (1) punctele corespunzătoare acestora, vor avea coordonatele:

$$P_1\big(\varphi(u,v),\psi(u,v)\big),\ P_2\big(\varphi(u+\Delta u,v),\psi(u+\Delta u,v)\big),$$
$$P_3\big(\varphi(u+\Delta u,v+\Delta v),\psi(u+\Delta u,v+\Delta v)\big),\ P_4\big(\varphi(u,v+\Delta v),\psi(u,v+\Delta v)\big) \quad (26)$$

Utilizăm formula Taylor pentru o funcție de două variabile şi păstrăm doar termenii de prim ordin în Δu şi Δv. Determinăm astfel, aproximativ, coordonatele punctelor P_1, P_2, P_3 şi P_4.

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \cdot \Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \cdot \Delta y + \ldots$$

Astfel,

$$\begin{aligned}
&P_1(\varphi,\psi) \quad \text{valori exacte} \\
&P_2\left(\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\Delta u,\ \psi + \frac{\partial \psi}{\partial u}\Delta u\right) \\
&P_3\left(\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\Delta v,\ \psi + \frac{\partial \psi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial \psi}{\partial v}\Delta v\right) \\
&P_4\left(\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\Delta v,\ \psi + \frac{\partial \psi}{\partial v}\Delta v\right) \qquad (27)
\end{aligned}$$

unde φ, ψ şi toate derivatele acestora sunt calculate în punctul (u,v). Cu coordonatele aproximative (4), patrulaterul $P_1 P_2 P_3 P_4$ este paralelogram. Într-adevăr,

$$\overrightarrow{P_1 P_2} = \overrightarrow{P_4 P_3} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\Delta u\ \vec{i} + \frac{\partial \psi}{\partial u}\Delta u\ \vec{j}$$

$$\overrightarrow{P_1P_4} = \overrightarrow{P_2P_3} = \frac{\partial \varphi}{\partial v}\Delta v\,\vec{i} + \frac{\partial \psi}{\partial v}\Delta v\,\vec{j}$$

Putem exprima, aproximativ, aria ΔS a patrulaterului $P_1P_2P_3P_4$ prin mărimea produsului vectorial $\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_4}$, adică

$$\Delta S \simeq \left| \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_4} \right| = \left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u}\Delta u & \frac{\partial \psi}{\partial u}\Delta u & 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v}\Delta v & \frac{\partial \psi}{\partial v}\Delta v & 0 \end{matrix} \right\|$$

$$= \left| \vec{k}\,\Delta u \Delta v \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} \right| = \Delta u \Delta v \left\| \begin{matrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{matrix} \right\|$$

Definiție: Determinantul:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial \psi(u,v)}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi(u,v)}{\partial v} & \frac{\partial \psi(u,v)}{\partial v} \end{vmatrix} \tag{28}$$

se numeşte *determinant funcțional* al funcțiilor $\varphi(u,v)$ şi $\psi(u,v)$ sau *Jacobian*.

$$\Delta S \approx |J|\,\Delta u \Delta v \tag{29}$$

Şi reprezintă elementul de arie în coordonate curbilinii. Deoarece

$$\Delta S^* = \Delta u \Delta v$$
$$\frac{\Delta S}{\Delta S^*} \approx |J| \tag{30}$$

Această ultimă relație este aproximativă. La limită, totuşi, când diametrele elementelor ΔS^* şi ΔS tind la zero, aceasta devine exactă, adică

$$|J(u,v)| = \lim_{diam \Delta S^* \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta S^*} \tag{31}$$

Valoarea absolută a Jacobianului este un fel de coeficient local de extensie a domeniului D^* când este transformat în *D* cu funcțiile (22).

Schimbarea de variabile în integrala dublă.
Presupunem că două funcții continue cu derivate parțiale continue

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases} \qquad (32)$$

efectuează o transformare *unu-la-unu* a domeniului D^* în *D*. Considerăm că pe mulțimea *D* din planul *xy* este definită o funcție continuă $z = f(x,y)$. Iar pe D^* este definită funcția $z = F(u,v)$ astfel încât:

$$F(u,v) = f\left[\varphi(u,v), \psi(u,v)\right] \qquad (33)$$

Considerăm sumele integrale pentru funcția *z* pe *D* şi D^*. Şi, uzând de faptul că sumele integrale se stabilesc într-o manieră arbitrară, le vom forma astfel încât ele să conțină valori egale ale funcției pe *D* şi D^*.

$$\sum_{D} f(x,y)\Delta S \approx \sum_{D^*} F(u,v)|J|\Delta S^* \qquad (34)$$

unde $\Delta S \approx |J|\Delta S^*$ şi $J(u,v)$ este Jacobianul funcțiilor $\varphi(u,v)$ şi $\psi(u,v)$. Trecem la limită în relația (34) astfel încât cel mai mare diametru d^* al domeniilor parțiale D_k^* să tindă la zero. Atunci,

$$\iint_{D} f(x,y)\,dS = \iint_{D^*} F(u,v)\left|J(u,v)\right| dS^*$$

Sau

$$\iint_{D} f(x,y)\,dxdy = \iint_{D^*} f\left[\varphi(u,v), \psi(u,v)\right]\left|J(u,v)\right| dudv \qquad (35)$$

unde

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \qquad (36)$$

Formula (35) se numeşte *formula Ostrogradsky* sau *transformarea de coordonate în integrala dublă.*

Observație: Atunci când $d^* \to 0$ şi cel mai mare diametru d al domeniilor parțiale din D va tinde şi el la zero, deoarece transformarea (32) este continuă.
Condiția $J \neq 0$ presupune ca transformarea realizată de funcțiile $x = \varphi(u,v)$ şi $y = \psi(u,v)$ să fie o transformare *unu-la-unu* locală.

Teoremă: Pentru a transforma o integrală dublă definită în coordonate carteziene, într-o integrală dublă în coordonate curbilinii, trebuie să înlocuim în funcția $f(x,y)$ variabilele x şi y cu $\varphi(u,v)$ şi $\psi(u,v)$, respectiv, şi elementul de arie $dxdy$ cu expresia sa în coordonate curbilinii $dxdy = |J|\,dudv$.

Exemplu:
Determinați aria figurii mărginite de hiperbolele $xy = a^2$, $xy = b^2$, unde $x > 0$, $y > 0$, $0 < a < b$ şi de dreptele $y = \alpha x$, $y = \beta x$ cu $0 < \alpha < \beta$.

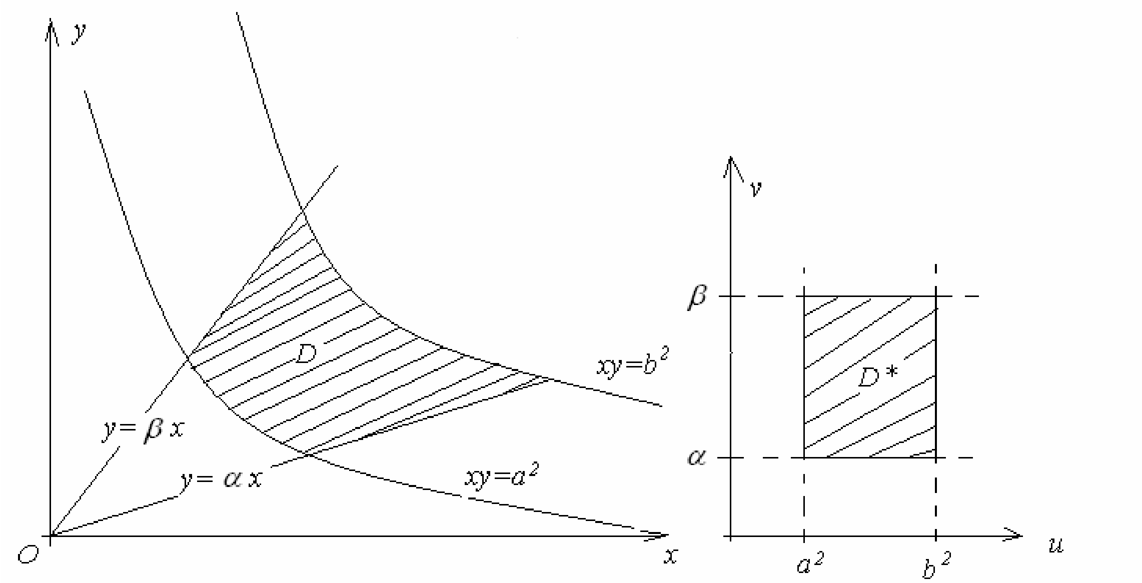

Figura 7.14

Determinarea ariei domeniului D se reduce la calcularea integralei duble:

$$\iint_D dxdy$$

Calcularea directă a acestei integrale este dificilă. Din acest motiv, folosim coordonate curbilinii u şi v astfel:

$$xy = u \qquad \text{şi} \qquad \frac{y}{x} = v$$

Alegerea este motivată de ipotezele: $a^2 \le u \le b^2$ şi $\alpha \le v \le \beta$. În planul uv domeniul va fi un dreptunghi:

$$D^* = \left\{ (u,v) \middle| a^2 \le u \le b^2, \alpha \le v \le \beta \right\}$$

Exprimăm coordonatele x şi y în funcţie de u şi v. Atunci,

$$x = \sqrt{\frac{u}{v}} \qquad y = \sqrt{uv}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{\sqrt{u}}{2v\sqrt{v}} \\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}$$

Cu formula (35) Ostrogradsky, obţinem pentru $f(x,y) = 1$:

$$S = \iint_D dxdy = \iint_{D^*} |J|\, dudv = \int_{a^2}^{b^2} du \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dv}{2v} = u\Big|_{a^2}^{b^2} \cdot \frac{1}{2} \ln v\Big|_{\alpha}^{\beta} = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right) \ln \frac{\beta}{\alpha}$$

Integrala dublă în coordonate polare

O integrală dublă este frecvent simplificată printr-o schimbare a coordonatelor carteziene x şi y în coordonate polare r şi φ cu formulele:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \quad \text{unde } r \in [0, +\infty), \ \varphi \in [0, 2\pi) \tag{37}$$

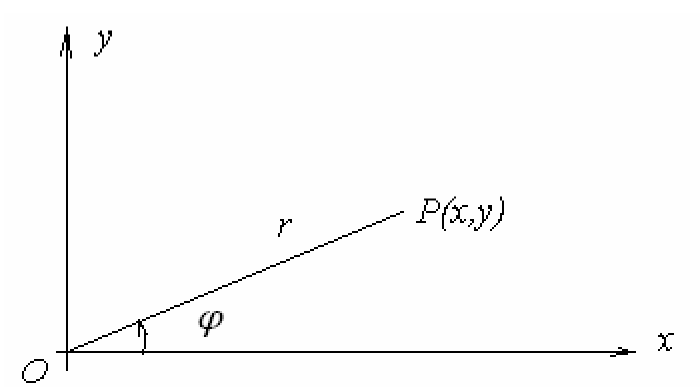

Figura 7.15

Jacobianul transformării este:

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix}=r\cos^2\varphi+r\sin^2\varphi=r$$

Considerând $|J|=r$, putem scrie elementul de arie în coordonate polare:

$$dS=rdrd\varphi \tag{38}$$

Mai mult, formula de trecere a integralei duble din coordonate carteziene x şi y în coordonate polare r şi φ este:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\iint_{D^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,rdrd\varphi \tag{39}$$

Elementul de arie în coordonate polare pote fi obținut şi din argumente geometrice:

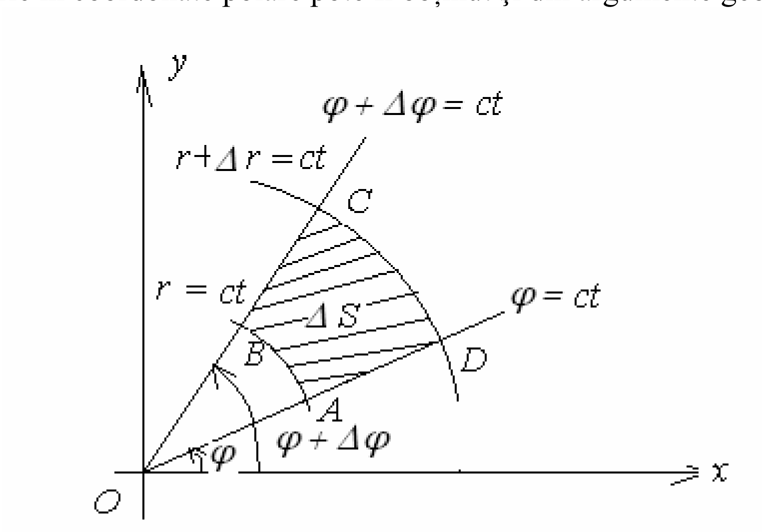

Figura 7.16

$$\Delta S=\text{aria } ODC-\text{aria } OAB$$

$$=\frac{1}{2}(r+\Delta r)^2\Delta\varphi-\frac{1}{2}r^2\Delta\varphi=r\Delta r\Delta\varphi+\frac{1}{2}(\Delta r)^2\Delta\varphi$$

Renunțând la al doilea termen, vom obține:

$$\Delta S\approx r\Delta r\Delta\varphi \quad\Rightarrow\quad dS=rdrd\varphi$$

Rezumat: Pentru a transforma o integrală dublă definită în coordonate carteziene într-o integrală dublă în coordonate polare, trebuie să înlocuim argumentele funcției x şi y cu $r\cos\varphi$ şi $r\sin\varphi$ respectiv, şi să înlocuim elementul de arie în coordonate carteziene $dxdy$ cu elementul de arie în coordonate polare $rdrd\varphi$.

Calcularea integralei duble în coordonate polare ca o succesiune de integrale simple

I. *Originea sistemului de coordonate O se află în exteriorul domeniului de integrare D.*

Fie domeniul D astfel încât orice vector radial cu originea în O, adică o linie de coordonate $\varphi = ct$, să intersecteze frontiera lui D în nu mai mult de două puncte sau după un segment (C şi E în figura 7.17). Notăm valorile extreme ale unghiului polar cu φ_1 şi φ_2. Se observă că unghiul φ ia valori în intervalul $[\varphi_1, \varphi_2]$ pentru domeniul D din figură. Valorile φ_1 şi φ_2 vor fi limite de integrare. Vectorul radial $\varphi = \varphi_1$ trece prin punctul A al frontierei domeniului D, iar vectorul radial $\varphi = \varphi_2$ trece prin punctul B.

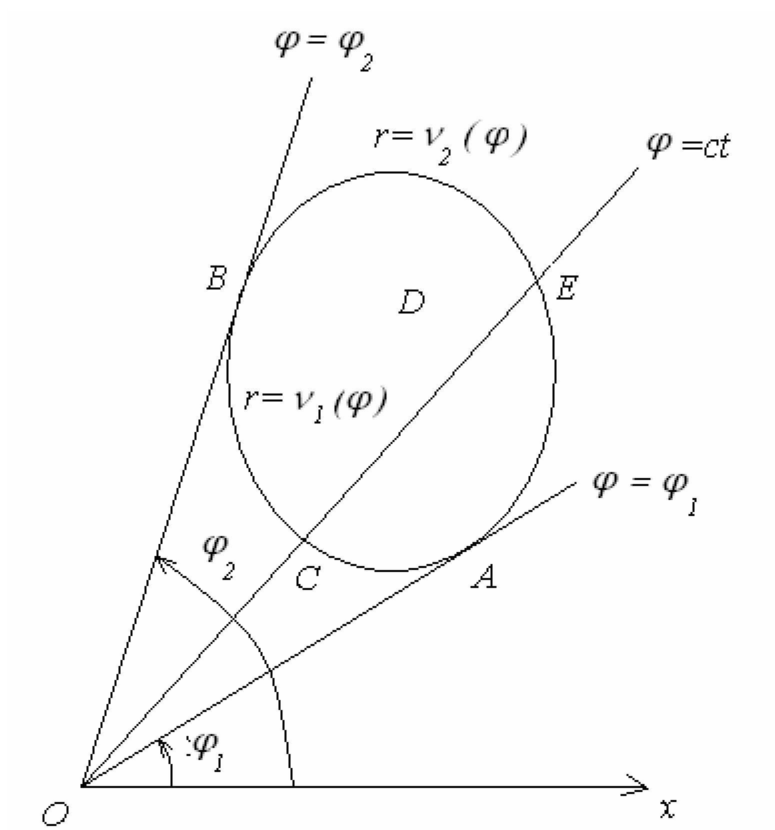

Figura 7.17

Punctele A şi B împart frontiera lui D în părţile ACB şi AEB. Ecuaţiile acestora în variabile polare sunt $r = \nu_1(\varphi)$ şi $r = \nu_2(\varphi)$ respectiv, unde $\nu_1(\varphi)$ şi $\nu_2(\varphi)$ sunt funcţii univoce, continue care satisfac condiția $\nu_1(\varphi) \le \nu_2(\varphi)$, $\forall \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$. Funcțiile $\nu_1(\varphi)$ şi $\nu_2(\varphi)$ vor fi limite de integrare:

$$\iint_D F(r,\varphi) r dr d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\nu_1(\varphi)}^{\nu_2(\varphi)} F(r,\varphi) r dr \qquad (40)$$

Caz particular:
Aria *S* a domeniului de integrare *D* se poate calcula considerând $F(r,\varphi) = 1$:

$$S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\nu_1(\varphi)}^{\nu_2(\varphi)} r dr = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left[\nu_2^2(\varphi) - \nu_1^2(\varphi)\right] d\varphi \qquad (41)$$

II. *Originea sistemului de coordonate O se află în interiorul domeniului de integrare D.*

Fie domeniul *D* un domeniu *stelar,* astfel încât orice vector radial cu originea în *O*, adică o linie de coordonate $\varphi = ct$, să intersecteze frontiera lui *D* într-un punct sau după un segment. Fie $r = \nu(\varphi)$ ecuația frontierei domeniului în coordonate polare. Atunci:

$$\iint_D F(r,\varphi) r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\nu(\varphi)} F(r,\varphi) r dr \qquad (42)$$

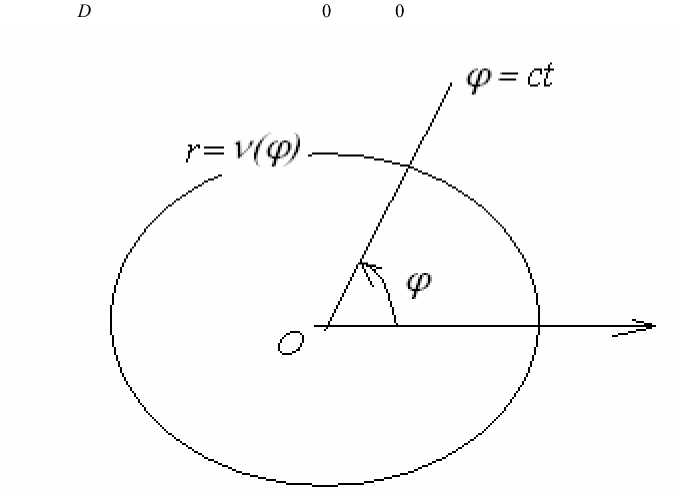

Figura 7.18

Exemplu:
Calculați integrala:

$$L = \iint_D \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} dx dy$$

Unde $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0\right\}$ este un sfert din cercul unitate, adică primul cadran.

Trecem la coordonate polare:

$$x=r\cos\varphi \qquad\qquad y=r\sin\varphi$$

Atunci domeniul de integrare va fi un dreptunghi:

$$D^*=\left\{(r,\varphi)\middle|0\le r\le 1, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\right\}$$

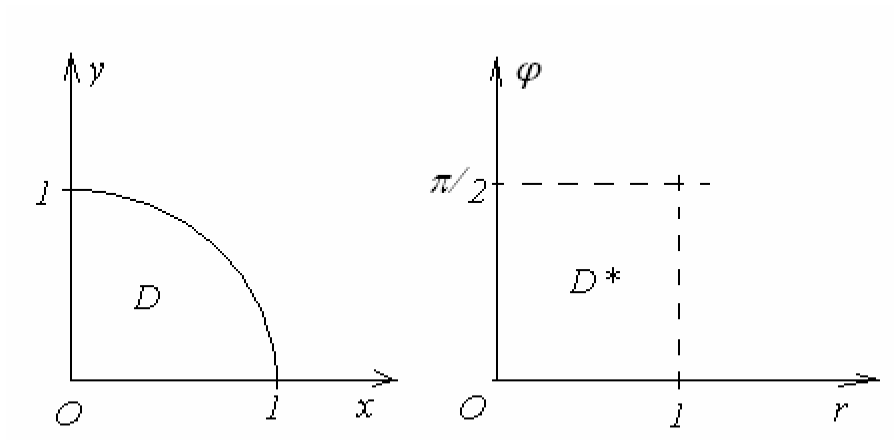

Figura 7.19

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dxdy=\iint_{D^*}\frac{rdrd\varphi}{\sqrt{1+r^2}}=\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^1\frac{rdr}{\sqrt{1+r^2}}$$

$$=\varphi\Big|_0^{\pi/2}\cdot\sqrt{1+r^2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$$