Cap VII. Integrale multiple. Integrala dublă

7.1 Formularea problemei

Noțiunea de integrală dublă apare la calcularea volumului unui corp cilindric. Prin corp cilindric înțelegem un corp mărginit de planul xy, o suprafață $z = f(x, y)$ şi o suprafață cilindrică cu generatoarele paralele cu axa z.

Domeniul D din planul xy se numeşte *baza* corpului cilindric. Această bază este proiecția ortogonală a suprafeței $z = f(x, y)$ pe planul xy.

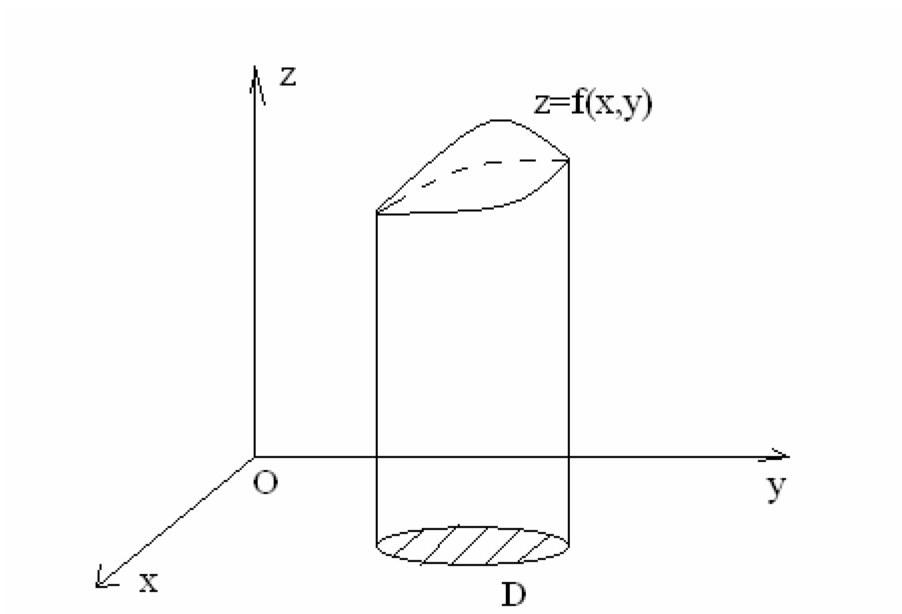

Figura 7.1

Pentru a calcula volumul vom respecta două principii:

- Dacă împărțim corpul în mai multe părți, volumul său va fi egal cu suma volumelor părților (aditivitate).
- Volumul unui cilindru drept, mărginit de planul $z = const$ paralel cu planul xy este egal cu aria bazei înmulțită cu înălțimea cilindrului.

În cele ce urmează presupunem că domeniul D, baza corpului cilindric, are arie şi este mărginit.

Fie $z = f(x, y)$ ecuația suprafeței care mărgineşte corpul cilindric şi fie $f(x, y)$ o funcție continuă în toate punctele $P(x, y) \in D$. Presupunem că suprafața se află deasupra planului xy, adică $f(x, y) \geq 0$ pe D. Notăm volumul corpului cilindric cu V.

Împărțim baza D a corpului cilindric în n domenii de formă arbitrară care nu se intersectează şi le vom numi *domenii parțiale*.
Notăm aceste domenii parțiale cu $D_1, D_2, \ldots, D_n$ şi ariile acestora cu $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$.

Numim *diametrul* unui domeniu parțial cantitatea:

$$diam\ D_k = \sup_{P,Q \in D_k} \rho(P,Q) \qquad (1)$$

unde $\rho(P,Q)$ este distanța dintre punctele P şi Q. În cele ce urmează, notăm cu d cel mai mare dintre diametrele domeniilor parțiale D_k ($k = 1, \ldots, n$).

Prin frontiera fiecărui domeniu parțial vom construi o suprafață cilindrică cu generatoarele paralele cu axa z. Astfel, corpul cilindric va fi împărțit în n corpuri cilindrice parțiale.

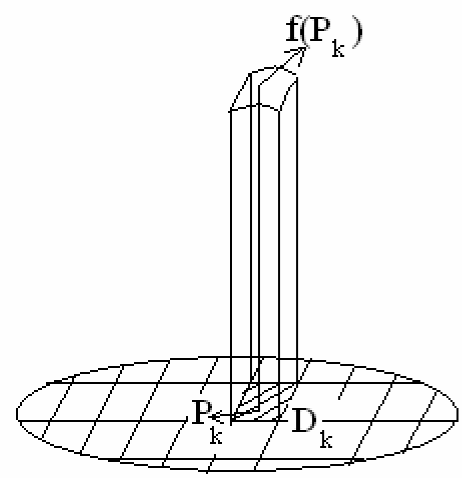

Figura 7.2

Vom înlocui al k-lea corp cilindric parțial cu un cilindru drept cu aceeaşi bază şi cu înălțimea egală cu coordonata z a unui punct oarecare de pe suprafața $z = f(x, y)$ ce urmează să fie înlocuită (vezi figura).

Volumul unui astfel de cilindru este:

$$\Delta V_k = f(P_k)\Delta S_k \qquad (2)$$

unde punctul $P_k(x_k, y_k) \in D_k$ şi ΔS_k este aria lui D_k.

După ce supunem toate corpurile cilindrice parțiale la această procedură, vom obține un corp în trepte, a cărui volum este:

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(P_k\right)\Delta S_k \qquad (3)$$

Observație: Volumul V_n aproximează volumul V al corpului cilindric inițial cu o precizie cu atât mai bună cu cât sunt mai mici dimensiunile bazelor corpurilor cilindrice parțiale D_k.

Prin definiție, presupunem că V este limita la care tinde volumul (3) al corpului în trepte pentru $n \to \infty$, atunci când cel mai mare diametru d al domeniilor parțiale D_k tinde la zero. Această limită ar trebui să nu depindă de modul în care domeniul D a fost împărțit în domenii parțiale D_k şi de modul de alegere al punctelor P_k din D_k.

Suma (3) se numeşte *sumă integrală* pentru funcția $f\left(x, y\right)$ pe domeniul D pentru o diviziune dată a lui D în n domenii parțiale şi pentru o selecție dată a punctelor $P_k\left(x_k, y_k\right) \in D_k$. Facem pe $n \to \infty$, şi deci pe $d \to 0$. Suma (3) se va modifica.

Definiție: Dacă există limita sumelor integrale

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f\left(P_k\right)\Delta S_k \qquad (4)$$

pentru $d \to 0$ astfel încât aceasta să nu depindă nici de diviziunea lui D în domenii parțiale, nici de alegerea punctelor P_k din D_k, atunci aceasta se numeşte *integrala dublă* a lui $f\left(P\right)$ sau $f\left(x, y\right)$ pe domeniul D şi se notează

$$\iint_D f\left(P\right) dS = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(P_k\right)\Delta S_k \qquad (5)$$

Spunem că funcția $f\left(x, y\right)$ este integrabilă pe domeniul D.

Dacă ne întoarcem la definiția volumului corpului cilindric, putem concluziona că volumul corpului cilindric mărginit de planul xy, de suprafața $z = f\left(x, y\right)$, $f\left(x, y\right) \geq 0$ şi de o suprafață cilindrică cu generatoarele paralele cu axa z, este determinat de integrala dublă a lui $f\left(x, y\right)$ pe domeniul D, care este baza corpului cilindric:

$$V = \iint_D f\left(P\right) dS \qquad \text{sau} \qquad V = \iint_D f\left(x, y\right) dxdy \qquad (6)$$

Aici $dxdy$ este elementul de suprafață în coordonate carteziene.

Observație: Dacă $f(P) \le 0$ pe *D*, atunci $V = -\iint_D f(P)\,dS$.

Dacă $f(P)$ ia valori pozitive şi negative pe D, atunci integrala $\iint_D f(P)\,dS$ este suma algebrică a volumelor acelor părți ale corpului care se află deasupra planului *xy* (cu semnul plus) şi acelor părți care se află sub planul *xy* (cu semnul minus).

Remarcă: Condiția ca $f(x, y)$ să fie mărginită pe *D* nu este suficientă pentru ca funcția să fie integrabilă.

Exemplu: Considerăm funcția $f(x, y)$ definită pe pătratul $D = \{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ astfel:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{daca } x, y \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{in rest} \end{cases}$$

Această funcție este mărginită dar nu este integrabilă.

Teorema 1: O funcție $f(x, y)$ continuă pe un domeniu mărginit şi închis *D*, este integrabilă pe acest domeniu.

Această cerință de continuitate este destul de restrictivă.

Teorema 2: Dacă o funcție $f(x, y)$ este mărginită pe un domeniu mărginit şi închis *D* şi este continuă pe *D* cu excepția unor mulțimi cu arie nulă (ex: o curbă), atunci funcția este integrabilă pe acest domeniu.

7.2 Proprietățile integralei duble

- *Liniaritate* Dacă $f(P)$ şi $\varphi(P)$ sunt integrabile pe D şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci $\alpha f(P) + \beta\varphi(P)$ este şi ea integrabilă pe *D* şi are loc

$$\iint_D \left(\alpha f(P) + \beta\varphi(P)\right) dS = \alpha \iint_D f(P)\,dS + \beta \iint_D \varphi(P)\,dS \qquad (7)$$

- Dacă $f(P)$ şi $\varphi(P)$ sunt integrabile pe *D* şi dacă are loc $f(P) \le \varphi(P)$ pe *D*, atunci:

$$\iint_D f(P)\,dS \le \iint_D \varphi(P)\,dS \tag{8}$$

Adică, inegalitățile pot fi integrate termen cu termen.

$$\left|\iint_D f(P)\,dS\right| \le \iint_D |f(P)|\,dS \tag{9}$$

- *Aria unei regiuni plane* Aria domeniului *D* este egală cu integrala dublă pe acest domeniu a funcției constante egală cu unu.

  Într-adevăr, suma integrală pentru $f(P)=1$ pe *D* are forma:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} 1\cdot \Delta S_k$$

  Şi, pentru orice diviziune a lui *D* în D_k este egală cu aria *S*. Dar, cum limita acestei sume este integrala dublă,

$$S = \iint_D dS \tag{10}$$

- *Estimarea integralei* Fie $f(P)$ o funcție continuă pe un domeniu mărginit şi închis D . Fie *M* şi *m* cea mai mare şi respectiv cea mai mică valoare a lui $f(P)$ pe *D*. Dacă *S* este aria domeniului *D*, atunci

$$mS \le \iint_D f(P)\,dS \le MS \tag{11}$$

- *Aditivitate* Dacă o funcție $f(P)$ este integrabilă pe domeniul D şi dacă $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \phi$, atunci $f(P)$ este integrabilă pe fiecare domeniu D_1 şi D_2 şi are loc

$$\iint_D f(P)\,dS = \iint_{D_1} f(P)\,dS + \iint_{D_2} f(P)\,dS \tag{12}$$

Teorema de medie: Dacă o funcție $f(P)$ este continuă pe un domeniu mărginit şi închis *D*, atunci există cel puțin un punct $P_m \in D$ astfel încât

$$\iint_D f(P)\,dS = f(P_m)\cdot S \tag{13}$$

unde *S* este aria lui *D*.

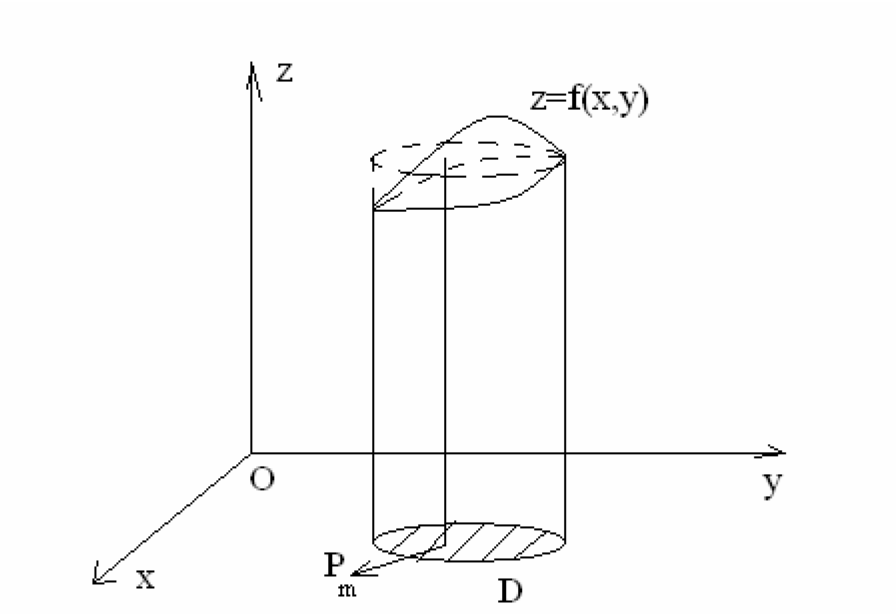

Figura 7.3

7.3 Integrala dublă ca o succesiune de integrale simple

I. Cazul domeniului dreptunghi.

Fie domeniul *D* un dreptunghi închis

$$\pi = \{(x, y) | a \le x \le b, c \le y \le d\}$$

Presupunem funcția $z = f(x, y)$ continuă pe domeniul π. Integrala dublă:

$$\iint_{\pi} f(x, y)\, dxdy$$

poate fi interpretată ca volumul corpului cilindric cu baza π, mărginit superior de suprafața $z = f(x, y)$.

Considerăm corpul cilindric cu generatoarele paralele cu axa *Oz* şi suprafața superioară definită de funcția $z = f(x, y)$:

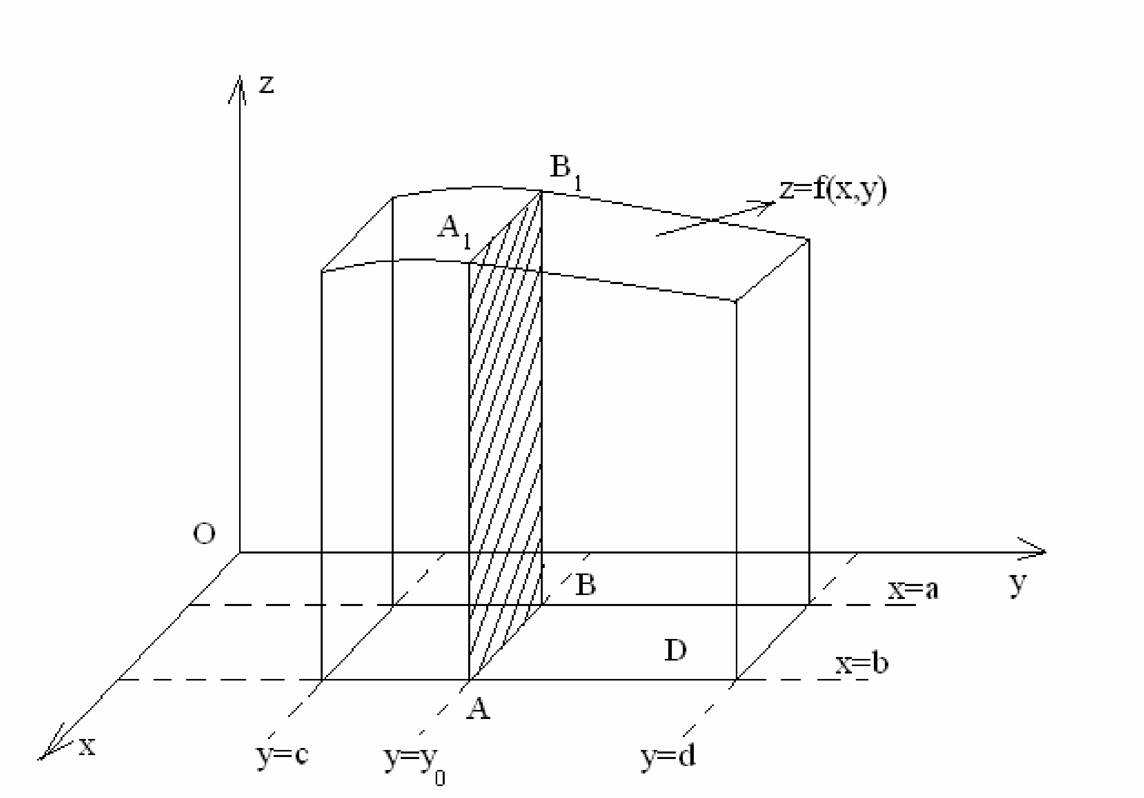

Figura 7.4

Planul $y = y_0$, perpendicular pe axa y, taie corpul cilindric după o secțiune ABB_1A_1 mărginită superior de curba A_1B_1, definită de ecuația $z = f(x, y_0)$. Aria acestei secțiuni este

$$\int_a^b f(x, y_0)\,dx \tag{14}$$

Integrarea se face în raport cu *x*, iar *y* este constant $y = y_0$.
Considerăm funcția de argument *y*:

$$S(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx \tag{15}$$

care ne dă aria secțiunii în corpul cilindric dependentă de poziția planului secant.

Volumul corpului cilindric poate fi calculat

$$V = \int_c^d S(y)\,dy \tag{16}$$

sau poate fi exprimat ca o integrală dublă a lui $f(x, y)$ pe dreptunghiul π:

$$\iint_{\pi} f(x,y)\,dxdy = \int_c^d S(y)\,dy = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy$$

Sau altă scriere:

$$\iint_{\pi} f(x,y)\,dxdy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx \tag{17}$$

Volumul corpului cilindric poate fi calculat şi cu ajutorul secţiunilor determinate de planele $x = x_0$

$$\iint_{\pi} f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy \tag{18}$$

Relaţiile (17) şi (18) conţin două integrale simple succesive.

Observaţie: Ordinea de integrare nu contează.

Exemplu:
Calculaţi integrala dublă a lui $z = x^2 + y^2$ pe domeniul $\pi = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$

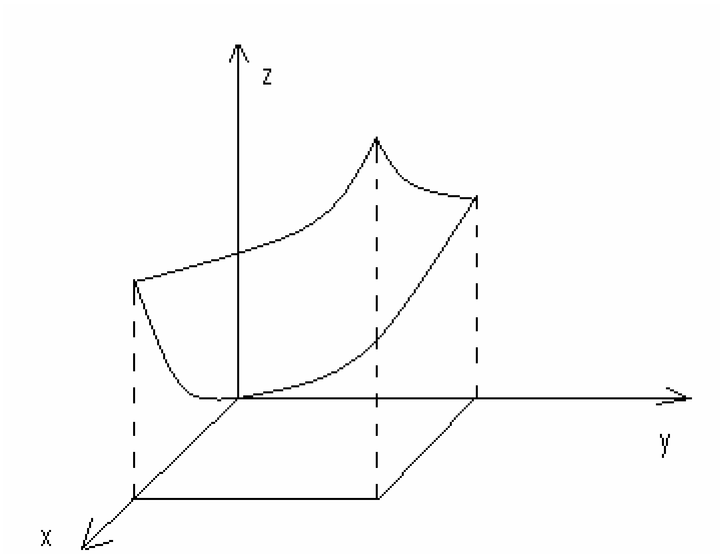

Figura 7.5

$$\iint_{\pi}\left(x^2+y^2\right)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^1 \left(x^2+y^2\right)dy =$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{3}\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

II. Cazul unui domeniu arbitrar

Considerăm un domeniu de integrare *D*, mărginit şi închis, de formă arbitrară, în planul *xy*. Mai mult, presupunem că domeniul *D* îndeplineşte următoarea condiție: oricare dreaptă $x = ct \ \left(a \le x \le b\right)$, paralelă cu axa *Oy* intersectează frontiera lui *D* în nu mai mult de două puncte sau după un segment.

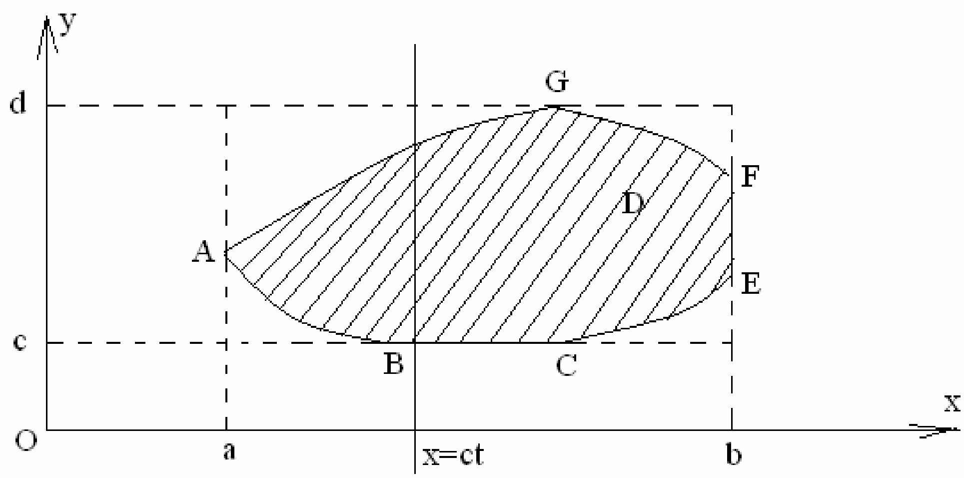

Figura 7.6

Domeniul oarecare *D* se poate încadra în dreptunghiul:

$$\pi = \left\{\left(x, y\right) \middle| a \le x \le b, c \le y \le d\right\}$$

Segmentul $\left[a, b\right]$ este proiecția ortogonală a domeniului *D* pe axa *Ox*, iar segmentul $\left[c, d\right]$ este proiecția ortogonală a domeniului *D* pe axa *Oy*.

Pentru analiza care urmează, considerăm un domeniu şi mai simplu:

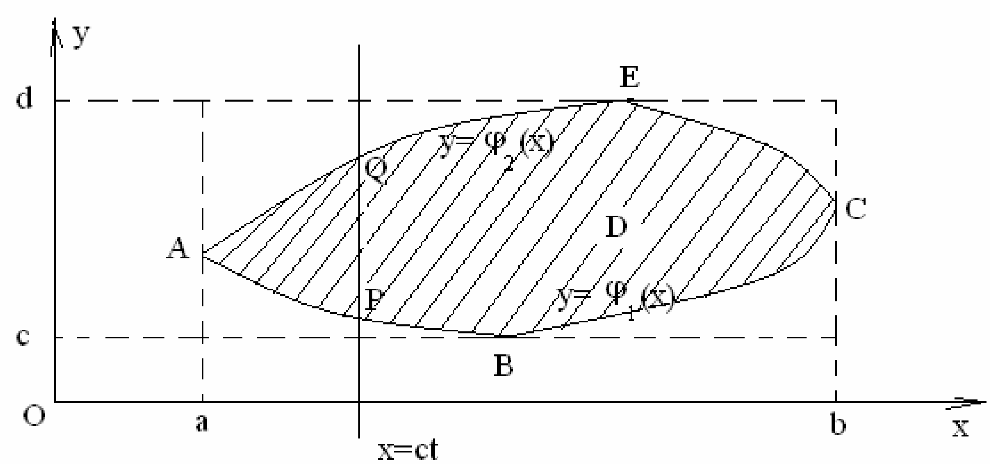

Figura 7.7

Punctele A şi C împart frontiera lui D în curbele ABC şi AEC. O dreaptă arbitrară, paralelă cu axa Oy, intersectează curbele ABC şi AEC în nu mai mult de un punct. Atunci ecuațiile care definesc aceste curbe pot fi scrise într-o formă rezolvată în y:

$$(ABC): y = \varphi_1(x)$$

$$(AEC): y = \varphi_2(x), \quad x \in [a,b]$$

Considerăm un corp cilindric a cărui bază este domeniul analizat mai sus. Suprafața superioară a corpului cilindric o considerăm definită de ecuația $z = f(x,y)$. Secționăm corpul cu un plan $x = ct$, $(a < x < b)$. Secțiunea rezultată notată $PQMN$, are aria dată de integrala funcției $f(x,y)$ privită ca o funcție de o singură variabilă y. Variabila y ia valori de la ordonata $\varphi_1(x)$ a punctului P până la ordonata $\varphi_2(x)$ a punctului Q.

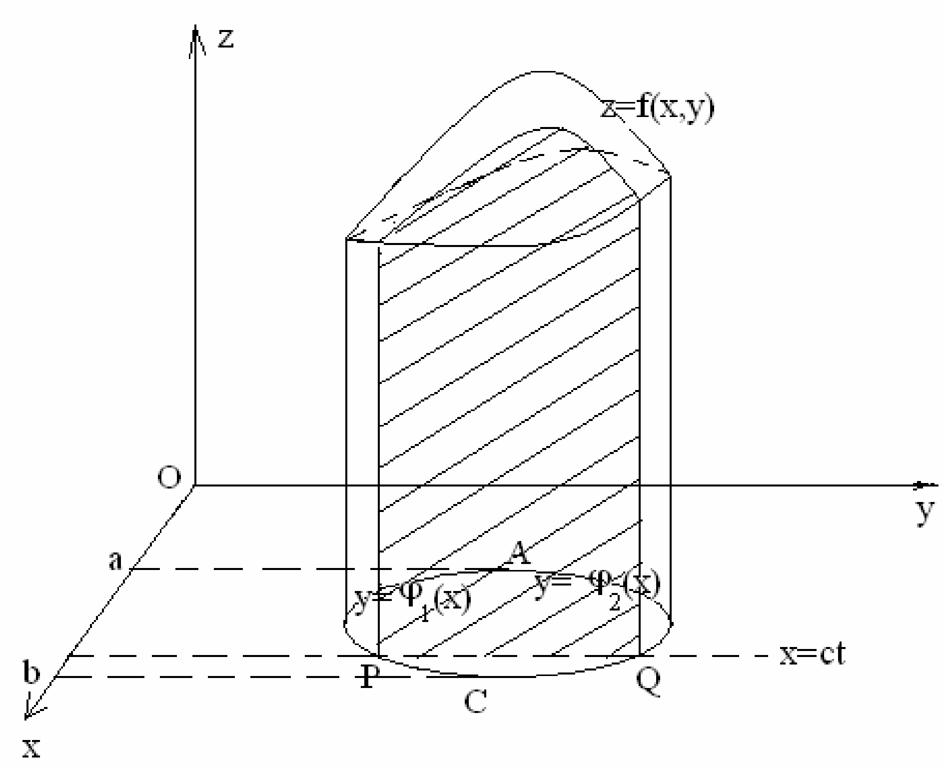

Figura 7.8

Punctul P este punctul de intrare în domeniul D al dreptei $x = ct$ din planul xy, iar Q este punctul de ieşire din domeniul D. In consecință, integrala

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy = S(x)$$

furnizează o expresie pentru aria secțiunii plane a corpului cilindric. Aceasta este o funcție de poziția planului secant $x = ct$. Volumul corpului va fi egal cu integrala acestei expresii în raport cu *x* pe domeniul $[a,b]$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \qquad (19)$$

Caz particular: Aria *S* a domeniului *D*

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \qquad (20)$$

Considerăm acum situația în care o dreaptă $y = ct$, $y \in [c,d]$ intersectează frontiera lui *D* în nu mai mult de două puncte *P*, *Q* cu abscisele $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$ sau după un segment *MN*.

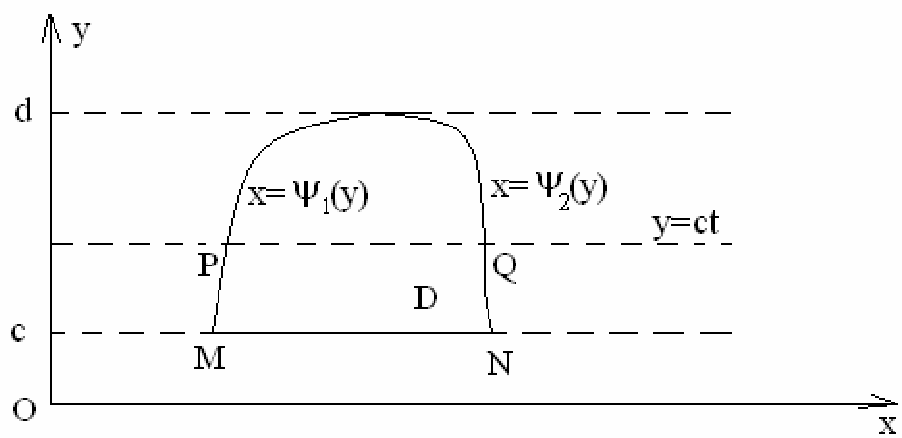

Figura 7.9

Argumente similare ne conduc la formula:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \qquad (21)$$

care reduce şi ea, calculul integralei duble la o succesiune de integrale simple.

Exemplu: Calculați integrala dublă a funcției $f(x,y) = 2x - y + 3$ pe domeniul *D* mărginit de $y = x$ şi $y = x^2$.

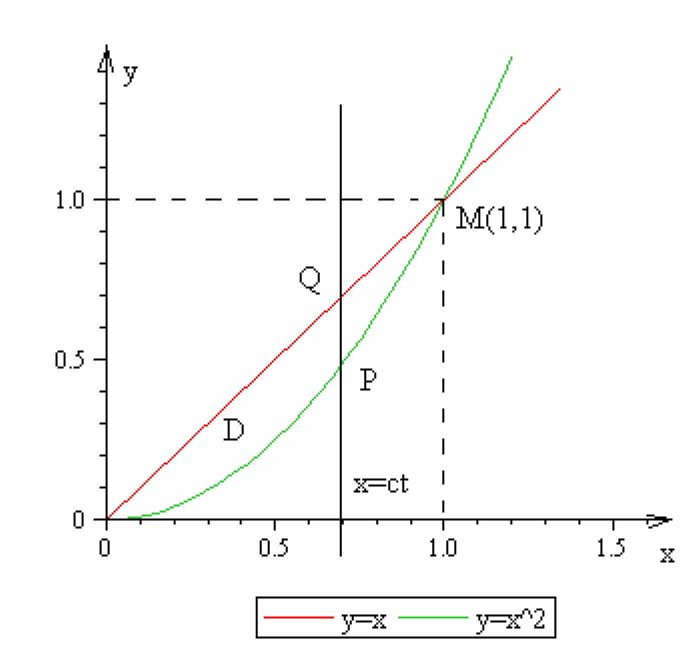

Figura 7.10

Dreapta $y = x$ şi parabola $y = x^2$ se intersectează în punctele $O(0,0)$ şi $M(1,1)$. Astfel, x variază de la *0* la *1* şi $\varphi_1(x) = x^2$ şi $\varphi_2(x) = x$. Cum orice dreaptă $x = \text{ct}$ $(0 \le x \le 1)$ intersectează frontiera lui *D* în nu mai mult de două puncte, putem aplica formula (19).

$$\iint_D (2x - y + 3)\,dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} (2x - y + 3)\,dy =$$

$$= \int_0^1 \left(2xy - \frac{y^2}{2} + 3y \right)\Bigg|_{y=x^2}^{y=x} dx = \int_0^1 \left(2x^2 - \frac{x^2}{2} + 3x - 2x^3 + \frac{x^4}{2} - 3x^2 \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(3x - \frac{3}{2}x^2 - 2x^3 + \frac{x^4}{2} \right) dx = \left(3\frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^4}{4} + \frac{1}{2}\frac{x^5}{5} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{5}$$

Putem utiliza şi formula (21):

$$\iint_D (2x - y + 3)\,dxdy = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} (2x - y + 3)\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left(2\frac{x^2}{2} - yx + 3x \right)\Bigg|_{x=y}^{x=\sqrt{y}} dy = \int_0^1 \left(y - y\sqrt{y} + 3\sqrt{y} - y^2 + y^2 - 3y \right) dy =$$

$$=\int_0^1\left(3\sqrt{y}-2y-y^{3/2}\right)dy=\left.\left(3\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-2\frac{y^2}{2}-\frac{y^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right)\right|_0^1=\frac{3}{5}$$

Exemplu:
Calculați volumul corpului mărginit de suprafața $z=1-4x^2-y^2$ şi de planul *xy*.

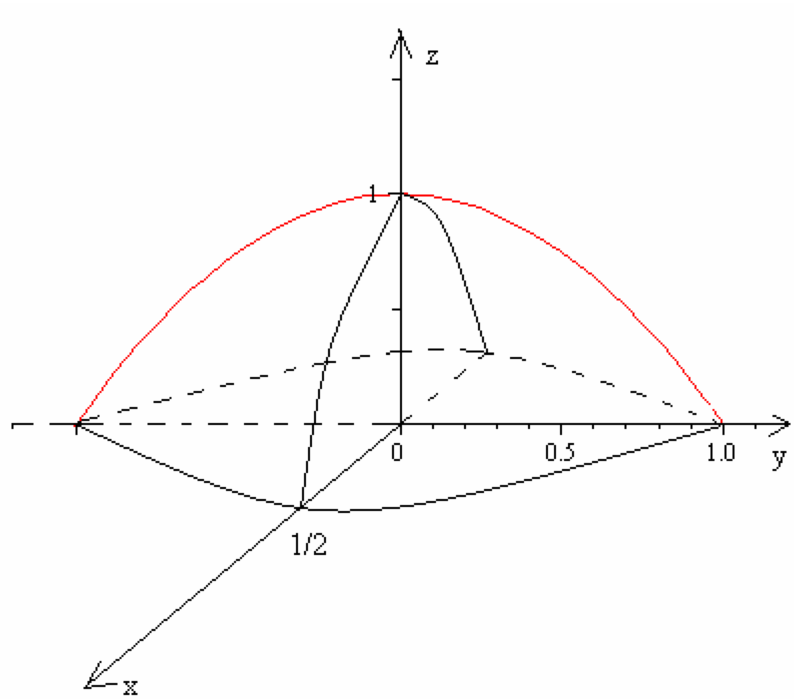

Figura 7.11

Paraboloidul eliptic $z=1-4x^2-y^2$ se intersectează cu planul *xy* de ecuație $z=0$ de-a lungul curbei:

$$L:\begin{cases} z=0 \\ \left(\dfrac{x}{\frac{1}{2}}\right)^2+\left(\dfrac{y}{1}\right)^2=1 \end{cases}$$

Această curbă este o elipsă cu semiaxele: $a=\dfrac{1}{2}$ şi $b=1$.

Vezi curs :-)