Lecţii de Mecanică

Ion I. Cotăescu

May 14, 2003

Cuprins

Capitolul 1

Descrierea mărimilor fizice

Mecanica fiind primul capitol din fizica clasica are ca obiect de studiu miscarea corpurilor in spatiu si timp. In pofida unei simplitati aparente, ea este o disciplina complexa, complet elaborata, capabila sa descrie sisteme complicate, implicand marimi fizice dintre cele mai diverse si aproape intregul aparat matematic al fizicii clasice (analiza matematica, calculul vectorial si tensorial, geometria diferentiala, etc.), menit sa descrie evolutia in timp a marimilor fizice care pot fi masurate in mod direct sau indirect.

1.1 Masuratori in fizica clasica

In general, marimile fizice, numite si *observabile*, masurate in anumit loc la un moment dat, sunt reprezentate de numere reale sau de ansambluri de numere reale organizate ca obiecte matematice cu proprietati specifice cum ar fi vectorii, tensorii sau spinorii [1]. Aceste numere se obtin in urma unui experiment prin care se masoara marimile dorite cu ajutorul unui *aparat de masura*. Acesta interactioneaza cu sistemul masurat furnizandu-ne date experimentale din care se deduc marimile fizice. Procedurile experimentale nu sunt intotdeauna simple deoarece, in afara erorilor experimentale inerente, este posibil ca aparatul de masura sa modifice starea sistemului masurat. In aceste conditii se pune problema increderii pe care putem sa o acordam rezultatelor unui anumit experiment. In fizica clasica aceasta problema se rezolva transant prin urmatoarele doua asertiuni:

1. *Orice experiment poate fi perfectionat si erorile eliminate prin metodele de statistica matematica astfel incat, crescand numarul de masuratori, precizia experimentului sa creasca, rezultatele apropiindu-se tot mai mult de valoarile exacte care ar fi furnizate de un aparat de masura ideal, neafectat de erori, care se supune cu precizie legilor cunoscute ale fizicii.*

2. *Influenta aparatului de masura asupra sistemului de masurat este complet controlabila si poate fi eliminata prin calcul.*

[1] Fizica clasica opereaza cu marimi scalare, vectoriale si tensoriale, marimile spinoriale fiind specifice fizicii cuantice.

Pe de alta parte, orice marime fizica poarta *dimensiuni fizice* [2] care rezulta din modul cum este ea definita sau masurata in raport cu un numar minim de etaloane strict necesare. In fizica clasica nerelativista trebuiesc folosite cel putin trei etaloane pentru masa, lungime si timp. De aceea dimensiunea fizica D se exprima ca un produs de puteri ale dimensiunilor fundamentale (masa M, lungime L si timp T) de forma

$$D = M^a L^b T^c \,. \tag{1.1}$$

In cazul in care $a = b = c = 0$ se spune ca marimea este *adimensionala*. De obicei, dimensiunile fizice nu apar explicit in formule dar ele sunt bine precizate in urma asa numitei analize dimensionale. Aceasta se bazeaza pe o regula simpla conform careia prin produsul a doua marimi avand dimensiunile D_1 si D_2 se obtine o noua marime de dimensiune $D_1 D_2$.

Valoarea numerica a marimilor cu dimensiuni fizice depinde de sistemul de unitati folosit. Se stie ca sistemul legal este Sistemul International (SI) dar exista domenii largi in fizica atomica sau nucleara, dar si in astrofizica si cosmologie unde este convenabil sa se foloseasca alte sisteme de unitati, adecvate scalelor de dimensiuni caracteristice domeniilor respective. In plus, generalizarea prelucrarii computerizate a datelor numerice si rezolvarea numerica pe calculator a unor probleme care nu au solutii analitice impune utilizarea unor sisteme de unitati adecvate fiecarei probleme in parte astfel incat sa se evite folosirea in calcule a unor numere excesiv de mari sau de mici.

1.2 Spatiul E_3 al vectorilor tridimensionali

1.2.1 Marimi fizice scalare si vectoriale

In cazul in care o marime fizica este data printr-un *singur* numar real spunem ca ea este o marime *scalara* iar corpul $\mathbb{R}$ al numerelor reale va mai fi numit si *corpul scalarilor*. Deoarece, in cele mai multe cazuri, interactiunile se supun principiului suprapunerii efectelor, majoritatea marimilor fizice se incadreaza in categoria generala a spatiilor liniare (sau vectoriale) definite pe corpul $\mathbb{R}$. De aceea, in pofida simplitatii lor, marimile fizice scalare sunt implicate in constructia tuturor obiectelor matematice cu care incercam sa descriem lumea fizica.

O marime fizica scalara va fi data printr-un numar real si *unitatea de masura* corespunzatoare dimensiunii sale fizice in sistemul de unitati ales. In cele ce urmeaza vom folosi notatia $[D]$ pentru multimea marimilor scalare avand dimensiunea D, specificand ca aceasta nu mai reprezinta un corp deoarece prin inmultirea a doua astfel de marimi scalare se obtine un nou tip de marime scalara de dimensiune D^2. De aceea vom considera multimile $[D]$ ca spatii liniare unidimensionale (in sens geometric), definite pe corpul $\mathbb{R}$ al scalarilor adimensionali.

Utilizarea marimilor fizice scalare in formule in care intervin functii elementare (sin, cos, exp, etc.) atrebuie facuta cu atentie deoarece argumentele acestor functii trebuie sa fie adimensionale. Asadar vom avea grija ca argumentele acestor functii sa fie numere reale care sa reprezinte un raport de doi scalari cu aceeasi dimensiune dintre care numitorul poate reprezenta chiar unitatea de masura convenabila in problema respectiva.

[2] Folosim aici termenul de dimensiune fizica, in loc de dimensiune, pentru a evita confuzia cu notiunea de dimensiune (geometrica) a unui spatiu liniar.

Toate marimile fizice vectoriale sunt descrise, din punct de vedere matematic, de vectorii tridimensionali, $\vec{a}, \vec{b}, ...\vec{x}, \vec{y}, ...$, din spatiul *euclidian* E_3. Acesta este un spatiu liniar tridimensional definit pe corpul $\mathbb{R}$ in care s-a introdus un produs scalar (vezi Anexa A). El este inzestrat cu cele doua operatii specifice care satisfac axiomelor generale ale spatiului liniar. Prima operatie este operatia interna de *adunare* sau *compunere* a vectorilor notata cu $\vec{a}+\vec{b} \in E_3$, in raport cu care E_3 formeaza un *grup abelian.* Aceasta inseamna ca operatia de compunere este *asociativa*, $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$, admite un element neutru, $\vec{0}$, numit *vectorul nul*, care satisface $\vec{a}+\vec{0} = \vec{0}+\vec{a} = \vec{a}$, si ca fiecarui vector $\vec{a} \in E_3$ ii corespunde *inversul* sau $-\vec{a}$ astfel incat $\vec{a}+(-\vec{a}) = \vec{0}$. In plus, operatia de compunere este *comutativa*, adica $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$. A doua operatie este cea de *inmultire cu scalari* din corpul $\mathbb{R}$. Aceasta va fi notata ca o inmultire obisnuita, $\alpha\vec{a}$ $(\alpha \in \mathbb{R}, \vec{a} \in E_3)$, deoarece are ca rezultat tot un vector din E_3. Conform axiomelor generale, principalele reguli de calcul sunt $\alpha(\vec{a}+\vec{b}) = \alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$, $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$ si $1\,\vec{a} = \vec{a}$. Este important sa retinem ca $\alpha\vec{0} = \vec{0}$ pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$ si ca prin inmultirea oricarui vector $\vec{a} \in E_3$ cu scalarul $0 \in \mathbb{R}$ se obtine intotdeauna vectorul nul, $0\,\vec{a} = \vec{0}$.

Subspatiile netriviale din E_3 sunt fie unidimensionale fie bidimensionale. Orice vector $\vec{a}$ determina un subspatiu unidimensional $E_1(\vec{a}) = \{\lambda\,\vec{a} | \lambda \in \mathbb{R}\}$ care, conform interpretarii geometrice obisnuite, se mai numeste si *directie* (orientata), vectorii sai fiind considerati *paraleli* sau *coliniari* cu $\vec{a}$. Subspatiile bidimensionale sunt *plane* care se construiesc ca acoperirea liniara a unor perechi de vectori liniar independenti (neparaleli). Astfel daca se dau doi vectori neparaleli $\vec{a}$ si $\vec{b}$, acoperirea lor liniara $E_2(\vec{a},\vec{b}) = \{\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b} | \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$ este un subspatiu bidimensional din E_3. Este important sa retinem ca vectorii din E_3 sunt *vectori liberi* in sensul ca punctul lor aplicatie este indiferent. De aceea pentru a nu gresi atunci cand operam cu imaginea geometrica a vectorilor trebuie sa ne imaginam ca toti vectorii liberi pot fi adusi in acelasi punct de aplicatie care corespunde vectorului $\vec{0}$. In acest fel respectam faptul ca *toate* subspatiile din E_3 au o *intersectie comuna* care este subspatiul trivial $\{\vec{0}\}$ ce contine numai vectorul nul. In rest, relatiile concrete dintre subspatii pot fi diverse. De exemplu un subspatiu bidimensional poate include un subspatiu unidimensional sau doar sa se interescteze cu acesta avand subspatiul $\{\vec{0}\}$ comun. Deoarece in E_3 seturile de vectori liniar independenti contin *cel mult* trei vectori, intersectia a doua subspatii bidimensionale este intotdeauna un subspatiu unidimensional.

Spatiul E_3 este organizat ca un spatiu *euclidian* fiind inzestrat cu un *produs scalar* prin care oricaror doi vectori $\vec{a}, \vec{b} \in E_3$ li se asociaza produsul lor scalar $\vec{a}\cdot\vec{b}$ care este un numar real. Prin definitie, produsul scalar este simetric ($\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$) si liniar in ambii termeni ceea ce inseamna ca $\vec{c}\cdot(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}) = (\alpha\vec{a}+\beta\vec{b})\cdot\vec{c} = \alpha\,\vec{a}\cdot\vec{c}+\beta\,\vec{b}\cdot\vec{c}$. Produsul scalar al unui vector $\vec{a}$ cu el insusi, $\vec{a}^2 = \vec{a}\cdot\vec{a}$, este un numar real ne-negativ care se anuleaza doar atunci cand $\vec{a} = \vec{0}$. De aceea, cu ajutorul lui se poate defini *modulul* sau *lungimea* unui vector,

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{\vec{a}^2} \tag{1.2}$$

care este un numar real si pozitiv pentru orice $\vec{a} \in E_3$ cu exceptia vectorului nul pentru care $|\vec{0}| = 0$. Nu este greu de aratat ca $|\alpha\,\vec{a}| = |\alpha|\,|\vec{a}|$, si $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \le \vec{a}^2\,\vec{b}^2$ de unde rezulta inegalitatea triunghiului, $|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}|+|\vec{b}|$. Dar rolul cel mai important al produsului scalar este definirea ortogonalitatii, doi vectori nenuli fiind *ortogonali* daca produsul lor scalar este nul.

Un rol aparte in descrierea proprietatilor geometrice il vor juca vectorii de modul 1, numiti vectori *unitari* sau *versori*. Fiecarui vector $\vec{a} \neq \vec{0}$ i se asociaza versorul sau

$$\vec{u}_{\vec{a}} = \left(\frac{1}{|\vec{a}|}\right) \vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \tag{1.3}$$

cu ajutorul caruia el poate fi scris sub forma

$$\vec{a} = |\vec{a}|\, \vec{u}_{\vec{a}}\,, \tag{1.4}$$

regasind astfel definitia traditionala a vectorului ca o marime caracterizata prin lungime ($|\vec{a}|$) directie si sens (determinate de $\vec{u}_{\vec{a}}$). In plus, versorii permit definirea pozitiei relative a oricaror doi vectori *nenuli* din E_3, $\vec{a}$ si $\vec{b}$, prin unghiul $\theta(\vec{a}, \vec{b})$ dintre ei, care este dat de formula

$$\cos\theta(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\, |\vec{b}|} = \vec{u}_{\vec{a}} \cdot \vec{u}_{\vec{b}}\,. \tag{1.5}$$

Daca se calculeaza $(\vec{a} + \vec{b})^2$ se obtine imediat teorema lui Pitagora generalizata si, implicit, regula paralelogramului pentru compunerea a doi vectori.

Marimile fizice vectoriale poarta si ele dimensiuni D specifice care le individualizeaza chiar daca au in comun caracterul de vector. Dimensiunile fizice sunt atasate numai lungimii vectorului, deoarece, prin definita lor, versorii sunt intotdeauna adimensionali, ei purtand doar informatie geometrica. Ca si in cazul marimilor scalare vom opera cu mai multe tipuri de spatii $E_3[D]$, fiecare continand vectori cu o anumita dimensiune fizica D, bine precizata. Acestea sunt spatii vectoriale, in sensul definitiei matematice, doar in raport cu operatiile de compunere si inmultire cu scalari adimensionali din corpul $\mathbb{R}$. Desigur, este permisa si inmultirea cu marimi scalare avand dimensiuni fizice dar daca un vector din $E_3[D_1]$ este inmultit cu un scalar din $[D_2]$ atunci rezultatul va fi dintr-un nou spatiu vectorial, $E_3[D_1 D_2]$. Aceeasi observatie este valabila si in ceea ce priveste produsul scalar: prin inmultirea scalara a doi vectori din doua spatii diferite, $E_3[D_1]$ si $E_3[D_2]$, se obtine un scalar din $[D_1 D_2]$.

Marimile fizice vectoriale cu dimensiuni fizice diferite, in pofida faptului ca nu au module comensurabile intre ele, pot avea pozitii geometrice relative bine precizate prin orientarea versorilor lor. De aceea este util sa utilizam baze de versori liniar independenti in raport cu care se pot descrie doar proprietati pur geometrice, independente de dimensiunile fizice ale vectorilor folositi.

1.2.2 Baze ortonormate in E_3

Introducerea notiunii de ortogonalitate dintre vectori, dintre un vector si un subspatiu sau dintre doua subspatii, permite descompunerea spatiului E_3 in subspatii ortogonale intre ele. Pentru aceasta, se alege, mai intai, un versor $\vec{e}_1$ care defineste subspatiul unidimensional $E_1(\vec{e}_1) = \{\lambda\, \vec{e}_1 | \lambda \in \mathbb{R}\}$. Apoi se defineste *complementul* ortogonal al acestuia ca fiind subspatiul bidimensional al tuturor vectorilor din E_3 ortogonali pe $\vec{e}_1$ (si implicit pe toti vectorii din $E_1(\vec{e}_1)$). Acest subspatiu bidimensional, la randul lui, contine doua subspatii unidimensionale ortogonale intre ele, $E_1(\vec{e}_2)$ si $E_1(\vec{e}_3)$. Procedand astfel se obtine o *descompunere ortogonala* notata prin

$$E_3 = E_1(\vec{e}_1) \oplus E_2(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = E_1(\vec{e}_1) \oplus E_1(\vec{e}_2) \oplus E_1(\vec{e}_3)\,, \tag{1.6}$$

unde $E_2(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = E_1(\vec{e}_2) \oplus E_1(\vec{e}_3)$ este complementul ortogonal al lui $E_1(\vec{e}_1)$. In termeni geometrici obisnuiti acesta este *planul* perpendicular pe directia versorului $\vec{e}_1$.

Definiţia 1.1 *Setul de versori ortogonali* $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ *se numeste sistem* ortonormat *sau* baza *in* E_3.

Versorii bazei au urmatoarele proprietati

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = 1\,, \\ \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0\,, \quad \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = 0\,, \quad \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 0 \end{aligned} \tag{1.7}$$

din care rezulta ca orice vector $\vec{x} \in E_3$ se scrie astfel

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 \tag{1.8}$$

unde

$$x_1 = \vec{e}_1 \cdot \vec{x}\,, \quad x_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{x}\,, \quad x_3 = \vec{e}_3 \cdot \vec{x}\,. \tag{1.9}$$

formeaza un ansamblu de trei numere reale atasat vectorului.

Definiţia 1.2 *Numerele* x_1, x_2, *si* x_3 *sunt* componentele *vectorului* $\vec{x}$ *in baza* $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. *Vectorii* $x_1\vec{e}_1$, $x_2\vec{e}_2$ *si* $x_3\vec{e}_3$ *se numesc* proiectiile *vectorului* $\vec{x}$ *pe subspatiile unidimensionale* $E_1(\vec{e}_1)$, $E_1(\vec{e}_2)$ *si respectiv* $E_1(\vec{e}_3)$.

Atunci cand se da vectorul $\vec{x}$, componentele sale sunt complet determinate prin relatiile (1.9). Reciproc, orice ansamblu arbitrar de trei numere reale (x_1, x_2, x_3) defineste in mod univoc un vector prin formula (1.8). Astfel se stabileste o corespondenta biunivoca intre vectorii din E_3 si elementele spatiului aritmetic $\mathbb{R}^3$ (vezi Anexa A) pe care o vom nota prin $\vec{x} : (x_1, x_2, x_3)$, avand grija sa precizam baza in raport cu care se dau componentele. Se mai spune ca, intr-o baza ortonormata, spatiul E_3 este *reprezentat* de spatiul $\mathbb{R}^3$, intelegand ca o schimbare de baza atrage dupa sine o schimbare a reprezentarii in sensul ca se schimba valorile componentelor care reprezinta vectorii. Sa notam ca, in particular, componentele versorilor bazei sunt intotdeauna

$$\vec{e}_1 : (1, 0, 0)\,, \quad \vec{e}_2 : (0, 1, 0)\,, \quad \vec{e}_3 : (0, 0, 1)\,, \tag{1.10}$$

in timp ce compnentele unui versor oarecare $\vec{u}$, in baza considerata, sunt *cosinusii directori* ai acestui versor $(\cos\theta_1, \cos\theta_2, \cos\theta_3)$ rezultati din (1.5) ca fiind $\cos\theta_1 = \vec{e}_1 \cdot \vec{u}$,... etc.

Introducerea bazelor ne ofera avantajul unor calcule mai simple in care toate operatiile cu vectori se reduc la operatii aritmetice. Intr-adevar, considerand o baza $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, este usor de verificat ca prin compunerea a doi vectori, $\vec{x} : (x_1, x_2, x_3)$ si $\vec{y} : (y_1, y_2, y_3)$, se obtine vectorul $\vec{x} + \vec{y}$ avand componentele $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$ si ca vectorul $\alpha\,\vec{x}$ are componentele $(\alpha\,x_1, \alpha\,x_2, \alpha\,x_3)$. Sa notam ca aceasta regula de compunere este *echivalenta* cu regula paralelogramului. De asemenea, este important de retinut ca vectorul $\vec{0}$ are componentele $(0, 0, 0)$ nu numai in aceasta baza ci si in *orice* alta baza din E_3. In sfarsit, folosind scrierea (1.8) a vectorilor pe componente, exploatand proprietatile de liniaritate ale produsului scalar si tinand seama de relatiile (1.7) obtinem

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3\,, \tag{1.11}$$

de unde rezulta expresia uzuala a lungimii unui vector,

$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}} = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2}\,, \tag{1.12}$$

si proprietatea cunoscuta a cosinusilor directori, $\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3 = 1$.

Sa observam ca, prin felul in care au fost definite, componentele unui vector poarta aceleasi dimensiuni fizice ca si modulul vectorului respectiv.

1.2.3 Pseudo-vectori si chiralitate

In teoria elementara a spatiilor vectoriale tridimensionale exista o operatie specifica ($\times$) numita *produs vectorial* [3] prin care se asociaza vectorilor $\vec{x}$ si $\vec{y}$ un nou vector $\vec{x}\times\vec{y}$ ale carui componente rezulta din calculul determinantului

$$\vec{x}\times\vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}\,. \tag{1.13}$$

De aici se pot demonstra urmatoarele proprietati

$$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}\,,\ \text{(antisimetrie)} \tag{1.14}$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c} + \vec{b}\times\vec{c}\,,\ \text{(distributivitate)} \tag{1.15}$$

$$(\alpha\,\vec{a})\times\vec{b} = \alpha\,\vec{a}\times\vec{b}\,, \tag{1.16}$$

din care se vede ca produsul vectorial se anuleaza daca si numai daca cei doi vectori sunt paraleli ($\vec{a} = \lambda\,\vec{b}$). Deoarece rezultatul produsului vectorial este un vector, acesta poate fi implicat intr-un produs scalar cu alt vector obtinand *produsul mixt* a trei vectori definit astfel

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\,. \tag{1.17}$$

Produsul mixt este antisimetric la orice permutare a doi termeni intre ei si se anuleaza daca si numai daca intre cei trei vectori exista o relate de dependenta liniara (sunt coplanari). O alta operatie utila care apare frecvent in calcule este *dublul produs vectorial* al carui rezultat este vectorul

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\,\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{c}\,. \tag{1.18}$$

Vectorii obtinuti cu ajutorul produsului vectorial au proprietati aparte care ii deosebesc de vectorii obisnuiti din E_3. Intr-adevar, daca trecem de la o baza data la una privita in oglinda, de exemplu, inlocuind versorul $\vec{e}_3$ cu $-\vec{e}_3$, atunci vectorii obtinuti cu ajutorul produsului vectorial isi schimba semnul deoarece toti termenii din coloana a treia a determinantului din (1.13) isi schimba semnul. Pe de alta parte, vectorii din E_3 raman neschimbati la aceasta transformare deoarece sensul lor nu depinde de alegerea bazei. Pentru a face o distinctie clara

[3] Aici folosim notatia traditionala pentru produsul vectorial care nu trebuie confundat cu produsul a doua multimi. Alte notatii folosite sunt $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{a}\wedge\vec{b} = [\vec{a},\vec{b}]$

intre aceste doua tipuri de comportari, vom spune ca vectorii din E_3 sunt vectori obisnuiti (sau vectori *polari*) in timp ce vectorii obtinuti prin produs vectorial sunt *pseudo-vectori* (sau vectori *axiali*). Sa notam ca vectorii obtinuti din dublul produs vectorial sunt vectori polari deoarece se exprima in functie de doi vectori obisnuiti prin (1.18). Pe de alta parte, scalarul rezultat din produsul mixt isi schimba si el semnul la oglindiri ceea ce ii confera caracter de *pseudo-scalar*. Vom reveni mai tarziu cu precizari privind definirea acestor notiuni intr-un cadru mai larg.

Sa ne reintoarcem acum la definitia bazelor din E_3 observand ca produsul vectorial a doi versori ortogonali este un versor care trebuie sa fie ortogonal pe primii doi. Din (1.10) si (1.13) rezulta ca versorii bazei $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ satisfac

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3\,, \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1\,, \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2\,. \tag{1.19}$$

In functie de cum se alege sensul si numerotarea acestor versori, relatiile (1.19) pot corespunde fie regulii burghiului drept fie regulii burghiului stang. Mai precis, daca rotim, de exemplu, pe $\vec{e}_1$ peste $\vec{e}_2$, pe drumul cel mai scurt, putem gasi versorul $\vec{e}_3$ fie in sensul de inaintare al burghiului drept fie in sensul de inaintare al burghiului stang.

Definiţia 1.3 *Daca relatiile* (1.19) *corespund regulii burghiului drept se spune ca baza este* dreapta*. In caz contrar ea este* stanga*. Aceasta proprietate suplimentara se numeste chiralitate.*

Din cele discutate mai sus rezulta ca schimbarea chiralitatii bazei care inseamna trecerea de la o baza stanga la una dreapta, sau invers, se face printr-o *oglindire* care presupune schimbarea sensului unuia dintre versorii bazei. Vom vedea ca exista si transformari mai complicate care schimba chiralitatea. Cum prin traditie se prefera bazele drepte, asemenea transformari vor trebui in general evitate.

1.3 Elemente de calcul tensorial

1.3.1 Calculul cu indici

Principalele probleme puse, in continuare, de descrierea marimilor vectoriale sunt de doua tipuri. Primele sunt legate de faptul ca, asa cum am precizat, baza de versori ortogonali trebuie sa ramana aceeasi pentru toate tipurile de spatii vectoriale $E_3[D]$, indiferent de semnificatia fizica a vectorilor respectivi. A doua categorie de probleme priveste generalizarea notiunii de marime vectoriala in contextul in care se doreste ca toate marimile noi sa fie introduse fara a face apel la alte baze suplimentare. Cel mai simplu este sa se considere baza comuna data si sa se lucreze numai cu componentele vectorilor sau a marimilor noi definite numai in acesta baza. In acest fel se dezvolta calculul tensorial care implica numai componente cu un anumit numar de indici.

Vom numerota cele trei componente prin care sunt reprezentati vectorii din E_3 cu ajutorul unui set de *indici*, i, j, k, ..., despre care convenim ca pot lua numai valorile 1, 2 si 3. Astfel vom putea nota mai simplu componentele vectorului $\vec{x}$ cu (x_i), subintelegand ca i ia toate cele trei valori posibile. In plus, se adopta *regula indicelui mut* prin care se convine ca, de cate ori apare un indice care se repeta, asupra lui sa se faca sumarea de la 1 la 3. Se obtine astfel un calcul fluent cu formule relativ simple si usor de manipulat. Sa exemplificam rescriind in noua notatie cateva dintre rezultatele anterioare. Notand baza cu $\{\vec{e}_i\}$ formulele (1.8) si (1.9) devin

$$\vec{x} = x_i \vec{e}_i\,, \quad x_i = \vec{e}_i \cdot \vec{x} \tag{1.20}$$

(cu sumare de la 1 la 3 in prima). In aceeasi forma compacta se vor exprima si produsele scalare scrise pe componente, $\vec{x}\cdot\vec{y} = x_i y_i$, sau modulele vectorilor, $|x| = \sqrt{x_i x_i}$. Ramane acum sa vedem cum se pot pune sub forma compacta formulele (1.7). Pentru aceasta este necesar sa se introduca o noua marime cu doi indici, δ_{ij}, numita simbulul Kronecker, astfel incat

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} . \tag{1.21}$$

Se ajunge astfel la necesitatea utilizarii unor marimi reprezentate prin seturi de componente cu mai multi indici care se numesc, in general, *tensori*.

1.3.2 Forme multiliniare si tensori

Tensorii sunt entitati matematice care, intr-o anumita baza, sunt reprezentati de seturi de componente definite cu ajutorul formelor multiliniare de un anumit rang care determina *rangul* (sau ordinul) tensorului, egal cu numarul de indici al componentelor sale. Cum vectorii sunt tensori de rangul intai, vom incepe prin a schita modul cum se pot regasi vectorii din E_3 cu ajutorul formelor liniare, urmand ca apoi sa aplicam aceeasi metoda la tensorii de rangul doi.

Sa consideram o baza data, $\{\vec{e}_i\} \subset E_3$, si o *forma liniara* F care este o aplicatie $F : E_3 \to \mathbb{R}$ cu urmatoarele proprietati

$$F(\vec{x}+\vec{y}) = F(\vec{x}) + F(\vec{y})\,, \quad \forall \vec{x},\, \vec{y} \in E_3 \tag{1.22}$$

$$F(\alpha\vec{x}) = \alpha F(\vec{x})\,, \quad \forall \vec{x} \in E_3,\, \alpha \in \mathbb{R}\,. \tag{1.23}$$

Atunci, pentru orice $\vec{x} = x_i\vec{e}_i \in E_3$ avem $F(\vec{x}) = F(\vec{e}_i)\,x_i$ unde numerele reale $F_i = F(\vec{e}_i)$, numite *coeficientii* formei liniare, se pot interpreta ca fiind componentele vectorului $\vec{F} = F_i\vec{e}_i \in E_3$. Astfel valoarea formei liniare calculata pentru orice vector $\vec{x} \in E_3$ este data de produsul scalar $F(\vec{x}) = \vec{F}\cdot\vec{x}$. Deoarece in baza data o forma liniara este reprezentata de cei trei coeficienti ai sai, se stabileste o corespondenta biunivoca intre spatiul formelor liniare si E_3.

Tensorii de rangul 2 sunt definiti de formele biliniare $T : E_3 \times E_3 \to \mathbb{R}$ care satisfac

$$T(\vec{x}+\vec{y},\vec{z}) = T(\vec{x},\vec{z}) + T(\vec{y},\vec{z})\,, \tag{1.24}$$

$$T(\vec{x},\vec{y}+\vec{z}) = T(\vec{x},\vec{y}) + T(\vec{x},\vec{z})\,, \quad \forall \vec{x},\, \vec{y},\, \vec{z} \in E_3 \tag{1.25}$$

$$T(\alpha\vec{x},\vec{y}) = T(\vec{x},\alpha\vec{y}) = \alpha T(\vec{x},\vec{y})\,, \quad \forall \vec{x},\, \vec{y} \in E_3,\, \alpha \in \mathbb{R}\,. \tag{1.26}$$

In baza $\{\vec{e}_i\}$ valoarea formei biliniare se scrie astfel $T(\vec{x},\vec{y}) = T_{ij}x_iy_j$ in functie de *coeficientii* sai, $T_{ij} = T(\vec{e}_i,\vec{e}_j)$.

Definiţia 1.4 *Se numeste tensor de rangul (sau ordinul) doi un obiect geometric reprezentat intr-o anumita baza printr-un ansamblu de componente (T_{ij}) care sunt coeficientii unei forme biliniare in baza data.*

Tensorii de rangul doi in E_3, notati prin simbolul formei liniare, T, sau direct prin componentele lor, (T_{ij}), formeaza un spatiu liniar real 9-dimensional in care compunerea se face adunand componentele cu aceiasi indici iar inmultirea cu scalari se realizeaza multiplicand fiecare componenta cu scalarul respectiv. Tensorul nul se obtine din inmultirea oricarui tensor cu $0 \in \mathbb{R}$ ceea ce inseamna ca el trebuie sa fie tensorul cu *toate* componentele nule. In spatiul tensorilor de rang doi se introduce un *produs scalar* care se calculeaza pe componente astfel

$$T \cdot T' = T_{ij} T'_{ij} \in \mathbb{R} \tag{1.27}$$

(cu sumare dupa ambii indici) si, cu ajutorul lui, se defineste *norma* unui tensor, $\|T\| = \sqrt{T \cdot T}$.

Ca si in cazul vectorilor, dimensiunile fizice ale tensorilor sunt purtate de norma si de fiecare componenta in parte. Tensorii *unitari* de forma $T/\|T\|$ sunt adimensionali.

Procedeul se aplica, in continuare la forme liniare de orice rang obtinand tensori ale caror componente pot avea orice numar de indici. Sa consideram, de exemplu o forma liniara $A : E_3 \times E_3 \times ... \times E_3 \to \mathbb{R}$ de rang n. Atunci numerele reale

$$A_{i_1 i_2 ... i_n} = A(\vec{e}_{i_1}, \vec{e}_{i_1}, ..., \vec{e}_{i_n}) \tag{1.28}$$

reprezinta componentele tensorului A. Tensorii de acelasi rang si cu aceleasi dimensiuni fizice apartin aceluiasi spatiu liniar. In cazul tensorilor, in afara operatiilor de spatiu liniar se mai pot face si operatii intre tensori de diferite ranguri care constau in sumarea dupa un anumit numar de indici a produselor componentelor tensorilor implicati. Aceasta operatie se numeste *contractie*. In general, daca A este un tensor de rang m iar B un tensor de rang n atunci o contractie pe primii s indici ne da un tensor C de rang $m+n-2s$ de componente $C_{k_1...k_{m-s} j_1...j_{n-s}} = A_{i_1 i_2 ... i_s k_1 ... k_{m-s}} B_{i_1 i_2 ... i_s j_1 ... j_{n-s}}$. Contractiile pot fi facute si intre indicii aceleiasi componente astfel $B_{kl...} = A_{iikl...} = \delta_{ij} A_{ijkl...}$.

Exemplu: **Contractii.** Ec.(1.27) reprezinta o contractie in urma careia rezulta un scalar. Alta contractie posibila este intre un tensor de rangul doi. A, si un vector, de forma $b_j = A_{ij} a_i$, in urma careia rezulta un alt vector. Daca componentele a doi tensori de rangul doi se contracta intr-un singur indice atunci se obtine tot un tensor de rangul doi, $C_{ij} = A_{ik} B_{kj}$. □

1.3.3 Tensori simetrici si antisimetrici

O forma biliniara este *simetrica* daca $T(\vec{x}, \vec{y}) = T(\vec{y}, \vec{x})$ si *antisimetrica* daca $T(\vec{x}, \vec{y}) = -T(\vec{y}, \vec{x})$. Unei forme simetrice ii corespunde un tensor simetric cu 6 componente independente, $T_{ij} = T_{ji}$, iar unei forme antisimetrice un tensor antisimetric cu 3 componente independente $T_{ij} = -T_{ji}$. Un tensor oarecare se poate scrie intotdeauna ca suma dintre un tensor simetric si un tensor antisimetric, $T = T^{(sim)} + T^{(ant)}$ unde

$$T_{ij}^{(sim)} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) \, , \quad T_{ij}^{(ant)} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) \, . \tag{1.29}$$

Tensorii simetrici si tensorii antisimetrici fac parte din subspatii ortogonale intre ele deoarece produsul scalar (1.27) ne da intotdeauna $T^{(sim)} \cdot T^{(ant)} = 0$, in urma contractiei unei pereche de indici simetrici cu o pereche de indici antisimetrici.

Faptul ca in E_3 tensorii antisimetrici au trei componente independente permite renumerotarea componentelor cu un singur indice prin permutari circulare astfel

$$t_1 = T_{23}^{(ant)} = -T_{32}^{(ant)}\,, \quad t_2 = T_{31}^{(ant)} = -T_{13}^{(ant)}\,, \quad t_3 = T_{12}^{(ant)} = -T_{21}^{(ant)}\,, \tag{1.30}$$

obtinand vectorul $\vec{t} = t_i \vec{e}_i$. Dar acesta nu este un vector polar ci un vector axial sau pseudo-vector. Intr-adevar, daca facem o transformare de oglindire a bazei, schimband pe $\vec{e}_3$ in $-\vec{e}_3$, atunci toate componentele $T_{ij}^{(ant)}$ pentru care indicii i sau j iau valoarea 3 isi schimba semnul si intreg vectorul $\vec{t}$ se inverseaza. Concluzia este ca pseudo-vectorii sunt de fapt tensori de rangul doi antisimetrici cu componentele renumerotate. Comportarea lor axiala este datorata tocmai modului cum se face aceasta renumerotare. Spatiul pseudo-vectorilor care, in mod evident, este tot un spatiu liniar tridimensional va fi notat cu $\hat{E}_3$.

Pentru a scrie renumerotarea (1.30) intr-o forma compacta se foloseste simbolul Levi-Civita ε_{ijk} care reprezinta un ansamblu de componente complet antisimetrice dintre care cele nenule sunt

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{123} = \varepsilon_{312} = \varepsilon_{231} = 1 \quad \text{(pentru permutarile pare ale numerelor 123)} \\ &\varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = -1 \quad \text{(pentru permutarile impare)}\,, \end{aligned} \tag{1.31}$$

si se supune urmatoarelor reguli de calcul

$$\varepsilon_{ijm}\varepsilon_{klm} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}\,, \tag{1.32}$$

$$\varepsilon_{inm}\varepsilon_{knm} = 2\delta_{ik}\,. \tag{1.33}$$

Cu ajutorul lui rescriem relatiile (1.30) astfel

$$t_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} T_{jk}^{(ant)} \quad \text{sau} \quad T_{ij}^{(ant)} = \varepsilon_{ijk} t_k\,. \tag{1.34}$$

Astfel vectorul obtinut din produsul vectorial este un caz particular de tensor antisimetric cu componente renumerotate,

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k\,. \tag{1.35}$$

Vom arata mai tarziu ca tocmai proprietatile specifice ale simbolului Levi-Civita confera caracterul de pseudo-vector (sau vector axial) vectorilor obtinuti din tensorii antisimetrici. Cu aceasta noua notatie, pseudo-scalarul (1.17) rezultat din produsul mixt se scrie $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k$, iar relatiile (1.19) se pun in forma compacta $\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \varepsilon_{ijk}\vec{e}_k$.

Exemplu: **Formule combinate.** Utilizarea simultana a scrierii vectoriale, $\vec{t} = t_i \vec{e}_i$, si pe componente (1.34) a tensorilor antisimetrici permite obtinerea unor relatii de tipul

$$\vec{t} \times \vec{e}_k = T_{kj}^{(ant)} \vec{e}_j\,, \tag{1.36}$$

utile in trecerea de la un formalism la altul. □

1.3.4 Matrice atasate tensorilor de rangul doi

Sa observam ca tensorii de rangul doi se asociaza matricilor patrate care au ca elemente de matrice chiar componentele tensorului. Atunci contractiile intr-un singur indice, in urma carora rezulta tot tensori de rangul al doilea, pot fi privite ca operatii intre matrice.

Exemplu: **Operatii cu matrice.** Considerand tensorii de componente A_{ij} si B_{kl} vom nota cu A si B atat tensorii cat si matricele care au aceste elemente de matrice. De exemplu matricea tensorului A va fi

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} . \tag{1.37}$$

In termenii calculului matriceal, contractiile $A_{ij}B_{kj}$ sau $A_{ij}B_{jk}$ ne dau elementele de matrice ale matricelor *produs* AB^T si respectiv AB. Un rol aparte il va juca matricea *identitate*, $Id = \mathrm{diag}(1,1,1)$, ale carei elemente de matrice sunt chiar δ_{ij}, deoarece pentru orice matrice A avem $Id\,A = A\,Id = A$ [4]. Daca matricea unui tensor A este inversabila, avand $\det A \neq 0$ astfel incat sa existe inversul A^{-1} satisfacand $AA^{-1} = A^{-1}A = Id$, atunci spunem ca tensorul A este nesingular. O marime importanta in teoria matricelar este *urma* unei matrice care poate fi privita ca un tensor contractat, $Tr(A) = A_{ii} = \delta_{ij}A_{ij}$. Sa notam ca pentru matricele finit-dimensionale sunt adevarate urmatoarele proprietati $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$, $Tr(\alpha A) = \alpha Tr(A)$ si $Tr(AB) = A_{ij}B_{ji} = Tr(BA)$. $\Box$

O notiune importanta, cu aplicatii foarte diverse, este cea de *vector propriu* al unei matrice sau tensor de rangul doi.

Definiţia 1.5 *Se numeste vector propriu netrivial al tensorului/matricii A, vectorul $\vec{v} \neq \vec{0}$ care satisface ecuatia de* valori proprii

$$A_{ij}v_j = \lambda\, v_i\,, \tag{1.38}$$

in care λ este valoarea proprie *a vectorului $\vec{v}$. Toti vectorii proprii corespunzatori aceleiasi valori proprii λ formeaza* subspatiul propriu E^{λ}.

Ecuatia de valori proprii reprezinta un sistem omogen de forma $(A_{ij} - \lambda\delta_{ij})v_j = 0$ in care λ joaca rolul de parametru. Se stie ca un sistem omogen admite intotdeauna solutia triviala $\vec{v} = \vec{0}$, care nu poate defini un subspatiu propriu netrivial. Sistemul admite solutii *netriviale* numai daca determinantul sau se anuleaza. De aici rezulta ca λ trebuie sa fie o solutie a euatiei

$$\det|A_{ij} - \lambda\delta_{ij}| = 0 \tag{1.39}$$

denumita si *ecuatie seculara* sau *caracteristica*. Ea este o ecuatie de gradul trei care poate avea trei radacini reale sau o radacina reala si doua complex conjugate intre ele.

Valorile proprii complexe presupun si vectori proprii complecsi ceea ce depaseste cadrul spatiului E_3. De aceea vom examina numai cazul in care ecuatia seculara admite radacini reale.

[4] O alta notatie pentru matricea identitate 3×3 este $1_{3\times 3}$. Dar in foarte multe cazuri ea este notata simplu cu 1 sau subanteleasa in mod implicit.

Teoremă 1.1 *O matrice simetrica admite numai valori proprii reale. Vectorii proprii corespunzatori la doua valori proprii diferite sunt ortogonali.*

Demonstraţie: Fie o matrice simetrica cu elemente de matrice $A_{ij} = A_{ji}$ si λ o valoare proprie, reala sau complexa, corespunzatoare vectorului propriu netrivial $\vec{v} \neq \vec{0}$ ale carui componente v_i pot fi si ele complexe. Atunci, pornind cu ecuatia (1.38) si cu complexa ei conjugata [5], $A_{ij}v_j^* = \lambda^* v_i^*$, contractam pe prima cu v_i^* si pe a doua cu v_i si apoi le scadem. Deoarece membrii stangi sunt aceiasi in virtutea simetriei matricii A, rezulta ca $\lambda - \lambda^* = 0$ daca $v_i v_i^* \neq 0$, si deci $\lambda \in \mathbb{R}$. Sa trecem acum la cazul a doi vectori proprii, $\vec{v}$ si $\vec{v}\,'$, corespunzatori valorilor proprii λ si λ'. Pornind de la ecuatiile de valori proprii si procedand ca mai sus se obtine $(\lambda - \lambda')\, \vec{v} \cdot \vec{v}\,' = 0$ de unde rezulta ca daca $\lambda' \neq \lambda$ atunci cei doi vectori sunt ortogonali. ■

Problemele de valori proprii ne pot aduce informatii importante despre proprietatile tensorului implicat, care nu sunt evidente intr-o baza oarecare in care componentele tensorului pot avea o forma complicata. De aceea este util sa discutam succint tipurile de solutii ale ecuatiei seculare (1.39) ale unui tensor simetric oarecare A.

Cazul general este acela in care ecuatia are trei radacini reale diferite intre ele, $\lambda_{(1)}$, $\lambda_{(2)}$ si $\lambda_{(3)}$. Deoarece fiecare valoare proprie corespunde cate unui subspatiu propriu iar acestea trebuie sa fie ortogonale intre ele, rezulta ca subspatiile proprii sunt unidimensionale, fiecare dintre ele fiind determinat de cate un versor propriu, $\vec{v}^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$. Aceste subspstii proprii, $E_1^{\lambda_{(i)}}(\vec{v}^{(i)})$, se numesc *directii principale* ale tensorului A iar $\vec{v}^{(i)}$ sunt versorii directiilor principale. Ei formeaza o baza ortonormata *atasata* tensorului A in sensul ca sunt un sistem de versori proprii ai matricii A si satisfac relatiile obisnuite de ortonormare,

$$A_{ij} v_j^{(k)} = \lambda_{(k)} v_i^{(k)}\,, \quad \vec{v}^{(k)} \cdot \vec{v}^{(l)} = \delta_{kl}\,. \tag{1.40}$$

Pornind de la faptul ca versorii bazei trebuie sa aiba intotdeauna componentele (1.10), este usor de aratat ca in baza sa de versori proprii matricea tensorului A capata forma diagonala $A = \mathrm{diag}(\lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}, \lambda_{(3)})$. De aceea intreaga procedura de determinare a valorilor si vectorilor proprii se mai numeste si *diagonalizare*.

Exista cazuri in care nu toate valorile proprii sunt diferite intre ele. Atfel, daca doua valori proprii coincid, $\lambda_{(1)} = \lambda_{(2)} = \lambda \neq \lambda_{(3)}$, atunci se obtine un subspatiu propriu unidimensional $E_1^{\lambda_{(3)}}(\vec{v}^{(3)})$ ortogonal pe un subspatiu propriu bidimensional, $E_2^{\lambda}(\vec{v}^{(1)}, \vec{v}^{(2)})$, in care alegerea bazei bidimensionale $\{\vec{v}^{(1)}, \vec{v}^{(2)}\}$ este *arbitrara*. Oricum vom alege acesti doi versori proprii (ortogonali intre ei si ortogonali pe $\vec{v}^{(3)}$) matricea tensorului A in baza $\{\vec{v}^{(i)}\}$ va fi $A = \mathrm{diag}(\lambda, \lambda, \lambda_{(3)})$. De aceea se spune ca problema are *simetrie cilindrica* in care axa 3 care joaca rolul *axei de simetrie*.

In sfarsit, daca $\lambda_{(1)} = \lambda_{(2)} = \lambda_{(3)} = \lambda$ atunci tensorul A are componentele $A_{ij} = \lambda \delta_{ij}$ in *orice baza* din E_3, problema avand simetrie *sferica* sau *centrala*.

[5] In calculul cu numerele complexe $z = \Re z + i\Im z \in \mathbb{C}$ folosom notatia obisnuita pentru conjugarea complexa, $z^* = \Re z - i\Im z$.

1.4 Transformari ortogonale

1.4.1 Grupul transformarilor ortogonale

Pana acum am avut grija sa definim toate marimile susceptibile sa joace un rol in descrierea matematica a proceselor fizice utilizand aceeasi baza. In aceasta descriere fiecare obiect matematic este reprezentat prin componente care depind de alegerea bazei. Pe de alta parte, deoarece fixarea bazei este arbitrara, ea poate fi schimbata oricand in alta baza. De aceea este important sa stim cum se modifica componentele vectorilor si tensorilor la o schimbare de baza pe care, in general, o vom numi *transformare*. Desigur, vom discuta numai transformarile dintre sistemele de versori ortogonali, numite transformari *otogonale*.

Sa consideram o baza $\{\vec{e}_i\}$ in care se cunosc toate componentele vectorilor si tensorilor si sa trecem la o noua baza $\{\vec{e}_i{}'\}$ de versori ortogonali care indeplinesc conditiile de ortonormare (1.21). Relatia dintre versorii celor doua baze care defineste transformarea este

$$\vec{e}_i \to \vec{e}_i{}' = Q_{ij}\vec{e}_j \tag{1.41}$$

unde Q_{ij} sunt elementele de matrice ale matricii Q a transformarii ortogonale. Din relatiile (1.21) rezulta ca ele sunt chiar cosinusii directori ai versorilor noii baze in raport cu vechea baza,

$$Q_{ij} = \vec{e}_i{}' \cdot \vec{e}_j = \cos\theta(\vec{e}_i{}', \vec{e}_j) \tag{1.42}$$

care satisfac relatia de *ortogonalitate*

$$Q_{ik}Q_{jk} = \delta_{ij} \tag{1.43}$$

ceea ce in limbaj de matrice revine la a scrie $QQ^T = Id$ sau $Q^T = Q^{-1}$, unde reamintim ca Id este matricea identitate. Prima consecinta este ca $\det Q = \pm 1$. Daca valoarea determinantului este -1 atunci spunem ca transformarea este improprie deoarece schimba chiralitatea transformand o baza dreapta intr-una stanga si invers. Transformarile *proprii* sau *speciale* cu determinant 1 nu schimba chiralitatea bazei.

Sunt situatii cand este necesar sa operam doua sau mai multe transformari succesive asupra aceleiasi baze. Apare astfel notiunea de *compunere* a doua transformari ortogonale prin care se intelege ca daca se fac succesiv doua transformari ortogonale, efectul este acelasi cu al unei singure transformari ortogonale care reprezinta rezultatul compunerii celor doua transformari.

Propoziţia 1.1 *Prin compunerea a doua transformari ortogonale se obtine o transformare ortogonala a carei matrice este produsul matricelor celor doua transformari in ordine inversa. Multimea matricelor ortogonale inzestrata cu operatia de compunere formeaza un grup necomutativ.*

Demonstraţie: Sa facem, pe rand, transformarile (1.41) si apoi $\vec{e}_i{}' \to \vec{e}_i{}'' = Q'_{ij}\vec{e}_j{}'$. Atunci prin inlocuire se obtine

$$\vec{e}_i{}'' = Q'_{ij}\vec{e}_j{}' = Q'_{ij}Q_{jk}\vec{e}_k\,, = Q''{}_{ik}\vec{e}_k\,, \tag{1.44}$$

de unde se vede ca matricea transformarii rezultante este $Q'' = Q'Q$. Deoarece inmultirea matricelor este asociativa, Id este elementul unitate la inmultire si toate matricele ortogonale

sunt inversabile, rezulta ca matricele ortogonale formeaza un grup in raport cu operatia de inmultire. Cum, in general, $QQ' \neq Q'Q$, grupul este necomutativ. ■
Stiind ca determinantul matricei Q'' este $\det Q'' = \det Q \det Q'$, observam ca daca compunem doua transformari de acelasi fel, proprii sau improprii, obtinem o transformare proprie, dar daca compunem o transformare proprie cu una improprie rezultatul va fi o transformare improprie. Aceasta inseamna ca submultimea transformarilor improprii formeaza un subgrup pe cand multimea celor improprii nu. Grupul tuturor transformarilor ortogonale ale bazelor tridimensionale se noteaza cu $O(3)$ iar subgrupul transformarilor ortogonale proprii se noteaza cu $SO(3)$. [6]

1.4.2 Transformarea componentelor

Transformarea bazelor ortogonale atrage dupa sine schimbarea tuturor componentelor vectorilor si tensorilor. Regulile de transformare se obtin direct din definitia componentelor obiectului respectiv. Sa incepem cu vectorii, alegand un vector $\vec{x}$ cu componente (x_i) in baza $\{\vec{e}_i\}$ si componente (x'_i) in baza $\{\vec{e}_i{}'\}$. Daca trecem de la o baza la alta prin transformarea (1.41), vectorul $\vec{x} = x_i \vec{e}_i = x'_i \vec{e}_i{}'$ nu se schimba si, in virtutea relatiei de ortogonalitate (1.43), gasim regula de transformare a componentelor vectorilor,

$$x'_i = Q_{ij} x_j \, . \tag{1.45}$$

In cazul general al unui tensor de rangul n, din definitia componentelor cu ajutorul formei multiliniare (1.28) deducem ca in noua baza componentele sunt

$$\begin{aligned} A'_{i_1 i_2 \ldots i_n} = A(\vec{e}_{i_1}{}', \vec{e}_{i_1}{}', ..., \vec{e}_{i_n}{}') &= Q_{i_1 j_1} Q_{i_2 j_2} ... Q_{i_n j_n} A(\vec{e}_{i_1}, \vec{e}_{i_1}, ..., \vec{e}_{i_n}) \\ &= Q_{i_1 j_1} Q_{i_2 j_2} ... Q_{i_n j_n} A_{j_1 j_2 \ldots j_n} \, . \end{aligned} \tag{1.46}$$

Concluzia este ca transformarea componentelor tensorilor de orice rang se face in fiecare indice la fel ca transformarea componentelor vectorilor. Daca transformarile $Q \in O(3)$ nu modifica componentele tensorului, adica daca $A'_{i_1 i_2 \ldots i_n} = A_{j_1 j_2 \ldots j_n}$, se spune ca tensorul este *invariant*. Din relatia de ortogonalitate (1.43) privita ca regula de transformare a tensorului Kronecker rezulta ca δ_{ij} sunt componentele unui tensor invariant. De altfel, se poate arata ca acesta este singurul tensor invariant de rangul doi.

Un caz aparte il constituie simbolul Levi-Civita care se abate de la regula generala stabilita mai sus. Un calcul elementar ne arata ca pentru orice $Q \in O(3)$ este adevarata identitatea

$$\varepsilon_{ijk} = (\det Q) Q_{il} Q_{jm} Q_{kn} \varepsilon_{lmn} \tag{1.47}$$

care este chiar regula de transformare a componentelor acestui obiect la transformari ortogonale. Aceasta inseamna ca trebuie sa facem distinctia dintre tensorii adevarati ale caror componente se transforma conform Ec.(1.46) si obiectele ale caror componente se mai multiplica, in timpul transformarii, cu $\det Q$. Pe acestea le vom numi *pseudo-tensori*. Vom spune ca simbolul Levi-Civita este un pseudo-tensor, subliniind ca el este in plus si *invariant* deoarece componentele sale raman neschimbate la o transformare ortogonala. Intr-un anumit sens

[6] Notatia se bazeaza pe urmatoarele conventii: $O =$ *ortogonal* si $S =$ *special* (adica cu determinant 1).

acest pseudo-tensor este fundamental, fiind implicat in constructia prin diverse contractii a altor pseudo-tensori de orice rang. Acum intelegem de ce, prin relatiile (1.34), dintr-un tensor antisimetric se obtine un pseudo-vector (sau vector axial) si nu un vector obisnuit. In general, daca $A_{ijkl...}$ sunt componentele unui tensor oarecare de rangul n atunci componentele $\hat{B}_{mkl...} = \varepsilon_{mij} A_{ijkl...}$ definesc un pseudo-tensor de rangul $n-1$.

Toate proprietatile discutate mai sus conduc la ideea ca este mai simplu sa se defineasca tensorii si pseudo-tensorii direct prin regulile lor de transformare la o schimbare de baza. De aceea, in locul constructiei bazate pe forme multiliniare, se prefera urmatoarea definitie:

Definiţia 1.6 *Se numeste tensor de rangul n un obiect A reprezentat in anumita baza de un ansamblu de componente cu n indici care la o schimbare de baza* (1.41) *se transforma astfel*

$$A'_{i_1 i_2 ... i_n} = Q_{i_1 j_1} Q_{i_2 j_2} ... Q_{i_n j_n} A_{j_1 j_2 ... j_n} \,. \tag{1.48}$$

Un obiect $\hat{A}$ reprezentat tot de componente cu n indici dar a caror lege de transformare este

$$\hat{A}'_{i_1 i_2 ... i_n} = (\det Q) Q_{i_1 j_1} Q_{i_2 j_2} ... Q_{i_n j_n} \hat{A}_{j_1 j_2 ... j_n} \tag{1.49}$$

se numeste pseudo-tensor de rangul n.

Este evident ca tensorii si pseudotensorii se comporta la fel la transformarile proprii cu $\det Q = 1$. Diferenta apare doar in cazul cand schimbam chiralitatea bazei printr-o transformare improprie cu $\det Q = -1$. De aceea este important sa intelegem semnificatia celor doua tipuri de transformari.

1.4.3 Rotatii si oglindiri

Asa cum am spus transformarile proprii formeaza subgrupul $SO(3) \subset O(3)$. Acestea sunt transformarile obisnuite dintre bazele ortonormate care nu schimba chiralitatea. Din punct de vedere geometric ele au semnificatia unor *rotatii* ale bazelor in raport cu axe de rotatie alese in mod arbitrar. De aceea ele se noteaza cu R. Cele 9 elemente de matrice ale fiecarei rotatii satisfac relatiile de ortogonalitate (1.43) care reprezinta 6 ecuatii. Asadar rotatiile vor depinde de trei parametrii reali, independenti intre ei. Acestia pot fi alesi in moduri foarte diferite, in functie de specificul problemei in care intervin rotatiile.

Parametrizarea rotatiilor

Exista o parametrizare naturala a rotatiilor care permite o interpretare geometrica simpla. Aceasta implica alegerea unei axe de rotatie de versor $\vec{u}$ (ale carui componente satisfac $\vec{u}^2 = u_i u_i = 1$) in jurul careia versorii bazei se rotesc cu unghiul θ (masurat in sens trigonometric) pentru a da versorii bazei transformate, $\vec{e}_i' = R_{ij} \vec{e}_j$. In aceasta parametrizare matricea unei rotatii $R(\vec{u}, \theta)$ are elementele de matrice

$$R_{ij}(\vec{u}, \theta) = \delta_{ij} \cos\theta + u_i u_j (1 - \cos\theta) + \varepsilon_{ijk} u_k \sin\theta \,. \tag{1.50}$$

Compunerea a doua rotatii in jurul aceleiasi axe dar de unghiuri diferite ne conduce la o noua rotatie in jurul axei date,

$$R(\vec{u}, \theta) R(\vec{u}, \theta') = R(\vec{u}, \theta + \theta') \,. \tag{1.51}$$

De aici se obtine ca $R(\vec{u},0) = Id$ (adica $R_{ij}(\vec{u},0) = \delta_{ij}$) pentru orice $\vec{u}$. In plus, din forma concreta a matricii (1.50) rezulta

$$[R(\vec{u},\theta)]^{-1} = R(\vec{u},-\theta) = [R(\vec{u},\theta)]^T \tag{1.52}$$

ceea ce inseamna ca aceasta matrice este *ortogonala*. In sfarsit, calculand valoarea determinantului, $\det R(\vec{u},\theta) = 1$, ajungem la concluzia ca $R(\vec{u},\theta) \in SO(3)$. Ramane sa analizam care sunt valorile parametrilor pentru care se obtin toate rotatiile din $SO(3)$. Pentru aceasta vom porni de la observatia ca $R(-\vec{u},\theta) = R(\vec{u},-\theta)$ de unde conchidem ca este suficient sa luam toti versorii $\vec{u}$, corespunzatori tuturor directiilor orientate (adica toti versorii avand varfurile pe aceeasi sfera), si $\theta \in [0,\pi]$ pentru a parametriza toate transformarile din $SO(3)$ [7].

Sa ne oprim acum asupra semnificatiei geometrice a acestei parametrizari. Mai intai, observam ca versorul $\vec{u}$ nu se transforma la o rotatie deoarece el satisface $R_{ij}(\vec{u},\theta)u_j = u_i$ sau, altfel spus, reprezinta versorul propriu al matricii rotatiei care defineste axa de rotatie, in conditiile in care alti versori proprii corespunzatori unor valori proprii reale nu mai exista. Planul perpendicular pe $\vec{u}$ se numeste planul rotatiei. Unghiul de rotatie este legat de principalul invariant al matricii,

$$Tr[R(\vec{u},\theta)] = R_{ii}(\vec{u},\theta) = 1 + 2\cos\theta\,. \tag{1.53}$$

Exemplu: **Rotatii in jurul axei 3.** Matricea unei astfel de rotatii este

$$R(\vec{e}_3,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,. \tag{1.54}$$

Conform regulii de transformare (1.41), aceasta produce rotatia versorilor din planul de rotatie astfel

$$\begin{aligned} \vec{e}_1{}' &= \cos\theta\,\vec{e}_1 + \sin\theta\,\vec{e}_2\,, \\ \vec{e}_2{}' &= -\sin\theta\,\vec{e}_1 + \cos\theta\,\vec{e}_2\,, \\ \vec{e}_3{}' &= \vec{e}_3\,. \end{aligned} \tag{1.55}$$

Datorita alegerii particulare a axei de rotatie regasim cu usurinta toate proprietatile discutate mai sus, inclusiv relatia (1.53) care nu depinde de alegerea axei de rotatie. Forma simpla a acestei matrice ne permite sa studiem problema sa de valori proprii, $R_{ij}(\vec{e}_3,\theta)u_j = \lambda u_i$, care determina versorii proprii corespunzatori valorilor proprii λ ce se obtin ca solutii ale ecuatiei seculare corespunzatoare. Scriind conditia (1.39) in cazul nostru,

$$\begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0\,, \tag{1.56}$$

se obtine ecuatia seculara $(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1) = 0$ care are o singura solutie reala, $\lambda_0 = 1$, si doua solutii complex conjugate, $\lambda_\pm = \exp(\pm i\theta)$. Evident, solutia reala corespunde versorului propriu $\vec{u} = \vec{e}_3$ care da axa de rotatie. □

[7] O parametrizare echivalenta se poate face cu ajutorul parametrilor Caley-Klein, $\xi_i = \theta u_i$ $(i = 1,2,3)$.

Desigur, parametrizarea discutata nu este singura posibila. Alte parametrizari utile se pot introduce utilizand compuneri de rotatii diferite in jurul axelor definite de versorii bazelor. Aceste parametrizari au avantajul ca ne dau matrice care se pot scrie usor ca produse de matrice cu forme relatv simple, similare cu (1.54). Cea mai cunoscuta parametrizare de acest fel este datorata lui Euler. Ea se face compunand trei rotatii succesive: mai intai o rotatie in jurul axei 3 de unghi ψ, dupa care urmeaza o rotatie in jurul noii axe 1 de unghi θ pentru ca, in final, baza rezultata in urma primelor doua rotatii sa fie rotita, la randul ei, din nou in jurul axei 3 dar cu unghiul φ. Astfel se obtine parametrizarea rotatiilor cu ajutorul *unghiurilor Euler* $(\varphi,\,\theta,\,\psi)$ sub forma

$$R(\varphi,\theta,\psi)=R(\vec{e}_3,\varphi)R(\vec{e}_1,\theta)R(\vec{e}_3,\psi)\,. \tag{1.57}$$

Din aceasta expresie deducem ca $R(0,0,0)=Id$ si

$$R(\varphi,\theta,\psi)^{-1}=R(\varphi,\theta,\psi)^T=R(-\psi,-\theta,-\varphi) \tag{1.58}$$

asa cum rezulta din relatiile (1.52). Sa mai notam ca in expresia (1.57) ordinea de inmultire nu poate fi schimbata deoarece rotatiile in jurul axei 1 nu comuta cu rotatiile in jurul axei 3.

Exemplu: **Matricea rotatiilor in parametrizarea Euler** se calculeaza inlocuind in expresia (1.57) forma concreta a matricelor implicate,

$$\begin{aligned}
&R(\varphi,\theta,\psi)= \qquad\qquad (1.59)\\
&=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\cos\varphi\cos\psi-\cos\theta\sin\varphi\sin\psi & \cos\varphi\sin\psi+\cos\theta\sin\varphi\cos\psi & \sin\theta\sin\varphi\\ -\sin\varphi\cos\psi-\cos\theta\cos\varphi\sin\psi & -\sin\varphi\sin\psi+\cos\theta\cos\varphi\cos\psi & \sin\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\sin\psi & -\sin\theta\cos\psi & \cos\theta\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

□

Paritate si oglindiri

Transformarile improprii au o importanta secundara deoarece nu sunt folosite in mod curent pentru a trece de la o baza la alta deoarece schimba chiralitatea bazei. Cu toate acestea ele ne permit sa distingem intre tensori si pseudo-tensori, ceea ce poate fi esential in anumite probleme fizice particulare [8]. Dar pentru aceasta sunt suficiente doar cateva transformari improprii semnificative cum ar fi *paritatea* si *oglindirile*. De altfel, se poate arata ca toate transformarile improprii sunt rotatii insotite de o transformare de paritate.

Definiţia 1.7 *transformarea care inverseaza toti versorii bazei, $P=-Id\in O(3)$, se numeste paritate.*

Din aceasta definitie rezulta ca $P^2=Id$ si ca paritatea comuta cu orice rotatie ceea ce face ca o transformare improprie oarecare sa se scrie ca $Q=PR=RP$, unde $R\in SO(3)$.

[8] Cum ar fi, de exemplu, neconservarea paritatii in dezintegrarea β.

Pentru a vedea daca o marime este tensor sau pseudo-tensor este suficient sa vedem cum se transforma la paritate.

In anumite situatii este interesanta si comportarea la oglindirile fata de un plan, prin care se inverseaza numai versorul directiei normale pe planul respectiv, notat cu $\vec{u}$.

Definiţia 1.8 *Transformarea improprie $PR(\vec{u}, \pi)$ se numeste oglindire fata de planul perpendicular pe $\vec{u}$.*

Exemplu: **Oglindirea fata de planul** $E_2(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ este $PR(\vec{e}_3, \pi) = \mathrm{diag}(1, 1, -1)$ asa cum rezulta din Ec.(1.54). Ea are ca efect inversarea sensului lui $\vec{e}_3$ in timp ce primii doi versori ai bazei raman neschimbati. □

Capitolul 2

Principiile mecanicii Galilei-Newton

Mecanica studiaza numai miscari simple prin care se modifica doar parametrii cinematici ai particulelor sau corpurilor dintr-un anumit sistem, fara a afecta natura substantei acestora. De aceea o serie de cauze dinamice mai profunde raman exterioare mecanicii urmand sa devina obiect de studiu in alte domenii ale fizicii, aparute mai tarziu, dar nu independent ci pe bazandu-se pe rezultatele incontestabile obtinute in mecanica.

Mecanica a fost initiata de Galilei, care a conceput cinematica in spirit relativist, si dezvoltata apoi de catre Newton care si-a construit dinamica pornind de la o conceptie nerelativista, bazata pe existenta unui sistem de referinta absolut. Cu toate acestea, intre cele doua moduri de abordare nu exista o incompatibilitate principiala deoarece atat legea fundamentala a dinamicii cat si legea atractiei universale, descoperite de Newton, se supun principiilor relativitatii galileiene. Aceasta ne va permite sa expunem, in continuare, o versiune coerenta a mecanicii Galilei-Newton care plaseaza dinamica newtoniana in contextul relativitatii galileiene, exploatand avantajele conceptiei relativiste.

2.1 Relativitatea galileiana

2.1.1 Spatiul si timpul, sisteme de referinta

Notiunile de spatiu si timp sunt concepte primare care nu pot fi definite dar pot fi intelese suficient de bine pentru ca desfasurarea evenimentelor in spatiu si timp sa poata fi tratata intr-un context teoretic coerent si precis. Ideea fundamentala de la care se porneste este ca sistemul nostru de concepte si ipoteze trebuie sa ne asigure relevanta, obiectivitatea si, mai ales, universalitatea adevarului obtinut din experiment. Aceasta inseamna ca acelasi experiment fizic repetat in locuri si la momente diferite, dar in acelasi context fizic, trebuie sa conduca la aceleasi rezultate. Pentru a satisface acest deziderat este necesar sa se formuleze reguli precise privind modul in care este conceputa masurarea marimilor fizice, incepand chiar cu spatiul si timpul care reprezinta "cadrul" in care acestea evolueaza.

Se admite ca spatiul fizic este cel ocupat de toate corpurile existente in univers. Distantele si pozitiile relative ale corpurilor pot fi comparate intre ele folosind *etaloane* pentru distante si unghiuri. Distantele poarta dimensiunea fizica de lungime, L, iar unghiurile se masoara in radiani. Radianul este considerat ca o unitate de masura pur geometrica fara, dimensiuni fizice. Se pune, in mod firesc, intrebarea daca etaloanele isi modifica sau nu marimea in functie de locul, directia sau de momentul in care se fac masuratorile. Daca marimea lor ar depinde de locul si momentul masuratorii atunci pozitiile relative ale corpurilor ar fi aproape imposibil de caracterizat in mod obiectiv si nu am avea niciodata certitudinea ca putem face un experiment relevant. De aceea se adopta o atitudine pozitiva care pleaca de la ipoteza ca spatiul este omogen si izotrop ceea ce inseamna ca rezultatele obtinute din masurarea lungimilor si unghiurilor in locuri diferite sau in directii diferite au aceeasi semnificatie si pot fi comparate intre ele. Se ajunge astfel la urmatoarea formulare:

Ipoteza 1: *Spatiul fizic este omogen si izotrop avand structura spatiului* $E_3[L]$.

Conform acestei ipoteze, intre punctele spatului fizic si vectorii din $E_3[L]$, numiti *vectori de pozitie*, se poate stabili o corespondenta *biunivoca*. Aceasta se poate realiza in mai multe moduri, in functie de alegerea punctului O, numit *origine*, care trebuie asociat vectorului $\vec{0} \in E_3[L]$. Ceilalti vectori de pozitie dau pozitiile relative ale punctelor din spatiu fata de origine. Astfel, un vector de pozitie oarecare $\vec{x} \in E_3[L]$ va determina pozitia punctului $P(O, \vec{x})$ aflat la distanta $|\vec{x}|$ de punctul O pe directia lui $\vec{x}$. Daca se considera doua puncte distincte $P(O, \vec{x})$ si $P'(O, \vec{x}\,')$ atunci vectorul $\vec{x}\,' - \vec{x}$ este vectorul de pozitie *relativ* al punctului P' fata de P. Vectorii de pozitie reprezinta o categorie de vectori aparte deoarece, spre deosebire de vectorii liberi, ei au puncte de aplicatie fixe, bine determinate din punct de vedere geometric.

Timpul este, de asemenea, o marime fizica fundamentala avand dimensiunea fizica T. El se masoara cu un *ceas etalon* care se bazeaza pe un proces fizic periodic cu o perioada considerata invariabila reprezentand *etalonul* pentru intervalele de timp. Prin compararea unui anumit interval de timp cu intervalul etalon se obtine un numar real despre care presupunem ca reprezinta in mod obiectiv o durata care care nu depinde de locul unde se face masuratoarea sau daca ea este facuta acum sau in viitor. In plus, vom presupune ca fenomene care se petrec in locuri diferite pot fi masurate simultan indiferent de pozitia sau de starea lor de miscare relativa unul fata de celalalt. Aceasta inseamna ca ipoteza 1 trebuie completata cu:

Ipoteza 2: *Timpul este absolut si universal. El are o scurgere omogena de la trecut spre viitor intr-un domeniu din* $[T]$.

Timpul masurat, t, este o marime fizica scalara din spatiul liniar unidimensional $[T]$, numit *scala* timpului. Pe aceasta scala se fixeaza o origine (adica momentul $t = 0$) care se alege in mod arbitrar deoarece ea nu are semnificatie fizica atata vreme cat acceptam ca scurgerea timpului este omogena. Ceea ce intereseaza in experiment sunt numai intervalele de timp, $t - t_0$, reprezentand timpul scurs pana in momentul t incepand dintr-un moment t_0, numit *moment initial*, in care se presupune ca incepe miscarea sau procesul studiat.

Ipotezele despre spatiu si timp, enuntate aici, stau la baza intregii fizici clasice nerelativiste (sau relativiste in sens Galilei [1])

[1] In teoria relativitatii restransa a lui Einstein prima ipoteza se pastreaza dar in relatvitatea generala se renunta la ambele ipoteze.

Observatia sau experimentul fizic presupune existenta unui *observator* care trebuie sa localizeze corpurile si sa descrie miscarea lor in timp. Pentru ca aceasta descriere geometrica sa fie adecvata definirii marimilor fizice, care pot fi obiecte matematice dintre cele mai diverse, este necesar sa se utilizeze *aceeasi* baza de versori ortogonali pentru toate spatiile de vectori sau de tensori cu care se opereaza. Aceasta impune ca observatorul sa aleaga un *sistem de referinta* in rapotrt cu care sa se faca masuratorile.

Definiţia 2.1 *Sistemul de referinta se defineste prin:*

1. alegerea unui reper ortogonal *format prin asocierea dintre o baza ortonormata,* $\{\vec{e}_i\} \subset E_3[L]$*, si un punct* O*, desemnat ca origine a reperului,*

2. fixarea unei origini pe scala timpului, si

3. stabilirea etalonului pentru lungimi si a intervalului de timp etalon.

In general, reperele nu trebuie sa fie neaparat ortogonale. In spatiul tridimensional se pot defini repere oarecare cu ajutorul oricarui triplet de vectori necoplanari asociati unei origini. Dar, in continuare, vom folosi numai repere ortogonale pe care le vom numi simplu repere, omitand specificarea de ortogonal. Acestea vor fi notate cu $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ sau compact prin $\{O; \vec{e}_i\}$, in timp ce sistemele de referinta se vor nota fie indicand toate elementele lor, $S(O; \vec{e}_i; t)$, sau doar cu S. Sistemele de referinta tridimensionale se vor imparti in drepte sau stangi dupa cum sunt bazele reperelor lor, drepte (dextrogire) sau stangi (levogire). In practica se folosesc numai repere si sisteme de referinta drepte. Se subantelege ca etalonul de lungime si intervalul de timp etalon sunt *comune* pentru toate sistemele de referinta.

Aceleasi notatii le vom folosi si pentru reperele pe dirctii orientate sau in plan. De exemplu, intr-un plan $E_2(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$, determinat de versorii ortogonali $\vec{u}_1$ si $\vec{u}_2$ si care trece prin punctul C, vom putea folosi reperul (ortogonal) $\{C; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ care permite localizarea oricarui punct din plan fata de C cu ajutorul vectorului de pozitie $\vec{r} = r_1\vec{u}_1 + r_2\vec{u}_2$.

In cele ce urmeaza vom adopta punctul de vedre relativist, datorat lui Galilei, care se dovedeste mai apropiat de realitate decat ipoteza propusa de Newton, a existentei unui sistem de referinta absolut. Conform conceptiei relativitate atat miscarea cat repausul sunt *relative* in sensul ca pot fi studiate din diverse sisteme de referinta considerate echivalente, a caror alegere nu impieteaza asupra obiectivitatii interpretarii fizice. Desigur, pentru aceasta este necesar sa se precizeze care este sistemul de referinta ales in anumita situatie concreta. Cateva alegeri posibile sunt inportante prin relevanta lor fizica. Astfel, un sistem de referinta al carui reper este *in repaus* fata de un observator se numeste sistem *propriu* al observatorului. Exista, de asemenea, cazuri cand este convenabil sa se considere repere aflate in repaus fata de anumite corpuri sau sisteme de corpuri care vor fi numite repere *atasate* sau tot repere proprii. Aceste repere pot fi utilizate ca entitati independente daca se foloseste *aceeasi* scala de timp deoarece fiecare reper, in parte, impreuna cu scala de timp data defineste complet cate un sistem de referinta. Precizam ca reperele se pot misca unele fata de altele dar raman *perfect rigide* in sensul ca unghiurile dintre versorii bazelor nu se pot modifica, acestia ramanand intotdeauna ortogonali doi cate doi.

2.1.2 Coordonate si transformari de coordonate

Introducerea sistemelor de referinta permite caracterizarea pozitiei oricarui punct cu ajutorul *coordonatelor.*

Definiţia 2.2 *Fiind dat un reper* $\{O; \vec{e}_i\}$ *si un vector de pozitie* $\vec{x} = x_i \vec{e}_i$*, componentele* (x_i) *se numesc* coordonatele carteziene *ale punctului* $P(O, \vec{x})$.

Astfel fiecarui reper $\{O; \vec{e}_i\}$ i se poate atasa in mod univoc un *sistem de coordonate* carteziene cu originea in O, notat cu $Ox_1x_2x_3$ [2]. Sistemul de coordonate carteziene este echivalent cu reperul, pozitia unui punct oarecare, $P(O, \vec{x}) \equiv P(O, x_1, x_2, x_3)$, fiind complet determinata de cele trei coordonate ale sale, x_1, x_2 si x_3. Este evident ca daca fiecare dintre coordonate are ca domeniu intreaga axa reala atunci ele acopera intreg spatiul fizic tridimensional. Daca se folosesc repere pe dreapta sau in plan acestea vor defini sisteme de coordonate carteziene corespunzatoare cu una sau doua coordonate. De exemplu, componentele vectorului de pozitie $\vec{r} = r_1\vec{u}_1 + r_2\vec{u}_2$ fata de reperul $\{C; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ al unui plan care trece prin C vor fi coordonatele carteziene ale sistemului Cr_1r_2 din acel plan.

Pornind de la coordonatele carteziene se pot introduce si alte tipuri de coordonate cu ajutorul unor *transformari generale* de coordonate. Fara a intra in detalii de ordin matematic, precizam ca orice sistem de trei variabile reale independente, ξ, η, ζ, poate fi un sistem de coordonate daca se defineste o transformare de coordonate de forma

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(\xi, \eta, \zeta) \\ x_2 &= f_2(\xi, \eta, \zeta) \\ x_3 &= f_3(\xi, \eta, \zeta) \end{aligned} \tag{2.1}$$

in care functiile f_i trebuie sa aiba proprietati convenabile (reprezinta o bijectie, sunt derivabile, etc.). Noul sistem de coordonate se noteaza cu $O'\xi\eta\zeta$ unde O' este originea sa definita ca punctul corespunzator coordonatelor $\xi = \eta = \zeta = 0$, ale carui coordonate carteziene sunt $x_{i\,O'} = f_i(0,0,0)$, $(i = 1,2,3)$. Pozitia unui punct oarecare P este determinata acum in raport cu punctul O' prin noile coordonate, $P = P(O', \xi, \eta, \zeta)$. De obicei, coordonatele generalizate se iau in asa fel incat $O' = O$. In plus, se cauta ca domeniul de variatie al noilor coordonate sa fie ales in asa fel incat fiecare dintre coordonatele carteziene sa parcurga intreaga axa reala, deoarece atunci si noul sistem de coordonate generalizate va acoperi in intregime tot spatiul fizic.

Odata cu introducerea coordonatelor generalizate se pot defini *repere locale* in fiecare punct din spatiu. Acestea sunt utile pentru descrierea animitor marimi vectoriale care pot avea componente foarte simple in astfel de repere. Sa consideram un sistem de coordonate generalizate avand aceeasi origine ($O' = O$) cu cele carteziene si sa definim reperul local dintr-un punct oarecare $P(O, \xi, \eta, \zeta)$ care are vectorul de pozitie $\vec{x} = \vec{e}_i x_i$ in reperul $\{O; \vec{e}_i\}$. Mai intai, exprimam acest vector de pozitie in functie de coordonatele generalizate ale punctului P folosind functiile (2.1) astfel $\vec{x}(\xi, \eta, \zeta) = \vec{e}_i f_i(\xi, \eta, \zeta)$. Apoi, observam ca vectorii tangenti la cele trei axe ale sistemul de coordonate $O\xi\eta\zeta$ in punctul P sunt

$$\begin{aligned} \vec{V}_\xi(\xi, \eta, \zeta) &= \partial_\xi \vec{x}(\xi, \eta, \zeta) = \vec{e}_i \partial_\xi f_i(\xi, \eta, \zeta)\,, \\ \vec{V}_\eta(\xi, \eta, \zeta) &= \partial_\eta \vec{x}(\xi, \eta, \zeta) = \vec{e}_i \partial_\eta f_i(\xi, \eta, \zeta)\,, \\ \vec{V}_\zeta(\xi, \eta, \zeta) &= \partial_\zeta \vec{x}(\xi, \eta, \zeta) = \vec{e}_i \partial_\xi f_i(\xi, \eta, \zeta)\,, \end{aligned} \tag{2.2}$$

[2] O alta notatie traditionala pentru coordonatele carteziene este $x_1 = x$, $x_2 = y$ si $x_3 = z$, sistemul de coordonate carteziene fiind desemnat prin $Oxyz$.

unde am notat cu ∂_ξ, ∂_η, si ∂_ζ derivatele partiale in raport cu coordonatele generalizate. Cei trei vectori tangenti depind de coordonatele punctului P, reprezentand deci *campuri de vectori* definiti in fiecare punct din spatiu.

Definiţia 2.3 *Reperul $\{P, \vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta\}$, a carui baza este formata din* versorii *vectorilor tangenti $\vec{V}_\xi$, $\vec{V}_\eta$ si respectiv $\vec{V}_\zeta$, se numaste reperul local atasat coordonatelor generalizate in punctul P.*

Versorii reperelor locale sunt campuri de vectori care, intr-un anumit punct, nu formeaza intotdeauna baze ortogonale, putand face intre ei unghiuri oarecare, cu singura restrictie ca ei nu pot fi niciodata coplanari daca sistemul de coordonate generalizate a fost definit in mod corect. Desigur, atunci cand cei trei versori sunt ortogonali intre ei vom spune ca reperul local este *ortogonal*.

Definiţia 2.4 *Un sistem de coordonate generalizate se numeste ortogonal daca toate reperele locale atasate lui sunt ortogonale.*

Orice camp vectorial $\vec{X}$ calculat in punctul P, poate fi scris utilizand componentele in raport cu reperul local din acel punct astfel

$$\vec{X} = X_\xi \vec{e}_\xi + X_\eta \vec{e}_\eta + X_\zeta \vec{e}_\zeta \tag{2.3}$$

unde $X_\xi = \vec{e}_\xi \cdot \vec{X}$, etc.. In practica, toate calculele se fac pornind cu expresiile versorilor reperului local si ale campurilor care ne intereseaza scrise in reperul cartezian originar, $\{O; \vec{e}_i\}$, si folosind explicit functiile (2.1) si derivatele lor partiale.

Coordonate cilindrice si polare

In problemele tridimensionale cu simetrie cilindrica este indicata folosirea unui sistem de coordonate adecvat in care ecuatiile suprafetelor cilindrice sa se scrie cat mai simplu.

Definiţia 2.5 *Sistemul de coordonate $O\rho\varphi z$ ale carui coordonate $\rho \in [0, \infty) \subset [L]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $z \in [L]$ sunt definite astfel*

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho \cos\varphi\,, \\ x_2 &= \rho \sin\varphi\,, \\ x_3 &= z\,, \end{aligned} \tag{2.4}$$

se numeste sistemul de coordonatele cilindrice atasate sistemului de coordonate carteziene $Ox_1x_2x_3$.

Sistemul de coordonate cilindrice are aceeasi origine O cu cel cartezian si domenii de variatie ale coordonatelor alese in asa fel incat sa acopere intregul spatiu fizic tridimensional. In acest sistem de coordonate ecuatiile cilindrilor avand axa 3 ca axa de simetrie se scriu simplu, $\rho =$const..

Definiţia 2.6 *In orice plan $z =$cost., coordonatele $r = \rho$ si φ reprezinta coordonate* polare *ale planului respectiv.*

Atunci cand se studiaza numai o miscare plana, pentru care coordonatele polare acopera cele doua grade de libertate, acestea se noteaza de obicei cu r si φ iar sistemul de coordonate polare cu $Or\varphi$. Notatia este sugestiva deoarece intr-un reper dat din plan, $\{O;\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$, vectorul de pozitie $\vec{r}=r_1\vec{u}_1+r_2\vec{u}_2$, care defineste coordonatele carteziene $r_1=r\cos\varphi$ si $r_2=r\sin\varphi$, are modulul $|\vec{r}|=r$.

Asa cum am aratat, in fiecare punct din plan, $P(O,r,\varphi)$, se poate defini cate un reper local $\{P;\vec{u}_r,\vec{u}_\varphi\}$ ai carui versori sa fie tangenti curbelor $\varphi=$const. si respectiv $r=$const.. Calculand, se obtin versorii

$$\begin{aligned}\vec{u}_r &= \cos\varphi\vec{u}_1+\sin\varphi\vec{u}_2\,,\\ \vec{u}_\varphi &= -\sin\varphi\vec{u}_1+\cos\varphi\vec{u}_2\,,\end{aligned}\tag{2.5}$$

care sunt ortogonali in orice punct din spatiu, fiind rotiti fata de versorii bazei reperului cartezian cu unghiul φ conform Ec.(1.55). Rezulta deci ca sistemul de coordonate polare este ortogonal. Rezultatul acesta se extinde imediat si asupra sistemelor de coordonate cilindrice deoarece axa z este perpendiculara pe planul coordonatelor polare. Reperele locale din plan sunt importante deoarece indica in fiecare punct directia *radiala*, $\vec{u}_r=\vec{r}/r$, si pe cea *tangentiala* la cercuri cu centrul in O, $\vec{u}_\varphi$.

Coordonate sferice

Atunci cand exista simetrie sferica, se poate folosi un sistem de coordonate adecvat geometriei suprafetelor sferice pe care se definesc meridiane si paralele similare cu cele obisnuite din geografia terestra.

Definiţia 2.7 *Sistemul de coordonate $Or\theta\varphi$ format din coordonatele $r\in[0,\infty)\subset[L]$, $\theta\in[0,\pi]$ si $\varphi\in[0,2\pi)$ definite astfel*

$$\begin{aligned}x_1 &= r\sin\theta\cos\varphi\,,\\ x_2 &= r\sin\theta\sin\varphi\,,\\ x_3 &= r\cos\theta\,,\end{aligned}\tag{2.6}$$

se numeste sistemul de coordonate sferice atasat sistemului cartezian $Ox_1x_2x_3$.

Sistemul de coordonate sferice are aceeasi origine, O, cu cel cartezian si domenii de variatie ale coordonatelor alese in asa fel incat sa acopere intregul spatiu fizic tridimensional. Sa notam ca pentru un punct dat $P(O,\vec{x})=P(O,r,\theta,\varphi)$ coordonata radiala este chiar lungimea vectorului de pozitie, $r=|\vec{x}|$, unghiul θ este masurat de la axa 3 la $\vec{x}$, iar φ este unghiul de la axa 1 la proiectia lui $\vec{x}$ pe planul $E_2(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ din O, care se mai numeste si plan ecuatorial. In sistemul de coordonate sferice ecuatiile sferelor sunt $r=$const., in timp ce ecuatiile $\varphi=$const. si $\theta=$const. definesc planele meridiane si respectiv pe cele paralele cu planul ecuatorial pentru care $\theta=\pi/2$.

Reperele locale in coordonate sferice, notate cu $\{P;\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi\}$, se definesc in fiecare punct $P(O,r,\theta,\varphi)$ cu ajutorul versorilor tangenti la curbele de coordonate care sunt chiar versorii vectorilor $\vec{V}_r$, $\vec{V}_\theta$ si $\vec{V}_\varphi$ ce se obtin din relatiile (2.2). Dupa cateva calcule se ajunge la urmatorul rezultat

$$\begin{aligned} \vec{u}_r &= \sin\theta\cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{e}_2 + \cos\theta\,\vec{e}_3\,, \\ \vec{u}_\theta &= \cos\theta\cos\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{e}_2\,, \\ \vec{u}_\varphi &= -\sin\varphi\vec{e}_1 + \cos\varphi\vec{e}_2\,, \end{aligned} \tag{2.7}$$

care ne da versorii reperelor locale in functie de cei ai reperului $\{O;\vec{e}_i\}$ atasat sistemului cartezian $Ox_1x_2x_3$. Se observa ca acesti versori sunt *ortogonali* in fiecare punct din spatiu ceea ce inseamna ca sistemul de coordonate sferice este un sistem ortogonal. Versorii reperelor locale indica in fiecare punct P directia radiala $\vec{u}_r = \vec{x}/r$, directia tangentiala $\vec{u}_\theta$ la meridianul care trece prin P si pe cea tangentiala $\vec{u}_\varphi$ la paralela din acest punct.

2.1.3 Miscarea particulei fata de un sistem de referinta

Introducerea sistemelor de coordonate permite caracterizarea completa a pozitiei unui corp oarecare cu ajutorul unui set de numere care pot fi considerate ca valori instantanee ale unor functii de timp atunci cand corpul se afla in miscare.

Definiţia 2.8 *Daca miscarea unui sistem mecanic oarecare este descrisa de un set de functii de timp, independente intre ele, ale caror valori la un moment dat determina complet pozitia si configuratia sistemului in acel moment, spunem ca fiecare dintre aceste functii corespunde cate unui* grad de libertate.

In continuare ne propunem sa studiem miscarea unei particule in raport cu sisteme de referinta considerate fixe sau in miscare fata de alte sisteme. Intelegem prin particula un corp omogen, cu simetrie sferica si dimensiuni neglijabile care are o miscare foarte apropiata de cea ideala a unui *punct material* a carui masa se afla concentrata intr-un punct geometric, fara dimensiuni. Pozitia particulei este data de vectorul de pozitie al centrului sferei. Atata vreme cat nu exista alte restrictii (legaturi), ea are trei grade de libertate reprezentate de cele trei coordonate carteziene corespunzatoare.

Marimi cinematice in coordonate carteziene

Sa consideram, mai intai, miscarea unei particule fata de sistemul de referinta propriu al observatorului, $S(O;\vec{e}_i;t)$, ai carui versorii $\vec{e}_i$ sunt *independenti* de timp. Atunci *traiectoria* particulei este data de vectorul sau de pozitie,

$$\vec{x}(t) = x_i(t)\vec{e}_i\,, \tag{2.8}$$

care depinde de timp numai prin intermediul coordonatelor carteziene $x_i = x_i(t)$, (i=1,2,3). Acestea sunt trei functii oarecare de timp despre care presupunem ca sunt cel putin de doua ori derivabile in raport cu timpul. Notand derivata in raport cu timpul prin $(\dot{\ })$, vom defini mai intai cele doua marimi cinematice fundamentale, viteza si accelerata.

Definiţia 2.9 *Se numeste viteza relativa fata de sistemul de referinta $S(O;\vec{e}_i;t)$ vectorul*

$$\dot{\vec{x}}(t) = \dot{x}_i(t)\vec{e}_i \in E_3[LT^{-1}]\,. \tag{2.9}$$

Acceleratia relativa fata de acelasi sistem este

$$\ddot{\vec{x}}(t) = \ddot{x}_i(t)\vec{e}_i \in E_3[LT^{-2}]\,. \tag{2.10}$$

Interpretarea geometrica a vitezei este simpla. Din faptul ca, prin definitie, derivata in raport cu timpul este

$$\dot{\vec{x}}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{x}(t+\Delta t)-\vec{x}(t)}{\Delta t} \tag{2.11}$$

rezulta ca viteza este *tangenta* la traiectorie iar marimea $\Delta s = |\dot{\vec{x}}|\Delta t$ aproximeaza spatiul parcurs pe traiectorie in intervalul Δt. De aici rezulta ca distanta parcursa pe traiectorie intre momentele t_1 si t_2 este

$$s_{12} = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\vec{x}}|\,dt = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{\vec{x}}\cdot\dot{\vec{x}}}\,dt\,. \tag{2.12}$$

Interpretarea geometrica a acceleratiei este mai complicata si nu intotdeauna productiva din punctul de vedere al studiului dinamic.

Exista situatii particulare cand particula este supusa unor *legaturi* care o obliga sa ramana pe anumita curba sau anumita suprafata. Lasand pentru mai tarziu problema generala a legaturilor pe curbe sau suprafete oarecare, sa ne oprim asupra miscarilor care pot avea loc pe o dreapta sau intr-un plan.

Definiţia 2.10 *Daca traiectoria este o dreapta atunci miscarea se numeste rectilinie. In cazul in care traiectoria este o curba continuta intr-un plan se spune ca traiectoria este plana.*

Traiectoria rectilinie este o dreapta orientata $E_1(\vec{u})$ de versor $\vec{u}$ care trece prin anumit punct $C(O,\vec{x}_C)$ astfel incat ecuatia traiectoriei

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_C + r(t)\vec{u} \tag{2.13}$$

este data de dependenta de timp a coordonatei carteziane $r(t)$ fata de reperul $\{C;\vec{u}\}$, corespunzatoare singurului grad de libertate admis.

Exemplu: **Miscarea rectilinie si uniforma.** Presupunand ca la momentul initial t_0 particula trece prin punctul $M(O,\vec{x}_0)$ si ca viteza ei este data de vectorul constant $\vec{v}_0$, traiectoria se scrie

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}_0(t-t_0)\,. \tag{2.14}$$

Daca $\vec{v}_0 = \vec{0}$ atunci particula este in repaus relativ fata de reper. □

In cazul miscarii plane problema are doua grade de libertate. Fata de un reper oarecare traiectora este data de

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_C + r_1(t)\vec{u}_1 + r_2(t)\vec{u}_2\,. \tag{2.15}$$

unde $r_1(t)$ si $r_2(t)$ sunt coordonatele carteziene (la momentul t) ale particulei in sistemul de coordonate Cr_1r_2 atasat reperului $\{C;\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$ din plan. Sa notam ca, in ambele cazuri particulare prezentate, vectorul $\vec{r}(t) = \vec{x}(t) - \vec{x}_C$ descrie miscarea *relativa* a particulei fata de punctul C care joaca rolul de origine pentru reperele alese pe dreapta sau in plan.

Marimi cinematice in coordonate generalizate

In problemele in care se folosesc coordonate generalizate introduse prin transformari de forma (2.1) ecuatiile traiectoriei sunt date de de functiile $\xi = \xi(t)$, $\eta = \eta(t)$ si $\zeta = \zeta(t)$. Cu ajutorul lor se pot obtine marimile cinematice in noile coordonate. Viteza in coordonate generalizate se calculeaza astfel

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}} &= (\partial_\xi \vec{x})\,\dot{\xi} + (\partial_\eta \vec{x})\,\dot{\eta} + (\partial_\zeta \vec{x})\,\dot{\zeta} \\ &= v_\xi \vec{e}_\xi + v_\eta \vec{e}_\eta + v_\zeta \vec{e}_\zeta \end{aligned} \tag{2.16}$$

unde, asa cum rezulta din relatiile (2.2), componentele vitezei in reperul local din punctul de coordonate (ξ, η, ζ) sunt

$$v_\xi = |\vec{V}_\xi|\dot{\xi}\,, \quad v_\eta = |\vec{V}_\eta|\dot{\eta}\,, \quad v_\zeta = |\vec{V}_\zeta|\dot{\zeta}\,. \tag{2.17}$$

Pentru acceleratii calculul este mai complicat si este greu sa scriem expresii generale detaliate pentru componentele lor din repere locale. Calculul urmeaza sa fie facut pentru fiecare sistem de coordonate in parte, dupa urmatoarea metoda: se calculeaza $\ddot{\vec{x}}$ in functie de derivatele in raport cu timpul ale coordonatelor generalizate si se proiecteaza apoi pe directiile reperului local. Se obtin componentele acceleratiei in acest reper

$$a_\xi = \ddot{\vec{x}} \cdot \vec{e}_\xi\,, \quad a_\eta = \ddot{\vec{x}} \cdot \vec{e}_\eta\,, \quad a_\zeta = \ddot{\vec{x}} \cdot \vec{e}_\zeta\,. \tag{2.18}$$

Trebuie sa notam ca exista multe probleme in care aceeleratiile nu intervin in mod explicit si calculul lor poate fi evitat.

Atunci cand miscarea este plana, avand doua grade de libertate, sunt suficiente doar doua coordonate generalizate pentru descrierea pozitiei si a traiectoriei. Cele mai cunoscute exemple sunt coordonatele polare si sferice.

Exemplu: **Viteza si acceleratia in coordonate polare.** Sa consideram un sistem de coordonate carteziene in plan, Or_1r_2, si sistemul de coordonate polare corespunzator $Or\varphi$. Stiind ca vectorul de pozitie al unui punct de pe traiectorie este $\vec{r}(t) = r_1(t)\vec{u}_1 + r_2(t)\vec{u}_2$, calculam direct viteza

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}_1\vec{u}_1 + \dot{r}_2\vec{u}_2 = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi \tag{2.19}$$

unde $\vec{u}_r$ si $\vec{u}_\varphi$ sunt versorii reperului local dat de Ec.(2.5). In acest reper $v_r = \dot{r}$ reprezinta componenta *radiala* a vitezei iar $v_\varphi = r\dot{\varphi}$ pe cea *tangentiala*. Pentru calculul acceleratiei procedura este mai laborioasa. Calculam, mai intai, componentele carteziene ale acceleratiei,

$$\ddot{r}_1 = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\cos\varphi - (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\sin\varphi\,, \tag{2.20}$$

$$\ddot{r}_2 = (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\sin\varphi + (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\cos\varphi\,, \tag{2.21}$$

si proiectam apoi vectorul $\ddot{\vec{r}}$ pe axele reperului local (2.5). Se obtin componentele acceleratiei in reperul local

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\,, \quad a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\,, \tag{2.22}$$

prima fiind componenta radiala, iar a doua, cea tangentiala.

Viteza si acceleratia in coordonate sferice. Pornind de la vectorul de pozitie $\vec{x}$ scris cu ajutorul coordonatelor sferice (2.6) si procedand ca si in cazul precedent, se obtine viteza

$$\dot{\vec{x}} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{u}_\varphi \tag{2.23}$$

in reperul local (2.7). Deoarece acesta este ortogonal, rezulta

$$\dot{\vec{x}}^2 = \dot{r}^2 + r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2)\,. \tag{2.24}$$

Un calcul mai laborios ne permite sa punem acceleratia sub forma

$$\ddot{\vec{x}} = a_r\,\vec{u}_r + a_\theta\,\vec{u}_\theta + a_\varphi\,\vec{u}_\varphi \tag{2.25}$$

unde

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\,,\\ a_\theta &= 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\varphi\,,\\ a_\varphi &= 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta\,, \end{aligned} \tag{2.26}$$

sunt componentele acceleratiei in reperul local. □

2.1.4 Miscarea relativa

Asa cum am aratat, in conceptia relativista, alegerea sistemului de referinta ramane la latitudinea observatorului. In momentul in care mai multi observatori fac masuratori, ei pot folosi diverse sisteme de referinta pentru a descrie *aceeasi realitate fizica*. De aceea se impune ca observatiile facute in doua sisteme de referinta diferite sa poata fi corelate intre ele prin reguli precise indiferent de starea de lor miscare relativa a unuia fata de celalalt.

Pozitia relativa a doua sisteme de referinta

Pentru a putea studia miscarea relativa a doua sisteme de referinta trebuie sa precizam, mai intai, cum se descrie pozitia relativa a doua sisteme de referinta aflate in *repaus* unul fata de celalalt. Considerand doua sisteme de referinta, S si S', avand reperele drepte $\{O;\vec{e}_i\}$ si $\{O';\vec{e}_i{}'\}$, aflate in *repaus relativ*, ne propunem sa corelam coordonatele carteziene ale aceluiasi punct P, masurate in cele doua sisteme de referinta. Fiecare dintre cele doua sisteme de referinta are propriul sau sistem de coordonate carteziene si anume $Ox_1x_2x_3$ in reperul lui S si $O'x_1'x_2'x_3'$ in reperul lui S'. In general, vom nota toate componentele vectorilor si tensorilor fata de S' cu $'$. Evident, componentele fata de cele doua repere ortogonale se vor transforma intre ele prin transformari ortogonale, conform regulilor stabilite in Sec.1.3.

Pozitia relativa a originilor celor doua sisteme de referinta este definita de vectorul de pozitie $\vec{X} = X_i\vec{e}_i$ al punctului O' fata de O. Acesta se numeste vector de *translatie* si ne da pozitia originii $O'(O,\vec{X})$ fata de primul reper. Vom nota apoi cu $\vec{x} = x_i\vec{e}_i$ vectorul de pozitie al punctului P fata de O si cu $\vec{x}\,' = x_i'\vec{e}_i{}'$ vectorul de pozitie al aceluiasi punct fata de O'. Deoarece $P(O,\vec{x}) \equiv P(O',\vec{x}')$, trebuie sa avem

$$\vec{x} = \vec{X} + \vec{x}\,'\,. \tag{2.27}$$

Pe de alta parte, stim ca transformarea intre doua baze de aceasi chiralitate este o rotatie,

$$\vec{e}_i{}' = R_{ij}\,\vec{e}_j\,,\quad R \in SO(3)\,. \tag{2.28}$$

Rezulta imediat transformarile liniare directa si inversa dintre coordonatele carteziene (x_i) si (x'_i) ale punctului P fata de cele doua sisteme de referinta,

$$x_i = R_{ji}x'_j + X_i\,, \qquad x'_i = R_{ij}(x_j - X_j)\,, \tag{2.29}$$

care sunt translatii ale originii reperului insotite de rotatii ale coordonatelor. [3]

O relatie similara se obtine si pentru scalele de timp a doua sisteme de referinta diferite. Asa cum am aratat, in fiecare sistem de referinta, S sau S', se poate alege o anumita origine a timpului fara ca prin aceasta sa fie afectata masurarea intervalelor de timp. De aceea, scalele de timp ale celor doua sisteme de referinta trebuie sa coincida pana la o *translatie* a originilor. Daca notam cu t timpul masurat in S si cu t' cel masurat in S' atunci trebuie sa avem

$$t = t' + t_{OO'} \tag{2.30}$$

unde $t_{OO'}$ este momentul masurat de observatorul din S la care cel de al doilea observator, din S', considera ca $t' = 0$.

Miscarea relativa a doua repere, vectorul rotatie

Urmeaza sa vedem cum poate fi descrisa miscarea relativa a doua repere diferite, folosind *aceeasi* scala de timp, adica aceeasi origine a timpului pe scalele celor doi observatori. Cu toate ca nici unul dintre repere nu este privilegiat, este comod ca, in calculele care urmeaza, sa adoptam atitudinea observatorului aflat in repaus fata de unul dintre ele, pe care convenim sa-l numim fix, in timp ce celalalt reper va fi considerat mobil. Vom alege reperul fix $\{O;\vec{e}_i\}$ si vom studia miscarea relativa a reperului mobil $\{O';\vec{e}_i{}'\}$, cu originea in punctul $O'(O,\vec{X}(t))$ si cu o baza ai carei versori,

$$\vec{e}_i{}'(t) = R_{ij}(t)\vec{e}_j\,, \tag{2.31}$$

vor depinde de timp deoarece se *rotesc* fata de vesorii bazei $\{\vec{e}_i\}$ considerati fixati. Aceasta miscare de rotatie este descrisa de o transformare de forma (2.28), dar a carei matrice $R(t)$ nu mai este constanta ci va depinde de timp prin intermediul a trei parametri care pot fi alesi in mai multe feluri, asa cum am aratat in Sec.1.3.3. unde am discutat parametrizarile prin componentele versorului axei de rotatie si unghiul de rotatie sau prin unghiurile Euler. Vom presupune o dependenta arbitrara de timp atat a componentelor vectorului $\vec{X}(t)$ cat si a parametrilor matricii $R(t)$, singura conditie pe care o impunem fiind derivabilitatea de doua ori in raport cu timpul.

Problema pe care dorim sa o studiem, pentru inceput, este sa descriem cum se vede din reperul fix miscarea unei particule aflate in punctul P care se misca *solidar* cu reperul mobil. Aceasta are fata de reperul mobil coordonate carteziene *fixate*, notate cu (r'_i), care dau vectorul de pozitie

$$\vec{r}(t) = r'_i\vec{e}_i{}'(t) \tag{2.32}$$

al punctului $P = P(O',\vec{r})$ in raport cu S'. Pozitia punctului P fata de S este data de vectorul de pozitie (2.27) care acum se scrie

$$\vec{x}(t) = \vec{X}(t) + \vec{r}(t)\,. \tag{2.33}$$

[3] Se poate arata ca multimea acestor transformari formeaza un grup numit grupul euclidian tridimensional si notat cu $E(3)$.

In continuare, urmeaza sa descriem cum variaza in timp vectorul $\vec{r}$ datorita rotatiei sistemului de referinta S' in raport cu S.

In acest scop, trebuie sa cautam o marime cinematica adecvata determinata de modul cum evolueaza aceasta rotatie in timp. Vom incepe cu observatia ca se pot construi urmatoarele matrice

$$\Omega(t) = R(t)^T \dot{R}(t)\,, \quad \Omega'(t) = \dot{R}(t)R(t)^T\,, \tag{2.34}$$

avand proprietatea

$$\Omega'(t) = R(t)\Omega(t)R(t)^T\,. \tag{2.35}$$

In plus, din derivarea in raport cu timpul a relatiei de ortogonalitate $RR^T = Id$ se obtine $\dot{R}R^T + R\dot{R}^T = 0$ de unde rezulta ca Ω si Ω' sunt matrice *antisimetrice* satisfacand $\Omega^T = -\Omega$ si $\Omega'^T = -\Omega'$. Aceasta inseamna ca elementele lor de matrice, ω_{ij} si respectiv ω'_{ij}, avand forma

$$\begin{aligned}
\omega_{ij}(t) &= R_{mi}(t)\dot{R}_{mj}(t) = -R_{mi}(t)\dot{R}_{mj}(t) = -\omega_{ji}(t)\,, && (2.36)\\
\omega'_{ij}(t) &= \dot{R}_{im}(t)R_{jm}(t) = -\dot{R}_{jm}(t)R_{im}(t) = -\omega'_{ji}(t)\,, && (2.37)
\end{aligned}$$

sunt componentele unui tensor antisimetric in raport cu sistemul fix S sau fata de sistemul mobil S', relatia (2.35) reprezentand chiar regula de transformare a acestor componente scrisa sub forma matriceala. Acestui tensor i se poate asocia un pseudovector tridimensional conform relatiilor (1.34).

Definiţia 2.11 *Se numeste* vector de rotatie *vectorul axial*

$$\vec{\omega}(t) = \omega_i(t)\vec{e}_i = \omega'_i(t)\vec{e}_i{}'(t) \tag{2.38}$$

avand componentele

$$\omega_i(t) = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\omega_{jk}(t)\,, \quad \omega'_i(t) = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\omega'_{jk}(t)\,, \tag{2.39}$$

fata de sistemele de referinta S si respectiv S'.

Cu aceasta ajungem la urmatoarea teorema importanta:

Teoremă 2.1 *Vectorul de rotatie satisface ecuatia*

$$\dot{\vec{r}}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t)\,, \tag{2.40}$$

atata timp cat particula ramane legata rigid de reperul mobil, coordonatele sale fata de acest reper, (r'_i), ramanand constante.

Demonstraţie: Calculand derivata in raport cu timpul a transformarii (2.31), si folosind apoi inversa ei se obtine

$$\dot{\vec{e}}_i{}'(t) = \dot{R}_{im}(t)\vec{e}_m = \dot{R}_{im}(t)R_{jm}(t)\vec{e}_j{}'(t) = \omega'_{ij}(t)\vec{e}_j{}'(t)\,. \tag{2.41}$$

Apoi, folosind relatia (1.36) nu este greu sa vedem ca aceaste formule pot fi scrise vectorial astfel

$$\dot{\vec{e}}_i{}'(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{e}_i{}'(t)\,, \quad i = 1, 2, 3\,. \tag{2.42}$$

Cunoscute sub numele de *formule Poisson*, ele ne conduc la rezultatul dorit, atunci cand particula este legata rigid de sistemul de referinta mobil (cu $\dot{r}'_i = 0$). ■
Acum viteza si acceleratia se obtin usor derivand (2.33) in raport cu timpul si folosind (2.40) ori de cate ori apare $\dot{\vec{r}}$. Rezulta marimi cinematice datorate in exclusivitate antrnarii particulei de catre reperul mobil.

Definiţia 2.12 *Marimile cinematice fata de reperul fix, ale unei particule aflate in punctul* $P(O, \vec{x}) \equiv P(O', \vec{r})$, *care se misca solidar cu cu reperul mobil* ($r'_i = \text{const.}$), *sunt* viteza de transport

$$\vec{V}_t \equiv \dot{\vec{x}}_{|\dot{r}'_i=0} = \dot{\vec{X}} + \vec{\omega} \times \vec{r}\,, \tag{2.43}$$

si acceleratia de transport

$$\vec{A}_t \equiv \ddot{\vec{x}}_{|\dot{r}'_i=0} = \ddot{\vec{X}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\,. \tag{2.44}$$

In miscarea de transport, compunerea translatiei originii cu rotatia bazei produc, in general, miscari relativ complicate care pot fi mai bine intelese analizand separat proprietatile cinematice ale rotatiilor. Evident, cele mai simple miscari de rotatie sunt cele cu *axa fixa*.

Exemplu: **Miscarea de rotatie cu axa fixa.** Sa consideram cazul in care reperul mobil se afla in miscare de rotatie in jurul unei axe fixe in raport cu reperul fix care trece prin originea acestuia, O. Deoarece alegerea bazei unui reper ramane la latitudinea observatorului, vom presupunem ca axa de rotatie a fost aleasa pe directia $\vec{e}_3$, fara a pierde din generalitate. Atunci matricea de rotatie $R = R(\vec{e}_3, \varphi)$ are forma (1.54), dar cu φ in loc de θ. Apoi, observam ca din relatia (2.36), care defineste componentele ω_{ij} fata de reperul fix, rezulta ca acestea sunt elementele matricei $R^T\dot{R}$. Presupunand ca $\varphi = \varphi(t)$ este o functie oarecare de timp, calculam

$$\Omega = R^T(\vec{e}_3, \varphi)\dot{R}(\vec{e}_3, \varphi) = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\varphi} & 0 \\ -\dot{\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.45}$$

de unde vedem ca singurele componente nenule sunt $\omega_{12} = -\omega_{21} = \dot{\varphi}$ sau $\vec{\omega} = \vec{e}_3\,\dot{\varphi}$.

Daca rotatia are o axa fixa pe directia versorului $\vec{u}$ atunci $\vec{\omega} = \vec{u}\,\dot{\varphi}$. Regasim astfel cazul simplu al miscarii de rotatie (circulare) in care acceleratia de transport are doi termeni. Primul termen este cel al acceleratiei tangentiale $\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$ in care $\dot{\vec{\omega}} = \vec{u}\,\ddot{\varphi}$ este acceleratia unghiulara. Al doilea termen de forma $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = [\vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{r}) - \vec{r}]\,\dot{\varphi}^2$ reprezinta acceleratia centripeta.

In cazul in care $\vec{u}$ si $\vec{r}$ sunt *ortogonali*, este avantajoasa folosirea coordonatelor polare $Or\varphi$ ale planului de rotatie care contine vectorul $\vec{r}$. Conform Ec.(2.22) in care luam $r =$const., putem scrie direct acceleratia radiala (centripeta) $a_r = -r\dot{\varphi}^2$ si pe cea tangentiala $a_\varphi = r\ddot{\varphi}$. □

In general, rotatiile nu au axe fixe ci axe mobile denumite *axe instantanee* de rotatie. Miscarea axei de rotatie este descrisa *explicit* de versorul dependent de timp al axei de rotatie, $\vec{u}(t)$, in parametrizarea geometrica (1.50) sau in mod *implicit* in cazul parametrizarii cu unghiuri Euler (1.57) sau a altor tipuri de parametrizari.

Exemplu: **Expresia vectorului de rotatie in parametrizari uzuale.** Sa consideram, mai intai, parametrizarea (1.50) in care atat versorul $\vec{u}$ cat si unghiul θ depind de timp. Putem calcula componentele vectorului de rotatie fara de cele doua sisteme de referinta, S si S', cu ajutorul formulelor (2.36), (2.37) si (2.39). Un calcul simplu dar laborios ne conduce la urmatoarele rezultate remarcabile

$$\omega_i = u_i\dot{\theta} + \dot{u}_i \sin\theta + \varepsilon_{ijk} u_j \dot{u}_k (1-\cos\theta)\,, \tag{2.46}$$

$$\omega'_i = u_i\dot{\theta} + \dot{u}_i \sin\theta - \varepsilon_{ijk} u_j \dot{u}_k (1-\cos\theta)\,, \tag{2.47}$$

datorate, in primul rand, faptului ca versorul axei instantanee de rotatie are *aceleasi* componente atat fata de sistemul fix cat si fata de cel mobil ($u'_i = R_{ij} u_j = u_i$), asa cum am aratat in Sec.1.3.3. Desigur, aceasta nu se mai intampla cu componentele vectorului $\dot{\vec{u}}$ care se transforma astfel

$$\dot{u}'_i = R_{ij}\dot{u}_j = \dot{u}_i \cos\theta + \varepsilon_{ijk}\dot{u}_j u_k \sin\theta\,. \tag{2.48}$$

Aceste proprietati permit scrierea vectoriala

$$\vec{\omega} = \vec{u}\,\dot{\theta} + \dot{\vec{u}}\,\sin\theta + \vec{u}\times\dot{\vec{u}}\,(1-\cos\theta)\,, \tag{2.49}$$

Atunci cand se folosesc unghiurile Euler expresiile nu mai au simetria celor de mai sus. Daca rotatia este data de relatia (1.57) atunci componentele vectorului rotatie fata de sistemul S sunt

$$\omega_1 = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi\,, \tag{2.50}$$

$$\omega_2 = -\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi\,, \tag{2.51}$$

$$\omega_3 = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\,, \tag{2.52}$$

iar cela fata de sistemul S' se scriu

$$\omega'_1 = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi\,, \tag{2.53}$$

$$\omega'_2 = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi\,, \tag{2.54}$$

$$\omega'_3 = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}\,. \tag{2.55}$$

Vom vedea ca toate aceste formule sunt utile in aplicatii. □

In concluzie, putem spune ca miscarea relativa a doua repere este caracterizata de vectorul de translatie $\vec{X}(t)$ si vectorul de rotatie $\vec{\omega}(t)$ care determina complet marimile cinematice de transport, $\vec{V}_t$ si $\vec{A}_t$.

Miscarea relativa a unei particule

Sa trecem acum la cazul general in care particula din punctul $P(O', \vec{r})$ are o miscare oarecare fata de reperul mobil $\{O'; \vec{e}_i{}'\}$, coordonatele sale carteziene devenind functii de timp, $r'_i = r'_i(t)$. Atunci si marimile cinematice *relative* vor fi date de Def.(2.9). Acestea sunt *viteza relativa*

$$\vec{v}(t) = \dot{r}'_i(t)\vec{e}_i{}'(t) \tag{2.56}$$

si *acceleratia relativa*

$$\vec{a}(t) = \ddot{r}'_i(t)\vec{e}_i{}'(t)\,. \tag{2.57}$$

Pentru a intelege cum se observa aceasta miscare din reperul fix trebuie sa reluam calculul derivatelor vectorului (2.33). Partea sensibla o constituie derivarea lui $\vec{r}(t)$ care acum depinde de timp atat prin componente cat si prin versori. Dar daca tinem seama de (2.40) si de definitiile anterioare obtinem

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{r}_i'(t)\vec{e}_i{}'(t) + r_i'(t)\dot{\vec{e}}_i{}'(t) = \vec{v}(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t)\,, \tag{2.58}$$

si, dupa inca o derivare,

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{a} + 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\,. \tag{2.59}$$

Se observa ca in acceleratie apare un termen nou datorat exclusiv miscarii fata de reperul mobil, care se anuleaza daca $\vec{v} = \vec{0}$.

Definiţia 2.13 *Acceleratia*

$$\vec{A}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v} \tag{2.60}$$

a unei particule care se misca cu viteza $\vec{v}$ fata de un reper aflat in rotatie se numaste acceleratie Coriolis.

In final, nu mai ramane decat sa consideram si marimile cinematice datorate translatiei cu care, dupa ce grupam termenii, obtinem viteza si acceleratia particulei fata de reperul fix,

$$\dot{\vec{x}} = \vec{v} + \vec{V}_t\,, \tag{2.61}$$

$$\ddot{\vec{x}} = \vec{a} + \vec{A}_t + \vec{A}_c\,. \tag{2.62}$$

2.1.5 Sisteme de referinta inertiale. Transformari Galilei

Ipotezele generale despre spatiu si timp reprezinta doar un cadru de discutie a modalitatilor in care poate fi descrisa lumea fizica. Ele nu ofera decat posibilitatea definirii notiunilor primare necesare unei plasari cat de cat rezonabile a realitatii in spatiu si timp si interpretarii unor marimi cinematice simple. Urmeaza sa fie formulate o serie de asertiuni (postulate sau principii) menite sa explice natura interactiunilor fundamentale care stau la baza dinamicii atat de diverse a sistemelor care fac obiectul studiului in fizica.

Dar naintea acestui demers, trebuie lamurit ce se intampla in absenta oricari interactiuni. Pentru asta ar trebui sa putem izola complet anumite sisteme si sa vedem cum evolueaza. Din pacate, acest lucru nu este posibil si de aceea se recurge la artificiul experimentului mental care extrapoleaza situatii experimentale concrete, simplificandu-le pana la idealizare. Vom adopta acest procedeu imaginandu-ne o particula care se misca intr-un spatiu golit de materie in care nu poate avea loc nici un fel de interactiune. In acest spatiu plasam observatori ideali, fiecare cu reperul sau, care nu urmaresc decat evolutia acestei particule numita *particula libera*.

Ipoteza omogenitatii si a izotropiei spatiului ne impiedica sa credem ca unul sau mai multi observatori ar putea fi privilegiati, observand ceva cu totul deosebit decat ceilalti. Deci trebuie sa acceptam ca ceea ce se poate observa sunt diverse miscari relative ale particulelor libere fata de reperele observatorilor care pot lua aspecte particulare variate, asa cum rezulta din studiul miscarii relative prezentat mai inainte. Dar, atata vreme cat particula ramane libera miscarea ei trebuie sa fie cat mai simpla, cel putin fata de o clasa de sisteme de referinta alese corect. Deci concluzia ar fi ca trebuiesc selectate sistemele fata de care particula libera are miscarea cea mai simpla. Pe de alta parte, trebuie sa ne convingem ca folosim sistemele de referinta in care legile fizicii au aceeasi semnificatie. Apare astfel problema daca cele doua deziderate se suprapun sau nu, adica daca sistemele din care miscarea particulelor libere se vede ca fiind cea mai simpla sunt si cele in care toate legile naturii sunt aceleasi. Acestea problema nu poate fi rezolvata decat printr-un postulat care sa stea la baza intregii conceptii despre spatiu, timp si universalitatea legilor (ecuatiilor) fizicii.

Aici sunt posibile doua atitudini. Prima este nerelativista acceptand ca postulat existenta unui sistem de referinta absolut in care trebuie descrisa fizica, urmand ca observatiile facute in alte sisteme sa fie interpretate in functie de starea lor de miscare fata de reperul sistemului absolut. A doua atitudine este cea relativista care porneste de la premiza ca ezista o clasa de sisteme de referinta (sau repere) *echivalente* in care legile fizicii sunt aceleasi. Relativismul este doar aparent o atitudine opusa ideii de spatiu si timp absolute deoarece se refera la un spatiu si un timp ideale, separate de materie si interactiune. Nu este exclus ca pornind cu conceptii relativiste sa se ajunga la concluzii contrare atunci cand se considera problema reala a determinarii structurii spatiului si timpului de catre fenomenele fizice care au loc in spatiu si timp [4].

Reintorcandu-ne la premize, trebuie sa alegem dintre cele doua atitudini pe cea mai plauzibila din perspectiva interpretarii fenomenologiei cunoscute si din punctul de vedere al coerentei descrierii lumii fizice in ansamblu. De aceea vom adopta atitudinea relativista si vom incepe cu postulatul *relativitatii* comun atat relativitatii Galilei cat si celei dezvoltate de Einstein.

Postulatul I: A. *Exista o clasa de sisteme de referinta numite* sisteme inertiale *fata de care orice particula libera se misca rectiliniu si uniform sau se afla in repaus relativ.*
B. *Legile naturii observate din orice sistem inertial sunt aceleasi.*

Pentru a completa punctul de vedere relativist, este necesar un al doilea postulat menit sa precizeze relatia dintre spatiu si timp in conditiile acceptarii primului postulat. In relativitatea galileana rolul celui de al doilea postulat il joaca ipoteza 2 care afirma universalitatea timpului [5].

Atitudinea relativista este convenabila deoarece permite ca observatia sa se faca din orice sistem inertial in timp ce sistemul absolut (chiar daca exista) nu a putut fi inca identificat. Pe de alta parte, relativismul are, in plus, avantajul de a separa net ceea ce este universal in descrierea legilor fizicii de ceea ce depinde de alegerea sistemului inertial. Dar pentru asta trebuie sa delimitam clasa sistemelor inertiale.

Vom presupune ca exista cel putin un sistem inertial si ca toate rezultatele obtinute despre miscarea relativa sunt corecte. Cu ajutorul lor vom putea determina starile de miscare posibile dintre doua sisteme inertiale. Sa consideram ca doua sisteme de referinta, unul fix (fata de un observator) si celalalt mobil, sunt inertiale si ca o particula libera este observata din amandoua, simultan. In fiecare sistem miscarea trebuie sa fie observata ca o miscare

[4] Asa cum se intampla acum in cosmologia bazata pe relativitatea generala

[5] In relativitatea einsteiniana al doilea postulat afirma universalitatea vitezei luminii care trebuie sa aiba aceeasi valoare in orice reper inertial.

rectilinie si uniforma. Fata de sistemul mobil ea va avea $\vec{a} = \vec{0}$ si o viteza arbitrara, $\vec{v}$ =const. Marimile cinematice fata de sistemul fix sunt date de relatiile (2.61) si (2.62). Din acestea deducem ca miscarea este rectilinie si uniforma si fata de sistemul fix (cu $\ddot{\vec{x}} = 0$ si $\dot{\vec{x}} =$ const.) daca si numai daca sunt indeplinite conditiile $\vec{\omega} = \vec{0}$ si $\dot{\vec{X}} = \vec{V}$ =const. Am ajuns astfel la urmatorul rezultat:

Propoziţia 2.1 *Doua sisteme inertiale pot fi unul fata de celalalt in repaus relativ sau cel mult intr-o miscare rectilinie si uniforma.*

Atunci cand sistemele de referinta sunt in repaus relativ pozitiile lor geometrice pot diferi printr-o rotatie si o translatie a originii (independente de timp) iar scalele lor de timp pot fi translatate una fata de cealalta. In aceste conditii coordonatele si timpul unui anumit eveniment vazut din cele doua sisteme sunt corelate prin transformari de forma (2.29) si (2.30).

Cazul interesant din punct de vedere fizic este acela in care sistemele se misca unul fata de celalalt rectiliniu si uniform, cu viteza $\vec{V}$. Presupunand, pentru simplitate, ca in ambele sisteme am luat aceeasi origine a timpului si ca originile celor doua sisteme coincid la momentul t_0, obtinem pentru vectorii de pozitie ai punctului $P(O, \vec{x}) = P(O', \vec{x}')$,

$$\vec{x} = \vec{x}' + \vec{V}(t - t_0)\,. \tag{2.63}$$

In plus, este convenabil sa luam in ambele sisteme aceeasi baza din E_3, pentru ca axele lor de coordonate sa ramana *paralele* tot timpul. Atunci regula de transformare a coordonatelor carteziene a punctului P fata de cela doua sisteme se scrie simplu astfel

$$x_i = x_i' + V_i(t - t_0). \tag{2.64}$$

Definiţia 2.14 *Transformarile* (2.63) *se numesc transformari Galilei.*

Din aceste transformari se deduce regula de *compunere a vitezelor*,

$$\dot{\vec{x}} = \dot{\vec{x}}' + \vec{V}\,, \tag{2.65}$$

specifica relativitatii Galilei [6].

In concluzie, transformarile posibile intre doua sisteme inertiale sunt: rotatiile si translatiile independente de timp (2.29), translatiile pe scala timpului (2.30) si transformarile Galilei (2.64). Se arata ca multimea acestor transformari formeaza un grup in raport cu operatia de compunere, numit *grupul Galilei.* In general, orice transformare din acest grup este complet determinata de 10 parametrii, trei ai rotatiilor, trei ai translatiilor spatiale, unul al translatiei pe scala timpului si cele trei componente ale vitezei $\vec{V}$.

2.2 Dinamica newtoniana

2.2.1 Principiile fundamentale ale dinamicii

In cadrul mecanicii Galilei-Newton trebuie surprinse acele trasaturi generale ale dinamicii newtoniene *compatibile* cu relativitatea galileana, capabile sa ne conduca la ecuatii de miscare

[6] Aceasta difera in mod spectaculos de regula de compunere a vitezelor din relativitatea Einstein.

care sa aiba aceeasi forma in orice reper inertial. Vom discuta aceasta problema pornind de la o formulare mai generala a principiului dinamic fundamental al lui Newton, care pune in evidenta cateva aspecte care se regasesc, mai mult sau mai putin explicit, in toate legile dinamice care guverneaza diversele tipuri de interactiuni din fizica clasica. Mai precis, vom pleca de la premiza ca orice dinamica se bazeaza, in cele din urma, pe ecuatii diferentiale (sau ecuatii cu derivate partiale) care nu contin derivate de ordin mai mare decat doi.

Pentru a crea un model mecanic suficient de complex ca sa permita discutarea tuturor detaliilor legate de formularea principiilor dinamicii, vom considera un *sistem* format din N *constiuenti* care, pentru simplitate, presupunem ca pot fi asimilati cu particule care se misca in raport cu un sistem de referinta oarecare oarecare, $S(O;\vec{e}_i;t)$, nu neaparat inertial. Vom considera ca nu exista legaturi intre particule astfel incat sistemul va avea $3N$ grade de libertate reprezentata de cele $3N$ coordonate carteziene ale particulelor fata de sistemul de referinta S considerat fix. Pentru numerotarea particulelor vom folosi indicii $a,b,c,...$ care pot lua valori de la 1 la N. Acesti indici vor fi pusi in paranteze pentru a marca faptul ca nu sunt indici vectoriali si nu se supun conventiei de sumare a indicilor muti [7]. Vectorul de pozitie care da traiectoria particulei (a), notat cu $\vec{x}^{(a)}(t)=x_i^{(a)}(t)\vec{e}_i$, depinde de timp prin intermediul coordonatelor carteziene $x_i^{(a)}$ ale acestei particule fata de S. Notatii similare se vor folosi si pentru viteze si acceleratii. Exista situatii in care este util sa folosim si vectorii de pozitie *relativi*

$$\vec{r}^{(ab)}=\vec{x}^{(a)}-\vec{x}^{(b)}\,,\quad a,b=1,2,...,N \tag{2.66}$$

care au proprietatile

$$\vec{r}^{(ab)}=-\vec{r}^{(ba)}\,,\quad \vec{r}^{(ab)}+\vec{r}^{(bc)}=\vec{r}^{(ac)}\,, \tag{2.67}$$

care fac ca numai $N-1$ dintre ei sa fie independenti. Prin derivarea lor in raport cu timpul se obtin *vitezele relative* $\dot{\vec{r}}^{(ab)}$ si *acceleratiile relative* $\ddot{\vec{r}}^{(ab)}$ a caror semnificatie este evidenta.

Dinamica mecanicii Galilei-Newton trebuie sa dea un raspuns la intrebarea: care sunt cauzele care pot scoate o particula sau un sistem de particule din starea de *inertie* adica de miscare libera, rectilinie si uniforma, in raport cu un reper inertial ? Experienta acumulata pana acum in diverse domenii din fizica conduce la urmatoarea generalizare a principiului dinamic newtonian:

Postulatul II: *Acceleratiile particulelor la un moment dat sunt complet determinate de pozitiile si vitezele lor din acel moment.*

Aceasta inseamna ca, in cazul cel mai general, *starea dinamica* a sistemului trebuie sa fie caracterizata de N campuri vectoriale

$$\vec{\Phi}^{(a)}=\vec{\Phi}^{(a)}(t,\vec{x}^{(1)},...,\dot{\vec{x}}^{(1)},...)\in E_3[LT^{-2}]\,,\quad a=1,2,...N\,, \tag{2.68}$$

care vor da acceleratiile particulelor in fiecare moment al miscarii prin intermediul a N ecuatii vectoriale de forma

$$\ddot{\vec{x}}^{(a)}=\vec{\Phi}^{(a)}(t,\vec{x}^{(c)},\dot{\vec{x}}^{(c)})\,,\quad a=1,2,...,N\,, \tag{2.69}$$

[7] De cate ori vom dori sa sumam dupa un astfel de indice vom nota acest lucru explicit

numite *ecuatiile de miscare* ale sistemului. Pentru simplitatea scrierii folosim o notatie compacta care indica faptul ca functiile vectoriale $\vec{\Phi}^{(a)}$ pot depinde de vectorii de pozitie si de vitezele *tuturor* celor N particule. Pe de alta parte, aceste marimi nu trebuie sa ramana simple obiecte matematice urmand sa capete o semnificatie fizica legata, in primul rand, de intensitatea interactiunilor dintre particule care se supuna principiului actiunii si reactiunii:

Postulatul III: *Actiunile reciproce a doua corpuri sunt intotdeauna egale si dirijate in sens contrar.*

Formularea celor doua postulate in acesti termeni foarte generali se refera la interactiuni de naturi diferite, mecanice sau electromagnetice, si isi pastreaza valabilitatea in *orice* fel de sistem de referinta, inertial sau neinertial. De aceea ecuatiile de miscare in forma (2.69) nu reprezinta expresia definitiva a unor legi fizice propriu zise, in sensul poatulatului I.B ci, mai degraba, cadrul in care se vor putea formula corect legile dinamice ale unor sisteme concrete din fizica clasica.

Primul pas, la nivelul mecanicii, l-a constituit separarea cauzelor miscarii de proprietatile intrinseci ale particulelor. Experienta arata ca intr-un sistem mecanic format din doua particule de greutati diferite, (a) si (b), care interactioneaza doar intre ele, particulele nu au aceeleratii egale si de sens contrar, asa cum ar cere postulatul III daca $\vec{\Phi}$ ar reprezenta *numai* masura actiunii mecanice. Pe de alta parte, s-a observat ca particulele sau corpurile reactioneza diferit la aceeasi actiune mecanica, in functie de o anumita marime proportionala cu greutatea lor. Astfel s-a ajuns la concluzia ca, in general, $\vec{\Phi} = \vec{F}/m$ reprezinta raportul dintre intensitatea actiunii mecanice, $\vec{F}$, numita *forta*, si o masura a inertiei corpurilor, m, numita *masa*. In acest termeni, ecuatiile de miscare capata forma

$$m^{(a)}\ddot{\vec{x}}^{(a)} = \vec{F}^{(a)}(t, \vec{x}^{(c)}, \dot{\vec{x}}^{(c)})\,, \quad a = 1, 2, ..., N\,. \tag{2.70}$$

fiind cunoscute sub numele de ecuatiile fundamentale ale dinamicii newtoniene sau simplu, *ecuatiile Newton*. Scrise pe componente in sistemul de coordonate carteziene ale lui S ele reprezinta un sistem de $3N$ *ecuatii diferentiale* de ordinul doi corespunzatoare celor $3N$ grade de libertate ale sistemului.

2.2.2 Masa si forta

Ecuatiile de miscare implica masa si forta care sunt notiuni primare ce nu pot fi definite independent una de cealalta in interiorul mecanicii. In alte domenii mai noi din fizica notiunea de masa se transfera din mecanica aproape nemodificata ramanand un concept fundamental in timp ce pentru forte se cauta mecanisme de interactiune alternative. Fortele vor fi, in cele din urma, eliminate deoarece se dovedesc a nu fi decat o aproximare la nivel macroscopic a unei dinamici mai profunde, datorate cuplajului dintre campuri. Fara a discuta o serie de aspecte controversate privind rolul masei si fortei in fizica clasica, ne limitam la a prezenta, in continuare, proprietatile lor asa cum sunt ele percepute la nivelul mecanicii.

Masa este singura marime mecanica specifica atasata particulelor sau, in general, oricarui sistem de particule sau corpuri. Ea este o marime *scalara* din $[M]^+$ care se exprima numai prin numere pozitive diferite de 0. Masa are proprietatea de *aditivitate* in sensul ca masa unui sistem este suma maselor partilor componente. In plus, se accepta ca masa este *dinamic stabila*, adica nu se modifica in urma actiunii fortelor *exterioare*[8]. Din punct de vedere al interactiunilor mecanice, masa joaca un dublu rol. In primul rand, ea este o masura a inertiei in sensul ca daca un corp este supus unei anumite forte el capata o acceleratie cu atat mai mica cu cat masa sa este mai mare. In al doilea rand, masa este sursa campului gravitational producand fortele de atractie gravitationala. In primul caz se vorbeste despre *masa inerta* in timp ce sursa gravitatiei este denumita *masa grvitationala*. In general, se accepta *principiul echivalentei* care afirma ca masa inerta si masa gravitationala sunt echivalente [9].

In cazul sistemelor discrete, formate din una sau mai multe particule, asupra acestora nu pot actiona decat *forte concentrate*. Forta concentrata este un vector $\vec{F} \in E_3[MLT^{-2}]$ care are un *punct de aplicatie* bine determinat. Din acest motiv se spune ca forta este un *vector legat*, ea fiind caracterizata, din punct de vedere geometric, de perechea de vectori $(\vec{a}, \vec{F})$, formata din vectorul de pozitie al punctului de aplicatie $A(O, \vec{a})$ si vectorul fortei aplicate. Conform principiului *independentei* actiunii fortelor, daca intr-un punct actioneaza simultan mai multe forte ele produc acelasi efect ca si forta obtinuta din compunerea lor numita forta *rezultanta*. Reciproc, actiunea unei forte poate fi inlocuita cu cea a *oricaror* doua forte concurente in aceslasi punct a caror rezultanta este forta initiala. De aici tragem concluzia ca o anumita forta, $\vec{F}^{(a)}$, din ecuatiile (2.75) este rezultanta tuturor fortelor care actioneaza asupra particulei (a).

Trebuie sa subliniem ca fortele, avand calitatea unica de masura a actiunii mecanice, se supun neconditionat postulatului III. De exemplu, daca doua particule interactioneaza intre ele atunci particula (a) va actiona asupra particulei (b) cu o forta $\vec{F}^{(ba)}$ in timp ce particula (b) va exercita asupra particulei (a) forta de *reactiune* $\vec{F}^{(ab)} = -\vec{F}^{(ba)}$. Modul in care se aleg fortele de actiune si cele de reactiune este indiferent deoarece din punct de vedere fizic este indiferent daca spunem ca particula (a) actioneaza si particula (b) reactioneaza sau invers. Aceasta terminologie se foloseste fiindca este intuitiva si permite indicarea faptului ca una dintre particule este de interes in problema respectiva.

Datorita faptului ca forta este un vector legat, ea este capabila sa produca un efect de rotatie. Acesta este masurat de *momentul* fortei fata de un punct dat.

Definiţia 2.15 *Fie o forta $\vec{F}$ aplicata in punctul $A(O, \vec{a})$ si un punct $C(O, \vec{c})$. Se numeste momentul fortei fata de punctul C pseudo-vectorul legat*

$$\vec{M}_O = (\vec{a} - \vec{c}) \times \vec{F} \in \hat{E}_3[ML^2T^{-2}] \tag{2.71}$$

al carui punct de aplicatie este C.

Momentul fortei este un pseudo-vector deoarece provine dintr-un produs vectorial. Datorita faptului ca el masoara efectul de rotatie al fortei fata de punctul C se considera ca punctul sau de aplicatie este in acest punct. Daca schimbam punctul fata de care se calculeaza

[8]Exista sisteme cu masa variabila cum ar fi rachetele dar masa acestora variaza exclusiv datorita unor cauze interne.

[9]Despre acest dublu rol al masei s-a discutat foarte mult fara sa se fi ajuns, pana acum, la concluzii definitive, unanim acceptate.

momentul fortei atunci, in general, acesta se modifica. Sa luam, de exemplu, momentul fortei $\vec{F}$ fata de punctul $C'(O, \vec{c}\,')$ translatat fata de C cu $\vec{X}$ astfel incat $\vec{c}\,' = \vec{c} + \vec{X}$. Atunci, in mod evident, gasim un nou moment,

$$\vec{M}_{C'} = (\vec{a} - \vec{c}\,') \times \vec{F} = \vec{M}_C - \vec{X} \times \vec{F}\,, \tag{2.72}$$

care coincide cu $\vec{M}_C$ numai daca vectorii $\vec{X}$ si $\vec{F}$ sunt paraleli. Dar si in acest caz situatia fizica este diferita deoarece punctul de alpicatie al momentului se schimba din C in C'.

Definiţia 2.16 *Perechea* $(\vec{F}, \vec{M}_C)$ *susceptibila sa descrie actiunea unei forte impreuna cu efectul ei de rotatie fata de punctul* C *formeaza* torsorul *fortei* $\vec{F}$ *in acest punct.*

Vom vedea care este importanta torsorului atunci cand vom studia miscarea sistemelor de particule sau a corpurilor rigide care nu mai pot fi asimilate cu puncte materiale, avand miscari de rotatie ale caror efecte nu se mai pot neglija.

2.2.3 Miscare si echilibru in sisteme inertiale

Sa ne reintoarcem la sistemul de N particule aflate in miscare in raport cu un sistemul de referinta considerat, S, pentru care am stabilit ca in mecanica newtoniana forma cea mai generala a ecuatiilor de miscare este (2.70). Acestea sunt adevarate atat in cazul in care sistemul S este inertial cat si atunci cand acesta nu este inertial. Modul cum depind fortele de coordonatele si vitezele particulelor ar trebui sa reflecte nu numai dinamica interna a sistemului de particule dar si natura sistemului de referinta din care este observata aceasta dinamica. De aceea, este important sa stabilim daca exista anumite restrictii in scrierea expresiei generale a ecuatiilor de miscare in sistemele de referinta inertiale.

Vom discuta, mai intai, cazul in care sistemul S este inertial. Atunci sistemul mecanic trebuie sa fie guvernat de legi dinamice care, conform postulatului I, conduc la ecuatii de miscare care au *aceeasi forma* in orice sistem inertial. In aceste conditii, vom demonstra urmatoarea teorema care limiteaza sever posibilitatile de scriere a ecuatiilor de miscare in sisteme inertiale.

Teoremă 2.2 *Intr-un sistem inertial fortele* $\vec{F}^{(a)}$ *sunt independente de timp si depind numai de pozitiile si vitezele relative ale particulelor.*

Demonstraţie: Deoarece ecuatiile de miscare raman aceleasi in orice sistem inertial, ele trebuie sa fie *invariante* la toate transformarile grupului Galilei. Invarianta la translatiile in timp impune ca nici o forta $F^{(a)}$, $a = 1, 2, ...N$, sa nu depinda explicit de timp. Translatiile spatiale si transformarile Galilei, modifica vectorii de pozitie si vitezele particulelor astfel

$$\vec{x}^{(a)} \to \vec{x}^{(a)} + \vec{X} + \vec{V}t \tag{2.73}$$

$$\dot{\vec{x}}^{(a)} \to \dot{\vec{x}}^{(a)} + \vec{V}\,. \tag{2.74}$$

Singura solutie ca expresiile fortelor sa nu se schimbe la aceste transformari este ca ele sa depinda numai de vectorii de pozitie relativi $\vec{r}^{(ab)}$, definiti de (2.66), si de vitezele relative $\dot{\vec{r}}^{(ab)}$. In sfarsit, invarianta la rotatii este asigurata de faptul ca forta si acccleratia sunt vectori. ■

Asadar, in forma lor cea mai generala, ecuatiile de miscare in repere inertiale se scriu astfel

$$m^{(c)}\ddot{\vec{x}}^{(c)} = \vec{F}^{(c)}(\vec{r}^{(ab)}, \dot{\vec{r}}^{(ab)}), \quad c = 1, 2, ..., N, \tag{2.75}$$

intelegand din notatia adoptata ca fortele pot depinde, in principiu, de *toti* vectorii $\vec{r}^{(ab)}$ si $\dot{\vec{r}}^{(ab)}$ pentru care $a, b = 1, 2, ..., N$. Atata vreme cat ecuatiile de miscare au aceeasi forma in orice sistem inertial, este evident ca:

Corolarul 2.1 *Starea de miscare relativa a unui sistem inertial fata de alte sisteme inertiale nu poate fi pusa in evidenta prin experimente facute in acel sistem.*

Sa observam ca in cazul $N = 1$, cand notiunile de pozitie si viteza relativa isi pierd sensul, trebuie sa consideram ca forta care actioneaza asupra particulei este $\vec{F} = \vec{0}$, regasind particula libera in miscare inertiala, rectilinie si uniforma, intr-un univers golit de materie. In acest fel se verifica premizele care au condus la formularea postulatului I si, implicit, coerenta sistemului de postulate adoptat.

O problema aparte este cea a *echilibrului* mecanic. Acesta se poate defini in raport cu fel orice sistem sau reper particular, inetrial sau neinertial, in functie de conjunctura concreta si de sistemul sau subsistemul studiat. In cazul modelului dinamic adoptat aici este de preferat ca incepem prin a defini starea de echilibrul in sistemele de referinta inertiale.

Definiţia 2.17 *Se spune ca un sistem de particule se afla in stare de echilibru daca pozitiile relative ale particulelor nu se modifica in timp. Acestea determina* configuratia *de echilibru a sistemului.*

Pentru a vedea cum se pot gasi configuratiile de echilibru, vom considera sistemul de N particule avand ecuatiile de miscare (2.75). Daca plasam toate particulele in pozitii care corespund configuratiei de echilibru, cu $\vec{r}^{(ab)} = \vec{r}_0^{(ab)}$, si acestea nu au viteze initiale relative unele fata de altele, atunci sistemul trebuie sa ramana in echilibru un timp nedeterminat. Aceasta inseamna ca toate acceleratiile trebuie sa fie nule ceea ce ne conduce la urmatorul rezultat:

Teoremă 2.3 *Configuratia de echilibru fata de un sistem de referinta inertial este o solutie a sistemului de ecuatii vectoriale*

$$\vec{F}^{(c)}(\vec{r}_0^{(ab)}, \vec{0}) = \vec{0}, \quad c = 1, 2, ..., N. \tag{2.76}$$

Acest sistem de ecuatii poate avea solutii sau nu iar in cazul cand are solutii se pune problema stabilitatii echilibrului. Asupra acestor chestiuni vom reveni mai tarziu. Acum ne marginim doar sa mai observam ca daca exista o configuratie de echilibru atunci se poate gasi un sistem inertial fata de care toate particulele sa se afle in repaus relativ. Pozitiile particulelor fata de acest reper se numesc, de obicei, *pozitii de echilibru.*

2.2.4 Miscare in sisteme neinertiale. Forte de inertie

Orice sistem de referinta in care forma ecuatiilor de miscare este diferita de (2.75) nu este un sistem inertial. Reciproca nu este adevarata deoarece se poate intampla ca ecuatiile de miscare sa pastreze aceasta forma si in sisteme neinertiale. Dar, spre deosebire de sistemele inertiale, in cele neinertiale este intotdeauna posibil, cel putin in principiu, ca sa se puna in evidenta miscarea fata de sisteme inertiale doar prin experimente facute in sistemul neinertial. Aceasta se datoreste aparitiei unor forte specifice care apar numai in sistemele (reperele) neinertiale, numite *forte de inertie*.

Definiţia 2.18 *Fortele datorate miscarii accelerate si rotatiei unui reper oarecare fata de un sistem de referinta inertial se numesc forte de inertie.*

Sa vedem cum apar aceste forte daca sistemul nostru mecanic cu N particule este observat intr-un reper *mobil* neinertial $\{O'; \vec{e}_i^{\,\prime}\}$ a carui origine $O'(O, \vec{X})$ are o miscare de translatie oarecare fata de origina reperului inertial $\{O; \vec{e}_i\}$ al sistemului S si se afla in miscare de rotatie data de un vector de rotatie $\vec{\omega}(t)$ fata de acesta. O particula oarecare (b) a sistemului de particule, care satisface o ecuatie de miscare de forma (2.75), va avea fata de reperul mobil vectorul de pozitie $\vec{r}^{(b)} = \vec{x}^{(b)} - \vec{X}$, viteza $\vec{v}^{(b)}$ si accceleratia $\vec{a}^{(b)}$. Atunci din ecuatia (2.62) putem calcula fortele exercitate asupra particulelor in reperul neinertial astfel

$$\vec{F}'^{(b)} = m^{(b)}\vec{a}^{(b)} = \vec{F}^{(b)} - m^{(b)}\vec{A}_t^{(b)} - m^{(b)}\vec{A}_c^{(b)} \,, \tag{2.77}$$

unde $\vec{A}_t^{(b)}$ si $\vec{A}_c^{(b)}$ sunt acceleratiile de transport si respectiv Coriolis ale particulei (b) care conform relatiilor (2.44) si (2.60) sunt

$$\vec{A}_t^{(b)} = \ddot{\vec{X}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}^{(b)} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^{(b)}) \,, \tag{2.78}$$

$$\vec{A}_c^{(b)} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}^{(b)} \,. \tag{2.79}$$

Rezulta ca in reperul mobil asupra particulei actioneaza in afara de forta $\vec{F}^{(b)}$ si doua forte suplimentare reprezentate de ultimii doi termeni din (2.77) care nu sunt altceva decat fortele de inertie datorate miscarii reperului mobil fata de reperul inertial. Se ajunge astfel la urmatorul enunt general (din care omitem indicii):

Propoziţia 2.2 *Fortele de inertie datorate miscarii relative a unui reper neinertial fata de un sistem de referinta inertial sunt* forta de transport $\vec{F}_t = -m\vec{A}_t$ *si* forta Coriolis $\vec{F}_c = -m\vec{A}_c$.

In pofida definitiei lor foarte simple, interpretarea fortelor de inertie poate crea anumite dificultati mai ales atunci cand acestea provin din miscari de rotatie. In cazul simplu cand particula se misca solidar cu reperul in rotatie, datorita faptului ca este *legata* rigid de reper, apare o acceleratie centripeta, asa cum am aratat in exemplul din Sec.2.1.4.. Aceasta genereaza o componenta importanta a fortei de transport si anume forta *centrifuga* $\vec{F}_{cf} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ care actioneaza asupra particulei tinzand sa o rupa din legatura. Pe de alta parte, legatura reactioneaza cu forta *centripeta* $\vec{F}_{cp} = -\vec{F}_{cf}$ care mentine particula pe traiectorie. Este clar ca un observator aflat in reperul in rotatie poate face un experiment simplu prin care sa puna in evidenta faptul ca reperul sau se roteste fata de reperele inertiale. Pentru aceasta este suficient ca sa taie legatura rigida a particulei si sa-i observe traiectoria.

Trebuie sa precizam ca in cazul discutat mai inainte nu intervin forte Coriolis deoarece particula este in repaus fata de reperul aflat in rotatie. Atunci cand particula se misca fata de acest reper problema fortelor de inertie se complica si trebuie tratata cu multa grija datorita efectelor datorate *compunerii* fortelor centrifuga si Coriolis.

Exemplu: **Rotatia aparenta.** O situatie interesanta apare atunci cand observatorul din reperul care se roteste observa o particula libera aflata in *repaus relativ* fata de sistemul inertial considerat fix. Fata de reperul mobil particula va fi in miscare circulara cu viteza $\vec{v} = -\vec{\omega} \times \vec{r}$ (asa cum rezulta din (2.61) unde punem $\dot{\vec{x}} = \vec{0}$ in conditiile in care $\vec{X} = \vec{0}$). Atunci asupra particulei vor actiona forta centrifuga, $\vec{F}_{cf}$, si forta Coriolis

$$\vec{F}_c = -2m\vec{\omega} \times \vec{v} = 2\vec{F}_{cp}\,. \tag{2.80}$$

Astfel se obtine forta totala de inertie $\vec{F}_{cf} + \vec{F}_c = \vec{F}_{cp}$, adica tocmai forta centripeta necesara ca sa mentina particula pe traiectoria circulara fata de reperul mobil. Din acest exemplu care, in anumit sens, este complementar celui anterior, intelegem ca problema efectelor fortelor de inertie nu este intotdeauna triviala. □

In sfarsit, sa notam ca echilibrul poate fi definit si in raport cu un sistem neinertial fata de care o particula ar putea avea *pozitii* de echilibru. In aceasta situatie calculul conditiilor de echilibru implica anularea rezultantei tuturor fortelor care actioneaza asupra particulei, in care trebuiesc incluse si fortele de inertie.

2.2.5 Legea atractiei universale

Respectand primele trei postulate ale mecanicii Galilei-Newton am ajuns la o descriere idealizata in care tratam sistemul de N particule ca si cum s-ar afla singur intr-un spatiu in care nu se mai gasesc alte particule sau corpuri materiale. In pofida acestei idealizari, de altfel necesara pentru a respecta logica constructiei, dinamica obtinuta este suficient de general formulata pentru a permite investigarea miscarii mecanice la orice nivel. Mai ramane de gasit mecanismul *natural* care pune acest sistem in miscare. Acesta a fost descoperit de Newton si este *atractia universala* sau gravitatia newtoniana.

Postulatul IV: *Intre orice doua particule se exercita o forta de atractie proportionala cu produsul maselor lor si invers proportionala cu patratul distantei dintre particule.*

Pentru a da o formulare matematica acestui postulat vom considera doua particule, (a) si (b), avand masele $m^{(a)}$ si $m^{(b)}$, a caror pozitie relativa este data de vectorul de pozitie $\vec{r}^{(ab)}$. Apoi vom nota cu $\vec{F}^{(ab)}$ forta de atractie cu care actioneaza particula (b) asupra particulei (a) si cu $\vec{F}^{(ba)} = -\vec{F}^{(ab)}$ forta de reactiune a particulei (a) asupra particulei (b). Atunci putem scrie expresia fortelor de atractie universala astfel

$$\vec{F}^{(ab)} = -\vec{F}^{(ba)} = -Gm^{(a)}m^{(b)}\frac{\vec{r}^{(ab)}}{|\vec{r}^{(ab)}|^3} = -Gm^{(a)}m^{(b)}\frac{\vec{x}^{(a)} - \vec{x}^{(b)}}{|\vec{x}^{(a)} - \vec{x}^{(b)}|^3}\,. \tag{2.81}$$

unde $G \in [M^{-1}L^3T^{-2}]$ este o constanta universala numita *constanta atractiei universale* a carei valoare in SI este $G = 6,673\,10^{-11}\mathrm{m}^3/\mathrm{kg\,s}^2$.

In cazul sistemului de N particule considerat, fiecare particula va fi atrasa de celelalte pe care le va atrage la randul ei. Deci asupra fiecarei particule se vor exercita $N-1$ forte de atractie care, conform principiului independentei actiunii fortelor, vor da rezultanta fortelor de atractie universala care actioneaza asupra particulelor. Pentru orice particula (a) din sistem aceasta rezultanta se scrie astfel

$$\vec{F}^{(a)}(\vec{r}^{(ab)}) = -Gm^{(a)}\sum_{b\neq a} m^{(b)}\frac{\vec{r}^{(ab)}}{|\vec{r}^{(ab)}|^3} = -Gm^{(a)}\sum_{b\neq a} m^{(b)}\frac{\vec{x}^{(a)}-\vec{x}^{(b)}}{|\vec{x}^{(a)}-\vec{x}^{(b)}|^3}\,. \tag{2.82}$$

unde suma se face pentru toate valorile lui b diferite de a. Introducand aceste expresii in ecuatiile (2.75) se obtin ecuatiile de miscare

$$\ddot{\vec{x}}^{(a)} = -G\sum_{b\neq a} m^{(b)}\frac{\vec{x}^{(a)}-\vec{x}^{(b)}}{|\vec{x}^{(a)}-\vec{x}^{(b)}|^3}\,,\quad a = 1,2,...,N\,, \tag{2.83}$$

care guverneaza sistemul de particule in interactiune *exclusiv* gravitationala.

Definiţia 2.19 *Problema determinarii traiectoriilor particulelor avand ecuatiile de miscare* (2.83) *se numeste* Problema celor N corpuri.

Tot ce mai ramane de facut este rezolvarea ei pentru sisteme cat mai complexe. Vom vedea in urmatorul capitol ca problema celor doua corpuri poate fi complet rezolvata [10].

Daca pe langa sistemul nostru de N particule mai aducem o particula de masa m in punctul $P(O,\vec{x})$ atunci, conform (2.82) asupra ei se va exercita forta

$$\vec{F}(\vec{x}) = m\vec{g}(\vec{x}) \tag{2.84}$$

unde am notat cu

$$\vec{g}(\vec{x}) = -G\sum_{b} m^{(b)}\frac{\vec{x}-\vec{x}^{(b)}}{|\vec{x}-\vec{x}^{(b)}|^3}\,. \tag{2.85}$$

marimea vectoriala care ne arata ca fortele de atractie universala se pot exercita in orice punct din spatiu.

Definiţia 2.20 *Campul de vectori $\vec{g} : E_3[L] \to E_3[LT^{-2}]$, care produce fortele de atractie universala, defineste in fiecare punct din spatiu intensitatea campului gravitational sau accceleratia gravitationala $\vec{g}(\vec{x})$. Sistemul de corpuri care produce campul gravitational se numeste* sursa *acestuia.*

Expresia intensitatii campului gravitational produs de cele N particule data de relatia (2.85) este suficient de generala pentru a permite calculul oricarui camp gravitational produs de un sistem discret. In plus ea poate fi generalizata imediat pentru cazul cand sursele gravitationale sunt corpuri continue.

[10] Problema celor trei corpuri a furnizat surpriza unei noi solutii stationare care a fost descoperita de abia in anul 1999.

Pentru investigarea experimentala a campurilor gravitationale se folosesc particule, corpuri sau diverse sisteme cu dimensiuni si mase foarte mici in raport cu dimensiunile si masele surselor gravitationale. Acestea se numesc particule *test* si se considera ca miscarea lor in campul gravitational investigat nu il modifica intr-un mod sesizabil din punct de vedere experimental, ca urmare a reactiunilor. Sondele spatiale joaca un asemenea rol in studiul campurilor gravitationale din sistemul planetar.

In final sa observam ca atat fortele gravitationale cat si fortele de inertie sunt produse de campuri de acceleratii care *cupleaza* masele in cele doua ipostaze ale lor: campurile de acceleratii gravitationale, $\vec{g}(\vec{x})$, cupleaza masa in calitate de masa gravitationala in timp ce campurile de acceleratii datorate miscarii relative, $\vec{A}_t$ si $\vec{A}_c$, cupleaza masa inerta. Asa cum am mentionat, aici acceptam fara rezerve principiul echivalentei conform caruia masa inerta si masa gravitationala sunt echivalente. De accea, vom considera ca, din punct de vedere al efectului fizic, si campurile de acceleratii sunt echivalente cu campurile gravitationale. Cu alte cuvinte nu vom accepta punctul de vedere conform caruia fortele de atractie universala si fortele de inertie sunt de naturi diferite.

Capitolul 3

Dinamica sistemelor

3.1 Miscarea particulei in camp extern

3.1.1 Problema miscarii in camp extern

In foarte multe probleme concrete de mecanica se studiaza miscari a caror cauza implica forte generate prin *contactul direct* dintre particule sau dintre particule si corpuri extinse. In esenta aici se intalnesc cateva cazuri care modeleaza in mod satisfacator situatii reale destul de complexe dintre care, din ratiuni practice, majoritatea au loc pe pamant. Principalele tipuri de forte care intervin in astfel de probleme sunt:

1. Forte active, forte motrice;

2. Fortele de reactiune care inlocuiesc legaturile (sprijin, articulari, legaturi prin fie, etc.);

3. Fortele de frecare.

Formularea unei probleme dinamice corecte pentru o anumita particula presupune *separarea* ei din legaturi care se inlocuiesc cu reactiuni, stabilirea *constrangerilor cinematice* corespunzatoare legaturilor, care stabilesc numarul de grade de libertate ramas, si calculul rezultantei fortelor active si de frecare pe gradele de libertate admise. Aceasta metoda bine cunoscuta sub numele de *metoda separarii corpurilor*, genereaza probleme cu unul sau doua grade de libertate pentru fiecare particula a sistemului. Aplicand principiile mecanicii, pentru fiecare grad de libertate se obtine cate o ecuatie de miscare scalara de forma $m\ddot{x} = F$ unde F va fi o functie de coordonatele si componentele vitezelor corespunzatoare gradelor de libertate ale problemei.

Pe pamant, asupra particulelor actioneaza forte exterioare care nu provin dintr-un contact nemijlocit cu alte corpuri, cum ar fi fortele de greutate si fortele de inertie produse de rotatia pamantului. De asemenea exista si forte datorate altor tipuri de campuri ca, de exemplu, cel electromagnetic. In general, se considera ca orice forta care se exercita de la distanta este efectul unui camp produs de un anumit sistem de corpuri care poarta numele de *surse* ale campului respectiv. Acestea fac ca in fiecare punct din spatiu sa apara cate un camp fizic (reprezentat de o marime scalara, vectoriala sau tensoriala) care, atunci cand particula trece prin acel punct, produc o forta. Ca si in cazul campului gravitational, particula se cupleaza cu aceste campuri care produc forte dependente de punct dar care pot depinde si de timp. In cazul in care campurile sunt independente de timp se spune ca sunt *statice*, iar daca in anumite domenii spatiale campul ramane acelasi se spune ca in acel domeniu el este *omogen.*

Exemplu: **Campul static omogen** este bine aproximat de campul electric dintre placile unui condensator plan, de suprafata foarte mare, incarcat in regim static. □

Conform postulatului III, daca sursele exercita o actiune asupra particulei, prin intermediul campurilor, atunci si particula trebuie sa exercita o actiune reciproca asupra surselor. Dar daca particula este suficient de mica in raport cu sursele campurilor se poate presupune ca aceasta reactiune este *neglijabila.* Se ajunge astfel la urmatoarea definitie:

Definiţia 3.1 *Se numeste miscare in camp extern miscarea unei particule fata de un reper solidar cu sursele unor campuri care nu sunt influentate de miscarea particulei.*

In general, reperele solidare cu sursele unor campuri nu sunt repere inertiale. De altfel, aceasta proprietate nici nu mai este relevanta atata vreme cat prin aproximatia facuta neglijam efectele datorate postulatului III.

Sub aspect matematic, campurile externe sunt campuri de scalari vectori sau tensori a caror componente sunt definite ca functii de punct si de timp. De exemplu, in reperul $\{O; \vec{e}_i\}$, un camp vectorial $\vec{\mathcal{E}}$ de dimensiune fizica D avand in punctul $P(O, \vec{x})$ componentele $\mathcal{E}_i(t, \vec{x})$ poate cupla o particula prin intermediul *constantei de cuplaj* k producand forta $\vec{F}(t, \vec{x}) = k\vec{\mathcal{E}}(t, \vec{x})$ la momentul t cand particula trece prin punctul P. Pentru ca forta sa aiba dimensiuni fizice corecte trebuie ca dimensiunea fizica a constantei de cuplaj sa fie $MLT^{-2}D^{-1}$. Evident, in cazul de un camp gravitational constanta de cuplaj este chiar masa particulei. Daca forta nu depinde de viteze vom vorbi in mod direct despre *campuri de forte* fara a ne opri prea mult asupra cauzelor lor daca acestea nu sunt de natura exclusiv mecanica.

Fortele dependente de viteze apar numai daca exista campuri speciale care cupleaza viteza ca, de exemplu, campuri tensoriale de rangul doi avand componente $\mathcal{G}_{ij}(t, \vec{x})$ capabile sa produca forte cu componente $F'_i(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}) = k'\mathcal{G}_{ij}(t, \vec{x})\dot{x}_j$. Desigur, pot exista si alte tipuri de cuplaje intre campuri tensoriale de rang mai inalt si un numar corespunzator de componente ale vitezei. Forma generala a unei forte produsa de astfel de campuri este

$$F_i(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}) = k\mathcal{E}_i(t, \vec{x}) + k'\mathcal{G}_{ij}(t, \vec{x})\dot{x}_j + k''\mathcal{H}_{ijk}(t, \vec{x})\dot{x}_j\dot{x}_k + \cdots \tag{3.1}$$

Exemplu: **Forta Lorentz.** Cazul cel mai cunoscut de camp care cupleaza viteza este cel al campului magnetic de inductie $\vec{B}$ care produce forta Lorentz

$$\vec{F}_L = q\dot{\vec{x}} \times \vec{B} \tag{3.2}$$

unde constanta de cuplaj este sarcina particulei, q. □

In cele ce urmeaza vom studia problema integrarii ecuatiilor de miscare ale unei particule aflata in miscare tridimensionala, fara legaturi, in campuri externe, urmand ca apoi sa revenim la probleme uni- sau bidimensionale pe care le vom trata ca pe niste cazuri particulare. Argumentele prezentate ne conduc la concluzia ca, in reperul preferential $\{O; \vec{e}_i\}$ legat de sursele campurilor externe care produc *forta rezultanta* (3.1), ecuatia de miscare newtoniana a unei particule de masa m este

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}})\,. \tag{3.3}$$

Deoarece reperul ales nu este inertial ecuatia de miscare nu mai are forma (2.75), dar are expresia cea mai simpla posibila care descompusa pe componente in baza $\{\vec{e}_i\}$ ne conduce la sistemul de trei *ecuatii diferentiale* de ordinul doi,

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= F_1(t, x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) \\ m\ddot{x}_2 &= F_2(t, x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) \\ m\ddot{x}_3 &= F_3(t, x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)\,, \end{aligned} \tag{3.4}$$

corespunzatoare celor trei grade de libertate ale particulei. Solutia acestui sistem trebuie sa fie chiar coordonatele carteziene ale particulei, $x_i = x_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ in reperul considerat. Ele vor fi trei functii de timp ce vor determina traiectoria particulei, $\vec{x}(t) = x_i(t)\vec{e}_i$.

3.1.2 Conditii initiale si integrale prime

Din punct de vedere matematic problema este corect formulata. In teoria ecuatiilor diferentiale se demonstreaza [1] ca daca se dau functiile F_i, cu proprietati convenabile, atunci sistemul admite solutii care depind de 6 constante arbitrare, $c_1, c_2, ..., c_6$, numite *constante de integrare*. In principiu, solutiile sunt functii de timp si de constantele de integrare,

$$x_i = x_i(t, c_1, c_2, ..., c_6)\,, \quad i = 1, 2, 3\,. \tag{3.5}$$

Lasand pentru mai tarziu o discutie detaliata a proprietatilor de derivabilitate si continuitate a acestor functii, ne marginim sa precizam ca ratiuni fizice evidente impun ca aceste functii sa fie cel putin o data derivabile in raport cu timpul, pentru a avea definita viteza in fiecare punct al traiectoriei. La randul lor, componentele vitezei, $\dot{x}_i(t, c_1, ..., c_6)$, trebuie sa fie functii de timp cel putin continue peste tot si derivabile pe portiuni. In momentele in care componentele vitezei nu sunt derivabile se considera ca acceleratia face salturi datorate unor *socuri* generate de discontinuitati ale campurilor si implicit ale componentelor fortei rezultante $\vec{F}$.

Constantele de integrare se pot fixa prin mai multe metode in functie de semnificatia fizica pe care dorim sa le-o atribuim. Metoda cea mai simpla consta in fixarea *conditiilor initiale*. Pentru aceasta se alege un moment t_0, numit moment initial, la care se dau *pozitia initiala*, prin vectorul de pozitie $\vec{x}_0$, si *viteza initiala*, $\vec{v}_0$. Atunci prin rezolvarea sistemului de 6 ecuatii

$$x_i(t_0, c_1, c_2, ..., c_6) = x_{0i} \tag{3.6}$$

$$\dot{x}_i(t_0, c_1, c_2, ..., c_6) = v_{0i} \tag{3.7}$$

putem determina, in principiu, constantele de integrare corespunzatoare traiectoriei respective. Se poate arata ca o traiectorie este in mod univoc determinata prin conditiile initiale. De aceea, atunci cand se doresc precizate toate detaliile traiectoria se scrie in forma definitiva astfel

$$\vec{x} = \vec{x}(t, t_0, \vec{x}_0, \vec{v}_0)\,, \tag{3.8}$$

dar, de obicei, se foloseste notatia simpla $\vec{x}(t)$ subantelegandu-se dependenta de conditiile initiale. In sfarsit, sa mai notam ca acestea pot fi alese, in general, fara restrictii astfel incat

[1] Prin teorema lui Peano

prin punctul initial $P(O, \vec{x}_0)$ pot trece traiectorii ale pariculelor avand *orice* viteza initiala $\vec{v}_0 \in E_3[LT^{-1}]$. Problema determinarii solutiei sistemului (3.4) cand se dau conditiile initiale se numeste *problema Cauchy.*

O alta posibilitate de a determina constantele de integrare este cu ajutorul unor marimi fizice care raman constante in timpul miscarii numite *integrale prime.* Acestea se definesc astfel:

Definiţia 3.2 *Fie o particula a carei traiectorie $\vec{x}(t)$ este solutie a sistemului de ecuatii* (3.4). *O functie $f[t, \vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t)]$ a carei valoare ramane constanta in timpul parcurgerii traiectoriei se numeste integrala prima a sistemului considerat.*

Valoarea constanta a integralei prime depinde de traiectoria aleasa care, la randul ei, este complet determinata de conditiile initiale. Pentru traiectoria (3.8) valoarea integralei prime f se calculeaza astfel

$$f(t_0, \vec{x}_0, \vec{v}_0)\,. \tag{3.9}$$

Problema se poate pune si invers, adica daca se cunosc un numar de integrale prime independente intre ele acestea pot suplini rolul uneia sau mai multora dintre ecuatiile (3.6) si (3.7) care ne dau constantele de integrare in functie de conditiile initiale. Se poate ajunge astfel chiar si in situatii in care toate constantele de integrare sa fie determinate numai cu ajutorul unor integrale prime daca exista cel putin 6 care sa fie independente intre ele. Vom reveni asupra acestei chestiuni in cadrul mecanicii analitice unde vom putea da o definitie clara a dependentei dintre integralele prime ale unui sistem de ecuatii diferentiale. Intre timp, vom folosi integralele prime in probleme mai simple, unidimensionale sau bidimensionale, deoarece acestea reprezinta marimi *conservate* pe traiectorie, carora li se poate atribui o semnificatie fizica precisa.

3.1.3 Teoreme generale

Actiunea torsorului unei fortei asupra unei particule este descrisa comod cu ajutorul a doua marimi cinematice adecvate, impulsul si momentul cinetic, care vor joaca un rol central nu numai in mecanica ci si in toate celelalte domenii ale fizicii. Vom defini aceste marimi in sistemul de referinta fix, avand reperul $\{O; \vec{e}_i\}$, fata de care particula de masa m are traiectoria $\vec{x}(t)$.

Definiţia 3.3 *Vectorul $\vec{p}(t) = m\dot{\vec{x}}(t) \in E_3[MLT^{-1}]$ este impulsul particulei la momentul t. Se numeste moment cinetic al particulei fata de punctul fix $C(O, \vec{x}_C)$ pseudo-vectorul legat*

$$\vec{L}_C(t) = [\vec{x}(t) - \vec{x}_C] \times \vec{p}(t) \in \hat{E}_3[ML^2T^{-2}] \tag{3.10}$$

avand punctul de aplicatie in C.

Datorita faptului ca masa nu se modifica sub actiunea fortelor exterioare, principiul dinamic fundamental reprezentat de ecuatia (3.3) poate fi reformulat astfel

Teoremă 3.1 *Rezultanta $\vec{F}$ a tuturor fortele care actioneaza asupra particulei produce variatia in timp a impulsului,*

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}(t, \vec{x}, \vec{p})\,. \tag{3.11}$$

Aceasta este versiunea *teoremei impulsului* in cazul simplu al miscarii unei singure particule. Efectul de rotatie al rezultantei fortelor care actioneaza asupra particulei este pus in evidenta de *teorema momentului cinetic* care se enunta astfel:

Teoremă 3.2 *Variatia in timp a momentului cinetic fata de un punct fix C este produsa de momentul fortei rezultante fata de acel punct,*

$$\dot{\vec{L}}_C = \vec{M}_C\,, \quad \vec{M}_C = (\vec{x} - \vec{x}_C) \times \vec{F}(t, \vec{x}, \vec{p})\,. \tag{3.12}$$

Demonstraţie: Deoarece $\vec{x}_C$ este constant, derivata momentului cinetic este $\dot{\vec{L}}_C = m[\dot{\vec{x}} \times \dot{\vec{x}} + (\vec{x} - \vec{x}_C) \times \ddot{\vec{x}}]$. Cum primul ei termen se anuleaza, rezulta ca ea este chiar marimea care se obtine prin inmultirea vectoriala a ecuatiei (3.3) cu $\vec{x} - \vec{x}_C$. ■

Exemplu: **Integrale prime in miscarea rectilinie si uniforma.** Daca $\vec{F} = \vec{0}$ atunci miscarea este rectilinie si uniforma, avand traiectoria (2.14), iar impulsul este *conservat*, $\vec{p} = m\vec{v}_0$ =const., componentele sale reprezentand trei integrale prime ale miscarii. Deoarece si momentul fortei este nul, sa va conserva si momentul cinetic calculat fata de orice punct. Sa alegem acest punct chiar originea reperului ($C = O$ implicand $\vec{x}_C = \vec{0}$). Atunci cele trei componente constante ale lui $\vec{L}_O$ reprezinta alte trei integrale prime ale miscarii legate de conditiile initiale prin ecuatia vectoriala

$$\vec{L}_O(t) = \vec{L}_O(t_0) = m\vec{x}_0 \times \vec{v}_0\,. \tag{3.13}$$

De aici este doar o problema de calcul ca sa inlocuim o parte dintre conditiile initiale cu valori ale acestor integralelor prime ale miscarii. Daca $\vec{x}_0$ si $\vec{v}_0 \neq \vec{0}$ sunt ortogonali atunci conditiile initiale pot fi inlocuite complet de catre integralele prime. Intr-adevar, inmultind vectorial (3.13) cu $\vec{p}$ se obtine

$$\vec{x}_0 = \frac{1}{\vec{p}^2}\,\vec{p} \times \vec{L}_O\,, \quad \vec{v}_0 = \frac{1}{m}\,\vec{p}\,. \tag{3.14}$$

Desigur aceaste relatii isi pierd sensul daca particula este in repaus relativ fata de reperul nostru deoarece atunci atat $\vec{p}$ cat si $\vec{L}_0$ se anuleaza. □

Din exemplul analizat rezulta ca impulsul se conserva numai daca miscarea este rectilinie si uniforma. In acest caz se conserva si momentul cinetic fata de *orice* punct. Dar exista si situatii cand momentului cinetic calculat fata de un anumit punct C se conserva datorita faptului ca momentul fortei fata de acel punct se anuleaza de-a lungul intregii traiectorii, $\vec{M}_C = \vec{0}$, fara ca rezultanta fortelor sa se anuleze.

Teoremă 3.3 *Daca momentul cinetic fata de un punct se conserva in lungul traiectoriei atunci traiectoria este* plana.

Demonstraţie: Deoarece $\vec{M}_C = 0$ din (3.2) rezulta ca $\vec{L}_C$ =const. atat ca marime cat si ca directie si sens. In consecinta, vectorul de pozitie relatv $\vec{r} = \vec{x} - \vec{r}_C$ (al punctului $P(O, \vec{x})$ de pe traiectorie fata de punctul fix C) ramane tot timpul perpendicular pe $\vec{L}_C$. Deci traiectoria se va gasi in planul care trece prin punctul C si este perpendicular pe $\vec{L}_C$. ■

Energia este una dintre cele mai importante marimi fizice iar conservarea ei este cruciala in cele mai variate si complexe procese fizice. Primul pas in intelegerea semnificatiei acestei marimi este definirea energiei cinetice care rezulta in mod natural din calculul lucrului mecanic efectuat de rezultanta fortelor care actioneaza asupra unei particule in timpul deplasarii ei pe traiectorie.

Definiţia 3.4 *Se numeste putere marimea scalara* $P = \vec{F} \cdot \dot{\vec{x}} \in [ML^2T^{-3}]$ *calculata pe traiectorie la un moment dat, t. Lucrul mecanic efectuat de rezultanta fortelor* $\vec{F}$ *intre momentele* t_1 *si* t_2 *se defineste ca*

$$W(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} P(t)dt \in [ML^2T^{-2}]. \tag{3.15}$$

Puterea este nula pe portiunile de traiectorie unde forta si viteza sunt perpendiculare si deci pe acele portiuni fortele nu efectueaza lucru mecanic.

Exemplu: **Efectul fortei Lorentz.** Sa notam ca forta Lorentz (3.2) reprezinta un tip special de cuplaj care nu produce lucru mecanic deoarece forta ramane tot timpul perpendiculara pe traiectorie, $\dot{\vec{x}} \cdot \vec{F}_L = 0$. Ea joaca doar rolul unei forte centripete care curbeaza traiectoria fara sa accelereze particula in lungul traiectoriei. □

Din ecuatia (3.3) vedem ca puterea,

$$P = \dot{x}_i F_i = m\dot{x}_i \ddot{x}_i = \dot{T}, \tag{3.16}$$

este *derivata* in raport cu timpul a functiei $T(t)$ definita astfel:

Definiţia 3.5 *Se numeste* energie cinetica *a particulei marimea*

$$T(t) = \frac{1}{2} m\dot{x}_i(t)\dot{x}_i(t) = \frac{1}{2} m [\dot{\vec{x}}(t)]^2 \in [ML^2T^{-2}] \tag{3.17}$$

Aceasta este o *functie de stare* deoarece depinde numai de viteza particulei la un moment dat indiferent cum a fost accelerata particula pana sa atinga aceasta viteza. Relatia (3.16) ne permite sa rezolvam integrala (3.15) ajungand astfel la urmatotul enunt care poarta numele de teorema *energiei cinetice*:

Teoremă 3.4 *Lucrul mecanic efectuat de rezultanta fortelor in miscarea unei particule pe traiectorie intre momentele* t_1 *si* t_2 *este*

$$W(t_1, t_2) = T(t_2) - T(t_1) \tag{3.18}$$

O consecinta imediata este interpretarea energiei cinetice ca lucrul mecanic necesar pentru a accelera o particula de la viteza $\vec{0}$ pana la viteza $\dot{\vec{x}}$. Sa remarcam ca lucrul mecanic (3.18) depinde in mod esential de traiectoria parcurasa intre momentele t_1 si t_2 sau, cu alte cuvinte, de conditiile initiale care determina aceasta traiectorie.

3.1.4 Campuri conservative

O clasa importanta de sisteme mecanice sunt sistemele *conservative* care admit o integrala prima reprezentand energia totala a sistemului. Cele mai simple sisteme conservative sunt cele in care o particula se misca in campuri externe care permit conservarea energiei. In continuare ne vom ocupa numai de aceste sisteme urmand ca mai tarziu sa studiem sisteme conservative mai complicate, cu un numar mai mare de constiuenti si de grade de libertate.

Exista campuri vectoriale particulare ale caror componente sunt derivatele partiale in raport cu cooordonatele (notate prin ∂_i) ale unor functii scalare numite *potentiale*.

Definiţia 3.6 *Se numeste camp potential campul $\vec{\mathcal{E}}(t,\vec{x})$ avand componentele definite cu ajutorul potentialului $\phi(t,\vec{x})$ astfel*

$$\mathcal{E}_i(t,\vec{x}) = -\partial_i\phi(t,\vec{x})\,. \tag{3.19}$$

Atunci cand nu dorim sa lucram pe componente, se foloseste operatorul *nabla*, definit in sistemul de referinta $S(O;\vec{e}_i;t)$ astfel

$$\nabla = \vec{e}_i\partial_i = \vec{e}_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{e}_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{e}_3\frac{\partial}{\partial x_3}\,, \tag{3.20}$$

cu ajutorul caruia putem scrie formele echivalente

$$\vec{\mathcal{E}} = -\nabla\phi \equiv -\mathrm{grad}\,\phi\,. \tag{3.21}$$

Un camp potential cuplat cu o particula prin constanta de cuplaj k produce forta $\vec{F} = k\vec{\mathcal{E}}$ care poate aparea in orice punct din spatiu in care s-ar afla particula. De aceea se spune ca $\vec{F}$ este un *camp de forte potential* ale carui componente $F_i = -\partial_i V$ sunt definite cu ajutorul *potentialului mecanic* $V = k\phi$. Campul de forte potential $\vec{F} = -\nabla V$ depinde de timp numai daca potentialul V depinde de timp.

Definiţia 3.7 *Daca functia V nu depinde de timp atunci ea se numeste* energie potentiala *iar campul de forte potential corespunzator se numeste* camp conservativ*.*

Aceasta denumire se datoreste urmatoarei proprietati:

Teoremă 3.5 *Ecuatiile de miscare ale unei particule aflata intr-un camp de forte conservativ admit integrala prima*

$$E = T(t) + V[\vec{x}(t)] = \mathrm{const.} \tag{3.22}$$

in care marimea conservata E se numeste energia totala *a particulei.*

Demonstraţie: Pornind cu observatia ca pe traiectorie avem

$$\dot{V}[\vec{x}(t)] = \partial_i V[\vec{x}(t)]\dot{x}_i(t)\,, \tag{3.23}$$

deducem din (3.16) si ecuatiile de miscare scrise pe componente, $m\ddot{x}_i = -\partial_i V$, ca $P = \dot{T} = -\dot{V}$. Ajungem la concluzia ca $\dot{T} + \dot{V} = 0$ adica $T + V =$const. ∎

Valoarea energiei totale depinde de traiectorie si, implicit, de conditiile initiale care o determina. Daca la momentul initial t_0 particula se afla in punctul initial $M(O,\vec{x}_0)$ si are viteza initiala $\vec{v}_0$ atunci energia totala este

$$E = \frac{1}{2}m\vec{v}_0^2 + V(\vec{x}_0)\,. \tag{3.24}$$

Valoarea ei poate suplini una dintre cele 6 conditii initiale.

Exemplu: **Miscarea uniform accelerata.** In acest caz forta constanta $\vec{F}$ este derivata din energia potentiala $V(\vec{x}) = -\vec{x}\cdot\vec{F} + C = -x_iF_i + C$ unde C este o constanta arbitrara. Ecuatia de miscare $m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}$ care da ecuatia traiectoriei,

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}_0(t-t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t-t_0)^2\,, \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}\,, \tag{3.25}$$

admite integrala prima a energiei

$$E = \frac{m}{2}(\dot{\vec{x}})^2 - \vec{x}\cdot\vec{F} + C\,. \tag{3.26}$$

Daca se exprima energia totala in functie conditiile initiale prin (3.24) se obtine usor formula Galilei

$$\dot{\vec{x}}^2 = \vec{v}_0^2 + 2\vec{a}\cdot(\vec{x}-\vec{x}_0)\,. \tag{3.27}$$

□

Energia cinetica este pozitiv definita si se anuleaza doar in punctele in care $\dot{\vec{x}} = \vec{0}$, adica in punctele in care toate componentele acceleratiei au cate un extrem. Aceasta inseamna ca pentru o valoare data a energiei totale domeniul spatial in care are loc miscarea este cel al tuturor punctelor $P(O,\vec{x})$ pentru care este indeplinita conditia $E - V(\vec{x}) \ge 0$. Acesta poate fi tot spatiul sau un anumit domeniu al sau, in functie de forma functiei $V(\vec{x})$. Daca exista valori ale energiei pentru care domeniul care contine traiectoria este marginit atunci se spune ca suntem in prezenta unei *gropi de potential.* In cazul in care energia potentiala are un minim absolut in punctul $M(O,\vec{x}_0)$ atunci valoarea minima *posibila* a energiei este egala cu valoarea minima a energiei potentiale, $E_{min} = V(\vec{x}_0)$. Particula cu aceasta energie ramane fixata in punctul M, care reprezinta o pozitie de *echilibru stabil.*

Celelalte pozitii de echilibru trebuiesc calculate din conditiile generale care aplicate in cazul nostru ne conduc la urmatorul rezultat:

Propoziţia 3.1 *Intr-un sistem conservativ pozitiile de echilibru se afla in punctele in care energia potentiala $V(\vec{x})$ are extreme relative.*

Demonstraţie: In sistemele conservative fortele nu depind de viteze si de aceea conditiile de echilibru se reduc la $F_i = -\partial_i V = 0$, $(i = 1,2,3)$ care ne dau trei ecuatii a caror solutii sunt coordonatele carteziene ale punctelor unde functia V admite extreme relative. ■
Am vazut ca daca este vorba de minimul absolut a lui V atunci pozitia de echilibru este stabila. Nu vom discuta in detaliu aceasta problema limitandu-ne la a nota ca minimele relative sunt considerate pozitii de echilibru stabil in timp ce maximele relative sunt pozitii de echilibtu *instabil.*

O caracteristica importanta a fizicii nerelativiste sau Galilei relativiste este inexistenta unei scale a energiei. Aceasta se datoreste faptului ca energia potentiala ramane nedeterminata pana la o constanta aditiva arbitrara care nu are semnificatie fizica. Intr-adevar daca adaugam functiei V o constanta V_0, componentele fortei $F_i = -\partial_i V$ nu se modifica. De aceea si energia totala ramane nedeterminata pana la o constanta (dar in asa fel incat $E - V$ sa nu se schimbe daca nu se modifica energia cinetica). Daca la aceasta observatie adaugam si faptul ca energia cinetica, find functie numai de viteza, isi scimba valoarea daca facem o transformare Galilei, deducem ca, si in cazul fericit cand am fi putut folosi doar repere inertiale, ar fi trebuit sa acceptam ca fiecare observator este indreptatit sa-si aleaga propria sa scala de energii in reperul din care face observatia [2].

[2] In relativitatea restransa a lui Einstein energia impreuna cu impulsul au reguli de transformare precise cand se trece de la un reper inertial la altul.

3.1.5 Probleme unidimensionale

In problemele unidimensionale particula are un sigur grad de libertate putandu-se misca doar in lungul unei directii. Atunci traiectoria fiind rectilinie, pozitia sa este data de coordonata $x \in [L]$. Ecuatia de miscare are forma

$$m\ddot{x} = F(t, x, \dot{x}) \tag{3.28}$$

si in multe cazuri se poate integra prin mijloace elementare avand solutia complet determinata doar de doua constante de integrare reprezentand pozitia si viteza initiala, x_0 si respectiv v_0.

Sisteme conservative

O clasa importanta de sisteme sunt cele care au forte date de campuri statice, independente de t si $\dot{x}$, deoarece:

Propoziţia 3.2 *Orice sistem unidimensional a carui forta depinde numai de pozitia particulei este un sistem* conservativ.

Demonstraţie: Energia potentiala este

$$V(x) = -\int F(x)dx + C\,, \tag{3.29}$$

astfel incat $F(x) = -V'(x)$ (unde cu $'$ am notat derivata in raport cu x), ceea ce inseamna ca sistemul este conservativ. ■
In consecinta, exista integrala prima a energiei,

$$\frac{m}{2}(\dot{x})^2 + V(x) = E \tag{3.30}$$

care permite integrarea imediata a ecuatiei de miscare. Intr-adevar, daca notam cu $t = h(x)$ functia inversa a functiei $x(t)$ atunci putem scoate din (3.30) derivata ei $h' = 1/\dot{x}$ care ne da prin integrare

$$t = h(x) = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} + t_0\,, \tag{3.31}$$

unde t_0 este constanta de integrare. In toate problemele in care aceasta integrala se poate rezolva obtinem imediat functia $t = h(x)$ si de aici traiectoria $x = x(t)$. De obicei, daca problema se poate rezolva pe aceasta cale se poate rezolva si prin inegrarea directa a ecuatiei de miscare.

Exemplu: **Oscilatorul armonic unidimensional.** Sa consideram o particula sub actiunea unui camp de forte elastice $F(x) = -kx$ unde k este constanta elastica a resortului care produce acest camp. Atunci ecuatia de miscare $m\ddot{x} = -kx$ se poate scrie cu ajutorul *pulsatiei proprii* [3] a oscilarorului $\omega = \sqrt{k/m}$ astfel

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{3.32}$$

[3] In literatura se foloseste deseori termenul de frecventa in loc de pulsatie. In acest caz deosebirea ditre frecventa propriuzisa, ν, si pulsatia $\omega = 2\pi\nu$ rezulta din context.

ceea ce reprezinta o ecuatie diferentiala liniara cu coeficienti constanti. Pentru rezolvarea acestui tip de ecuatii se cauta intotdeauna solutii *particulare* de forma $\exp(\alpha t)$ care inlocuite in ecuatie ne conduce la o ecuatie algebrica pentru α, numita *ecuatie caracteristica*. In cazul nostru aceasta este $\alpha^2 + \omega^2 = 0$ si deci $\alpha = \pm i\omega$. Rezulta forma generala a traiectoriei

$$x = A\sin(\omega t + \delta) \tag{3.33}$$

in functie de constantele de integrare A, numita *amplitudine*, si δ, legata de *faza initiala* $\delta_0 = \omega t_0 + \delta$. Acestea se determina din conditiile initiale la $t = t_0$,

$$x(t_0) = A\sin(\omega t_0 + \delta) = x_0 \,, \quad \dot{x}(t_0) = A\omega\cos(\omega t_0 + \delta) = v_0 \,. \tag{3.34}$$

Campul de forte elastice este conservativ. Energia potentiala rezulta din (3.29) este $V(x) = kx^2/2 + C$ iar energia totala

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2 + C = \frac{k}{2}A^2 + C \tag{3.35}$$

se conserva. Scala energiei se defineste prin alegerea constantei C care, de obicei, se ia $C = 0$. Nu este greu de aratat ca aceleasi rezultate se pot obtine calculand integrala (3.31) si inversand functia $h(x)$. $\Box$

Sisteme neconservative

In general, forta poate depinde nu numai de coordonata dar si de viteze si timp. In acest caz sistemul nu mai este conservativ si nu mai exista integrala prima a energiei care sa suplineasca rolul ecuatiei de miscare. Astfel, ecuatia de miscare trebuie integrata in fiecare caz in parte urmand ca interpretarea constantelor de integrare sa decurga din conjunctura fizica studiata.

O clasa interesanta de probleme solvabile conduc la traiectorii care dupa un timp destul de lung de la inceputul miscarii se apropie foarte mult de traiectoriile unor sisteme conservative. Altfel spus, ecuatia traiectoriei $x = x(t)$ are o comportare *asimptotica* asemanatoare cu cea a unui sistem conservativ. Dar, spre deosebire de sistemele conservative, cele neconservative schimba in permanenta lucru mecanic cu exteriorul. Campurile externe de forte neconservative pot reprezenta fie forte de *frecare*, care diminueaza energia cinetica a sistemului, fie forte *motrice* care tind sa o creasca. Atunci cand exista solutii asimptotice similare cu cele ale unor sisteme conservative, inseamna ca s-a stabilit un echilibru intre lucrul mecanic pierdut prin frecari si cel furnizat de fortele motrice.

Exemplu: **Problema oscilatiilor fortate.** Sa vedem, mai intai, in ce conditii oscilatiile armonice se amortizeaza. Modelul este dat de un oscilator armonic unidimensional care intampina o forta de rezistenta (frecare) direct proportionala cu viteza, avand sensul contrar acesteia, $F_{fr} = -2m\lambda\dot{x}$, unde 2λ este un parametru al modelului care joaca rolul coeficientului de frecare. Ecuatia de miscare are forma

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{3.36}$$

fiind o ecuatie liniara si omogena cu coeficienti constanti. Ea admite un spatiu liniar de solutii format din combinatiile liniare ale solutiilor particulare de forma $x = \exp(\alpha t)$. Inlocuind in ecuatie se obtine $\alpha = -\lambda \pm i\hat{\omega}$ daca $\lambda < \omega$ si pulsatia *echivalenta* a sistemului, $\hat{\omega} = \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}$, este un numar real. Atunci solutia generala a ecuatiei de miscare se poate pune sub forma

$$x(t) = ae^{-\lambda t}\sin\hat{\omega}(t - t_0) \,. \tag{3.37}$$

Constantele de integrare sunt amplitudinea *maxima*, a, si timpul t_0 la care oscilatorul trece prin $x = 0$. Amplitudinea oscilatiilor la un moment dat, $a(t) = a\exp(-\lambda t)$ scade rapid in timp ceea ce conduce la o comportare asimptotica de tipul $x(t) \to 0$ pentru valori mari ale lui t. De aceea miscarea se numeste miscare oscilatorie *amortizata*.

Problema care se pune in continuare este daca sistemul poate fi *fortat* sa oscileze sub actiunea unei forte motrice externe de forma $F = F_0 \sin \Omega t$. Se ajunge astfel la o noua ecuatie de miscare

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 x = \kappa \sin \Omega t \tag{3.38}$$

in care am notat $\kappa = F_0/m$. De data asta ecuatia este *neomogena* datorita termenului din membrul drept. Solutia sa generala este compusa din solutia ecuatiei omogene (3.37) la care se adauga o solutie *particulara* a ecuatiei neomogene. Dupa un calcul simplu se obtine rezultatul final

$$x(t) = a e^{-\lambda t} \sin \hat{\omega}(t - t_0) + A \sin \Omega(t - t_1)\,, \tag{3.39}$$

unde amplitudinea solutiei particulare a ecuatiei (3.38) este

$$A = \frac{\kappa}{\sqrt{(\hat{\omega}^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}} \tag{3.40}$$

iar t_1 trebuie luat in asa fel incat sa determine faza Ωt_1 data de

$$\tan \Omega t_1 = \frac{2\lambda\Omega}{\hat{\omega}^2 - \Omega^2}. \tag{3.41}$$

Aceasta solutie se comporta asimptotic ca cea a unui oscilator armonic de pulsatie Ω deoarece oscilatiile de pulsatie $\hat{\omega}$ se amortizeaza.

Concluzia este ca sistemul poate fi facut sa oscileze cu pulsatia fortei motrice pe care o putem regla asa cum dorim. Dar sistemul va reactiona diferit in functie de valoarea acestei pulsatii. Se observa ca daca aceasta este egala cu pulsatia proprie, $\Omega = \omega$, atunci amplitudinea A este maxima. Acest fenomen se numeste *rezonanta*. □

3.1.6 Miscarea in camp central

Unul dintre cele mai interesante cazuri de camp de forte conservativ este cel cu simetrie sferica.

Definiţia 3.8 *Un camp de forte conservativ cu simetrie sferica se numeste camp central. Centrul de simetrie se numeste* centru de forta.

Din aceasta definitie intelegem ca un camp central este creat de o *sursa punctiforma*, aflata in punctul C avand vectorul de pozitie $\vec{x}_C$) fata de sistemul de referinta $S(O; \vec{e}_i; t)$, care produce intr-un punct oarecare $P(O, \vec{x})$ o energie potentiala

$$V(\vec{x}) = V(|\vec{x} - \vec{x}_C|)\,, \tag{3.42}$$

ce depinde numai de distanta dintre P si C. Este evident ca orice functie de acest tip are simetrie sferica in sensul ca valorile ei sunt aceleasi in toate punctele pe o sfera cu centrul in

C. Componentele fortei in punctul P sunt $F_i = -\partial_i V(|\vec{x} - \vec{x}_C|)$ ceea ce inseamna ca forta se poate scrie astfel

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\partial_i V(|\vec{x} - \vec{x}_C|) = -V'(|\vec{x} - \vec{x}_C|)\frac{\vec{x} - \vec{x}_C}{|\vec{x} - \vec{x}_C|} \tag{3.43}$$

unde V' este derivata functiei (3.42).

Acest camp de forte este conservativ avand, in plus, proprietatea importanta ca momentul fortei in raport cu punctul C, $M_C = (\vec{x} - \vec{x}_C) \times \vec{F}(\vec{x})$, este intodeauna nul deoarece $\vec{F}$ este paralel cu $\vec{x} - \vec{x}_C$. Conform Teor.(3.2) si (3.3), rezulta ca momentul cinetic fata de punctul C se conserva si deci toate traiectoriile sunt plane. Ecuatiile de miscare ale unei particule oarecare (de masa m) si legile de conservare se scriu mai simplu in sistemul de referinta *propriu* al sursei de camp, $S(C; \vec{e}_i; t)$, in care vectorul de pozitie al punctului P, in care se afla particula, este $\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}_C$. In acest sistem, ecuatiile de miscare

$$m\ddot{\vec{r}} = -V'(r)\frac{\vec{r}}{r}, \quad r = |\vec{r}| \tag{3.44}$$

admit ca integrale prime energia totala conservata

$$E = \frac{m}{2}(\dot{\vec{r}})^2 + V(r) = \text{const.}, \tag{3.45}$$

si momentul cinetic total fata de punctul C

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \text{const.}. \tag{3.46}$$

Astfel 4 dintre cele 6 constante de integrare sunt determinate de marimi cu semnificatie fizica precisa. Vom vedea ca acestea sunt suficiente pentru a determina complet forma traiectoriei. Utimele doua constante de integrare vor preciza doar punctul de pe traiectorie din care se porneste la momentul initial si, implicit, pozitia traiectoriei in raport cu sistemul de coordonate carteziene din planul traiectoriei.

Studiul miscarii centrale se face comod folosind coordonatele polare r si φ din planul traiectoriei, *perpendicular* pe $\vec{L}$. Pentru aceasta, vom alege, mai intai, un reper $\{C; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ in planul traiectoriei care permite introducerea coordonatelor carteziene Cr_1r_2 si a coordonatelor polare asociate $Cr\varphi$ (definite prin $r_1 = r\cos\varphi$ si $r_2 = r\sin\varphi$) in acest plan. Viteza are expresia (2.19) ceea ce ne permite sa calculam marimile $(\dot{\vec{r}})^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$ si $L \equiv |\vec{L}| = mr^2\dot{\varphi}$. Astfel constatam ca integralele prime (3.45) si (3.46) conduc la sistemul de ecuatii

$$\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + V(r) = E \tag{3.47}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{m}\frac{1}{r^2}. \tag{3.48}$$

In sfarsit, inlocuind Ec.(3.48) in (3.47) se obtine ecuatia diferentiala

$$\dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2}\frac{1}{r^2} + \frac{2}{m}[V(r) - E] = 0 \tag{3.49}$$

a carei solutie se poate gasi rezolvand integrala care da functia inversa $t(r)$ astfel

$$t = t_0 + \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(r)] - \frac{L^2}{m^2}\frac{1}{r^2}}} \tag{3.50}$$

unde, ca si in cazul unidimensional, t_0 este o constanta de integrare. De aici se poate gasi functia $r(t)$ cu care revenind in Ec.(3.48) se obtine functia $\varphi(t)$ depinzand de o constanta de integrare care reprezinta coordonata polara la momentul initial.

Exemplu: **Oscilatorul tridimensional izotrop** este o particula de masa m aflata intr-un camp central avand energia potentiala

$$V(r) = \frac{k}{2}r^2\,, \tag{3.51}$$

care ne conduce la integralele prime ale ecuatiilor de miscare

$$\dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2}\frac{1}{r^2} + \omega^2 r^2 = \frac{2E}{m} \tag{3.52}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{m}\frac{1}{r^2}\,. \tag{3.53}$$

in care $\omega = \sqrt{k/m}$ este pulsatia proprie a oscilatorului. Prima dintre cele doua ecuatii se rezolva cu ajutorul integralei (3.50) obtinand ecuatia radiala

$$r(t) = [A - B\cos 2\omega(t - t_0)]^{1/2} \tag{3.54}$$

unde

$$A = \frac{E}{m\omega^2}\,, \quad B = \frac{\sqrt{E^2 - L^2\omega^2}}{m\omega^2} \tag{3.55}$$

iar t_0 joaca rolul unei constante de integrare. Ecuatia (3.53) ne da integrala

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \frac{L}{m}\int \frac{dt}{A - B\cos 2\omega(t - t_0)} \tag{3.56}$$

care se rezolva cu substitutia $u = \tan\omega(t - t_0)$, furnizand ecuatia unghiulara,

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \arctan\left[\sqrt{\frac{A+B}{A-B}}\,\tan\omega(t - t_0)\right]\,. \tag{3.57}$$

Din ecuatiile traiectoriei (3.54) si (3.57) vedem ca aceasta este elipsoidala, cuprinsa in interiorul inelului de raza minima $r_{min} = \sqrt{A - B}$ si de raza maxima $r_{max} = \sqrt{A + B}$. Miscarea este *periodica* si, prin urmare, traiectoria este inchisa. □

Atunci cand nu intereseaza decat forma traiectoriei sau cand ecuatiile de miscare temporare nu se pot integra prin functii elementare, se recurge la o metoda de integrare care ne conduce direct la ecuatia traiectoriei in coordonate polare, $r = r(\varphi)$. In acest scop se introduce noua functie $Z = 1/r$ depinzand de variabila φ, a carei derivata in raport cu φ se scrie astfel

$$Z'(\varphi) = -\frac{1}{r^2}\frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = -\frac{m}{L}\dot{r}\,. \tag{3.58}$$

Utilizand Ec.(3.49), dupa un calcul simplu, se obtine ecuatia diferentiala

$$(Z')^2 + Z^2 + \frac{2m}{L^2}\left[V\left(\frac{1}{Z}\right) - E\right] = 0 \tag{3.59}$$

cunoscuta ca *ecuatia Binet* [4]. Ca si in cazul precedent, aceasta ecuatie este echivalenta cu integrala

$$\varphi = \varphi_0 + \int \frac{dZ}{\sqrt{\frac{2m}{L^2}[E - V(\frac{1}{Z})] - Z^2}} \tag{3.60}$$

care da functia inversa $\varphi(Z)$. Odata rezolvata ecuatia Binet, se determina complet forma traiectoriei care depinde numai de valorile constantelor de integrare E si L, in conditiile in care versorul lui $\vec{L}$ a definit planul traiectoriei. Constanta de integrare φ_0 stabileste pozitia (inclinatia) traiectoriei fata de sistemul de coordonate carteziene Cr_1r_2.

Exemplu: **Problema Kepler.** In urma interpretarii unor obesrvatii astronomice, precise pentru acea epoca, prin prisma teoriei heliocentrice a lui Copernic, Kepler ajunge la concluzia ca miscarea planetelor se supune urmatoarelor trei legi: (1) traiectoriile planetelor sunt elipse avand Soarele intr-un focar, (2) planetele au viteze areolare constante (in sensul ca raza vectoare care uneste Soarele cu planeta matura arii egale in timpi egali) si (3) raportul dintre cubul semiaxei mari a elipsei si patratul perioadei de revolutie este constant. Problema era sa se gaseasca care este cauza care produce miscarea planetelor guvernata de aceste legi.

Solutia problemei Kepler este data de Newton care descopera legea atractiei universale conform careia Soarele reprezinta centrul C al unui camp de forte centrale de forma (2.81) a carui energie potentiala in sistemul de coordonate $Cr\varphi$, atasat Soarelui, se scrie astfel

$$V(r) = -G\frac{mm_s}{r}, \tag{3.61}$$

in functie de masa Soarelui, m_s, si masa planetei, m. Cu aceasta energie potentiala integrala (3.60) se poate rezolva obtinand, pentru orice $E > -G^2m^3{m_s}^2/2L^2$, ecuatia polara a conicelor avand un focar in C si axa principala inclinata cu unghiul φ_0 fata de axa r_1,

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)}. \tag{3.62}$$

Tipul si forma conicelor sunt complet determinate de parametrul

$$p = \frac{L^2}{Gm^2{m_s}^2} \tag{3.63}$$

si de *excentricitatea*

$$e = \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{G^2m^3{m_s}^2}}. \tag{3.64}$$

In functie de valorile pe care le ia e in domeniul $[0, \infty)$ se obtin cele trei tipuri de conice astfel: cand $E > 0$ valorile $e > 1$ corespund hiperbolelor, daca $E = 0$ atunci $e = 1$ si se obtin parabole iar pentru $E < 0$ valorile $e < 1$ dau traiectorii inchise sub forma de cercuri ($e = 0$) sau elipse ($0 < e < 1$).

[4] De fapt ecuatia obtinuta este o integrala prima a ecuatiei Binet care este o ecuatie de ordinul doi.

Astfel se demonstreaza legea (1). A doua lege este legata de conservarea momentului cinetic deoarece viteza areolara este, prin definitie,

$$A = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = \frac{L}{2m}\,. \tag{3.65}$$

Demonstratia legii (3) se face tinand seama ca semiaxa mare a elipsei este $a = p/(1-e^2)$ iar cea mica, $b = a\sqrt{1-e^2}$. Perioada de revolutie este aria elipsei impartita la viteza areolara. Inlocuind se obtine valoarea acesteia, $\tau = 2\pi ab/A = (2\pi/\sqrt{Gm_s})a^{3/2}$. La acelasi rezultat se poate ajunge folosind relatiile (3.48) si (3.62) care ne dau integrala

$$\tau = \frac{m}{L}\int_0^{2\pi}[r(\varphi)]^2 d\varphi\,, \tag{3.66}$$

a carei rezolvare cere cunostinte speciale de integrale eliptice.

Sa notam, in final, ca sistemul de referinta propriu al Soarelui in care am scris solutia problemei Kepler, nu este un sistem inertial. □

3.2 Dinamica sistemelor de particule

3.2.1 Marimi cinematice globale

Sa ne reintoarcem acum la sistemul de N particule descris in Sec.2.2.1. si sa studiem principalele sale proprietati dinamice in cazul general in care asupra fiecarei particule actioneaza atat forte datorate unor campuri externe cat si forte interne, produse de interactiunea reciproca dintre particule.

In sistemul de referinta $S(O;\vec{e}_i;t)$ avand sistemul de coordonate carteziene $Ox_1x_2x_3$, vectorii de pozitie ai particulelor (numerotate cu $a, b, ...$) sunt $\vec{x}^{(a)}$ iar cei relativi vor fi definiti conform Ec.(2.66). Presupunem ca asupra fiecarei particule (a) actioneaza cate o forta totala

$$\vec{F}^{(a)} = \vec{F}^{(a)}_{ext} + \sum_{b\neq a}\vec{F}^{(ab)}\,, \tag{3.67}$$

compusa din rezultanta fortelor *externe* exercitate asupra particulei (a), notata cu $\vec{F}^{(a)}_{ext}$, si din rezultanta fortelor *interne* $\vec{F}^{(ab)}$ cu care celelalte particule, $(b) \neq (a)$, actioneaza asupra particulei (a). Conform principiului actiunii si reactiunii, si particula (a) va reactiona asupra particulelor (b) cu o forte egale si de sens contrar. In plus, vom presupune ca rezultanta fortelor externe care actioneaza asupra particulei (a) depinde *numai* de pozitia si viteza acestei particule,

$$\vec{F}^{(a)}_{ext} = \vec{F}^{(a)}_{ext}(\vec{x}^{(a)}, \dot{\vec{x}}^{(a)})\,, \tag{3.68}$$

in timp ce fortele interne depind numai de vectorii de pozitie relativi si vitezele relative, fiind paralele cu directia dintre cele doua particule

$$\vec{F}^{(ab)} = -\vec{F}^{(ba)} = \pm|\vec{F}^{(ab)}(\vec{r}^{(ab)}, \dot{\vec{r}}^{(ab)})|\,\frac{\vec{r}^{(ab)}}{|\vec{r}^{(ab)}|}\,. \tag{3.69}$$

Deoarece vectorul $\vec{r}^{(ab)}$ este orientat de la (b) la (a) vom spune ca semnul $(+)$ corespunde fortelor de *respingere* iar semnul $(-)$ celor de *atractie*.

Atata vreme cat cel putin una dintre fortele externe este nenula, sistemul S nu este inertial. In cele ce urmeaza, vom folosi ecuatiile de miscare (2.70) scrise cu ajutorul fortelor (3.67),

$$m^{(a)}\ddot{\vec{x}}^{(a)} = \vec{F}^{(a)}_{ext} + \sum_{b\neq a} \vec{F}^{(ab)}\,, \quad a = 1, 2, ..., N\,. \tag{3.70}$$

Acestea determina nu numai dinamica individuala a fiecarei particule dar si comportarea globala a sistemului sub actiunea fortelor externe, care poate fi bine descrisa cu ajutorul unor marimi cinematice adecvate pe care le vom introduce in continuare.

Cea mai simpla marime globala este masa totala a sistemului de particule

$$M = \sum_a m^{(a)}\,. \tag{3.71}$$

Un punct caracteristic remarcabil este *centrul de masa* sau *centrul de inertie* al sistemului.

Definiţia 3.9 *Se numeste centru de masa punctul $O_{cm}(O, \vec{X}_{cm})$ al carui vector de pozitie fata de originea sistemului de referinta S este*

$$\vec{X}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_a m^{(a)}\vec{x}^{(a)}\,. \tag{3.72}$$

In multe probleme este util sa se utilizeze repere avand originea in O_{cm}.

Definiţia 3.10 *Orice sistem de referinta S_{cm} avand reperul cu originea in O_{cm} se numeste sistem (de referinta) al centrului de masa.*

Exista mai multe posibilitati de alegere a reperelor sistemelor centrelor de masa, in functie de cum definesc bazele de versori care determina axele carteziene. De obicei, axele S_{cm} se iau paralele cu axele sistemului S daca acesta este inertial, sau cu cele ale unui sistem inertial convenabil ales daca S nu este un sistem inertial. Dar este posibila si situatia mai complicata in care axele sistemului S_{cm} se afla intr-o miscare de rotatie fata de S. In acest caz sistemul centrului de masa, $S_{cm}(O_{cm}; \vec{e}\,'_i; t)$, are un reper ai carui versori

$$\vec{e}\,'_i(t) = R_{ij}(t)\vec{e}_j\,, \tag{3.73}$$

se afla in miscare de rotatie fata de cei ai sistemului S, considerat fix. Asa cum am aratat in Sec.2.1.4, daca se cunoaste matricea rotatiei $R(t)$, atunci se poate defini vectorul de rotatie $\vec{\omega}(t) = \omega_i(t)\vec{e}_i = \omega'_j(t)\vec{e}\,'_j(t)$ ale carui componente fata de S si respectiv S_{cm} sunt date de relatiile (2.36), (2.37) si (2.39). Cu aceasta miscarea relativa a celor doua sisteme de referinta este bine precizata. Toti vectorii de pozitie in raport cu O_{cm} vor fi notati cu $\vec{r}$ astfel incat in sistemul de coordonate carteziene $O_{cm}x'_1x'_2x'_3$ al sistemului S_{cm} ei vor avea componentele (r'_i).

Pozitia relativa a fiecarei particule fata de O_{cm} va fi data de vectorii de pozitie relativi

$$\vec{r}^{(a)} = \vec{x}^{(a)} - \vec{X}_{cm}\,, \tag{3.74}$$

iar vitezele particulelor fata de S pot fi puse sub forma

$$\dot{\vec{x}}^{(a)} = \dot{\vec{X}}_{cm} + \vec{v}^{(a)} + \vec{\omega}\times\vec{r}^{(a)} \tag{3.75}$$

Din ecuatia (3.72) rezulta proprietatea importanta

$$\sum_a m^{(a)} \vec{r}^{(a)} = \vec{0} \tag{3.76}$$

care atesta ca doar $N-1$ vectori de pozitie relativi sunt liniar independenti. In mod analog, pornind de la definitiile (2.56) si (2.57), se arata ca vitezele relative, $\vec{v}^{(a)}$, si acceleratiile relative, $\vec{a}^{(a)}$, respecta aceeasi regula,

$$\sum_a m^{(a)} \vec{v}^{(a)} = \vec{0}\,, \quad \sum_a m^{(a)} \vec{a}^{(a)} = \vec{0}\,. \tag{3.77}$$

Aceste proprietati ne permit sa separam anumite componente ale marimilor cinematice globale, identificand efectele miscarii relative a S_{cm} fata de S.

Sa definim acum marimile cinematice globale care vor fi implicate in teoreme de conservare. Stiind ca fiecare particula are impulsul $\vec{p}^{(a)} = m^{(a)} \dot{\vec{x}}^{(a)}$ definim:

Definiţia 3.11 *Se numeste* impuls total *sau* impuls al centrului de masa *suma impulsurilor tuturor particulelor din sistem,*

$$\vec{P}_{cm} = \sum_a \vec{p}^{(a)} = \sum_a m^{(a)} \dot{\vec{x}}^{(a)}\,. \tag{3.78}$$

Evident, impulsul total poate fi interpretat ca impulsul unei particule care ar *concentra* intreaga masa M a sistemului in centrul sau de masa, deoarece din Ec.(3.72) si (3.78) rezulta

$$\vec{P}_{cm} = M \dot{\vec{X}}_{cm}\,. \tag{3.79}$$

Fiind dat un punct oarecare $C(O, \vec{x}_C)$, fix in raport cu sistemul S, si momentele cinetice ale particulelor fata de aceast punct, $\vec{L}_C^{(a)} = (\vec{x}^{(a)} - \vec{x}_C) \times \vec{p}^{(a)}$, se poate defini momentul cinetic total.

Definiţia 3.12 *Pseudo-vectorul legat*

$$\vec{L}_C = \sum_a \vec{L}_C^{(a)} = \sum_a (\vec{x}^{(a)} - \vec{x}_C) \times \vec{p}^{(a)}\,, \tag{3.80}$$

avand punctul de aplicatie in C, reprezinta momentul cinetic total al sistemului de particule fata de acest punct.

Sa observam ca, deoarece vectorul $\vec{x}_C$ nu poarta indice de sumare, Ec.(3.80) se poate pune sub forma

$$\vec{L}_C = \vec{L}_O - \vec{x}_C \times \vec{P}_{cm} \tag{3.81}$$

unde $\vec{L}_O = \sum_a \vec{x}^{(a)} \times \vec{p}^{(a)}$ este momentul cinetic total fata de originea sistemului S. Daca facem alegerea speciala $C = O_{cm}$ atunci, conform Def.(3.12), vom obtine momentul cinetic total in raport cu centrul de masa,

$$\vec{L}_{cm} = \sum_a \vec{r}^{(a)} \times \vec{p}^{(a)} = \sum_a m^{(a)} \vec{r}^{(a)} \times \dot{\vec{x}}^{(a)}\,, \tag{3.82}$$

care satisface

$$\vec{L}_O = \vec{L}_{cm} + \vec{X}_{cm} \times \vec{P}_{cm} \,. \tag{3.83}$$

De aici se observa ca momentul cinetic total fata de punctul O este momentul cinetic total fata de centrul de masa completat cu un termen egal cu momentul cinetic al unei particule (echivalente) de impuls $\vec{P}_{cm}$ aflata in centrul de masa O_{cm}. La randul lui, $\vec{L}_{cm}$ are o structura ce poate fi evidentiata folosind ecuatiile (3.75), (3.76) si (3.77). Acestea conduc la urmatoarea descompunere

$$\vec{L}_{cm} = \vec{L}_{rel} + \vec{L}_{pr} \tag{3.84}$$

in care primul termen,

$$\vec{L}_{rel} = \sum_a m^{(a)} \vec{r}^{(a)} \times \vec{v}^{(a)} \,, \tag{3.85}$$

se interpreteaza ca fiind momentul cinetic total datorat miscarii relative a particulelor fata de S_{cm}. Al doilea termen,

$$\vec{L}_{pr} = \sum_a m^{(a)} \vec{r}^{(a)} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^{(a)}) \,, \tag{3.86}$$

este mult mai interesant deoarece nu implica vitezele relative ale particulelor fata de S_{cm}, depinzand numai de *configuratia* instantanee a sistemului de particule in raport cu S_{cm}. Din acest motiv el va fi numit aici moment cinetic *propriu* al sistemului de particule fata de O_{cm} [5].

In sfarsit, ultima marime globala importanta este energia cinetica totala.

Definiţia 3.13 *Energia cinetica totala a sistemului de particule calculata in raport cu sistemul de referinta S este*

$$T = \sum_a T^{(a)} = \frac{1}{2} \sum_a m^{(a)} \left(\dot{\vec{x}}^{(a)} \right)^2 \,. \tag{3.87}$$

Pornind cu aceasta definitie unde vitezele $\dot{\vec{x}}^{(a)}$ sunt date de Ec.(3.75) si folosind conditiile (3.76) si (3.77), dupa calcul simplu, se ajunge la urmatoarea descompunere

$$T = \frac{1}{2} M (\dot{\vec{X}}_{cm})^2 + \frac{1}{2} \sum_a m^{(a)} (\vec{v}^{(a)})^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}_{pr} + \vec{\omega} \cdot \vec{L}_{rel} \,, \tag{3.88}$$

care reprezinta o versiune a *teoremei König*. Primul termen este energia cinetica darorata miscarii globale a sistemului de particule, vazut ca o particula de masa M si impuls $\vec{P}_{cm}$. Urmatorul termen reprezinta energia cinetica a miscarii relative a particulelor sistemului fata de S_{cm} iar ultimii doi termeni sunt energii cinetice de rotatie. Dintre acestia, este remarcabil termenul

$$T_{pr} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}_{pr} = \frac{1}{2} \sum_a m^{(a)} (\vec{\omega} \times \vec{r}^{(a)})^2 \tag{3.89}$$

care depinde numai de configuratia instantanee a sistemului de particule.

[5] Aceasta denumire nu este consacrata dar o vom folosi pentru identificarea termenului in discutie.

3.2.2 Teoreme generale

Dinamica globala a unui sistem de N particule este determinata de *torsorul total* fata de un punct fix fata de sistemul S.

Definiţia 3.14 *Torsorul total care actioneaza asupra sistemului de N particule, calculat in raport cu un anumit punct fix $C(O, \vec{x}_C)$, este $(\vec{F}, \vec{M}_C)$ unde*

$$\vec{F} = \sum_a \vec{F}^{(a)}, \quad \vec{M}_C = \sum_a (\vec{x}^{(a)} - \vec{x}_C) \times \vec{F}^{(a)} \tag{3.90}$$

sunt rezultanta si momentul total fata de punctul C al tuturor fortelor care actioneaza asupra particulelor din sistem.

Daca fortele care se exercita asupra fiecarei particule, in parte, au forma (3.67) atunci efectul acestui torsor se reduce la cel al fortelor externe.

Teoremă 3.6 *Torsorul $(\vec{F}, \vec{M}_C)$ este echivalent cu torsorul total al fortelor externe fata de acelasi punct, $(\vec{F}_{ext}, \vec{M}_{ext\,C})$, format din rezultanta si momentul total al fortelor externe,*

$$\vec{F} \equiv \vec{F}_{ext} = \sum_a \vec{F}^{(a)}_{ext} \tag{3.91}$$

$$\vec{M}_C \equiv \vec{M}_{ext\,C} = \sum_a (\vec{x}^{(a)} - \vec{x}_C) \times \vec{F}^{(a)}_{ext} \tag{3.92}$$

Demonstraţie: In expresia lui $\vec{F}$ termenul $\sum_{a,b} \vec{F}^{(ab)} = \vec{0}$ nu contribuie (deoarece fortele interne sunt antisimetrice in indicii a si b) si se obtine Ec.(3.91). Cand se face sumarea momentelor particulelor, se observa ca suma

$$\sum_{a,b} \vec{x}^{(a)} \times \vec{F}^{(ab)} = \frac{1}{2} \sum_{a,b} (\vec{x}^{(a)} - \vec{x}^{(b)}) \times \vec{F}^{(ab)} \tag{3.93}$$

se anuleaza atata vreme cat fortele interne sunt de forma (3.69). Apoi, punand $\vec{M}_C = \vec{M}_O - \vec{x}_C \times \vec{F}$, se ajunge la Ec.(3.92). ∎
Trebuie sa observam ca atat rezultanta cat si momentul total al fortelor externe sunt campuri de vectori care, in general, pot depinde de toate coordonatele si vitezele particulelor din sistem.

Rezultatele obtinute permit formularea teoremei impulsului total care reprezinta generalizarea in cazul sistemelor de particule a Teor.(3.1).

Teoremă 3.7 *Variatia in timp a impulsului total al sistemului de particule este datorata rezultantei fortelor exterioare,*

$$\dot{\vec{P}}_{cm} = \vec{F}_{ext}\,. \tag{3.94}$$

Demonstraţie: Se sumeaza ecuatiile sistemului (3.70) si se tine seama de Ec.(3.91). ∎
Teorema impulsului ne permite sa scriem escuatiile de miscare ale sistemului de particule in S_{cm}.

Corolarul 3.1 *Ecuatiile de miscare (3.70) in raport cu un sistem de referinta oarecare, S, sunt echivalente cu ecuatiile de miscare*

$$m^{(a)}\ddot{\vec{r}}^{(a)} = \vec{F}^{(a)}_{ext} + \sum_{b\neq a} \vec{F}^{(ab)} - \frac{m^{(a)}}{M}\vec{F}_{ext}\,, \quad a = 1, 2, ..., N\,. \tag{3.95}$$

intr-un sistem al centrului de masa care nu se roteste fata de S.

Demonstraţie: Inlocuind in Ec.(3.70) $\vec{x}^{(a)} = \vec{X}_{cm} + \vec{r}^{(a)}$, asa cum rezulta din Ec.(3.74), si tinand seama de Ec.(3.94) si de faptul ca $\vec{\omega} = \vec{0}$, se obtine rezultatul enuntat. ∎
Sistemele de ecuatii (3.94) si (3.95) sunt echivalente cu ecuatiile de miscare originare (3.70) dar ele nu pot fi tratate independent, ramanand *cuplate* atata timp cat $\vec{F}_{ext}$ depinde de pozitiile si vitezele tuturor particulelor din sistem.

A doua teorema importanta este teorema momentului cinetic total care se refera la efectul de rotatie al fortelor externe, generalizand Teor.(3.2).

Teoremă 3.8 *Momentul cinetic total fata de un punct fix C in raport cu sistemul de referinta S variaza in timp datorita momentului total al fortelor externe fata de acest punct astfel*

$$\dot{\vec{L}}_C = \vec{M}_{ext\,C}\,. \tag{3.96}$$

Demonstraţie: Se inmulteste vectorial fiecare dintre ecuatiile (3.70) cu $\vec{x}^{(a)}$ si se sumeaza. Aplicand apoi in membrul stang acelasi ratinament ca in Teor.(3.2) si tinand seama de Ec.(3.92) demonstratia este imediata. ∎
In multe probleme concrete este convenabil sa se ia $C = O_{cm}$ ceea ce conduce la ecuatii de forma $\dot{\vec{L}}_{cm} = \vec{M}_{ext\,(cm)}$ care permit alegeri adecvate ale rotatiei S_{cm} fata de S in probleme particulare importante cum ar fi cea a miscarii solidului rigid, pe care o vom trata mai tarziu.

Ajungem astfel la concluzia ca marimile cinematice globale $\vec{P}_{cm}$ si $\vec{L}_C$ (sau $\vec{L}_{cm}$) descriu modul cum se comporta sistemul de particule sub actiunea fortelor externe. Intr-o prima aproximatie se poate spune ca acesta poate fi privit ca o particula cu impuls $\vec{P}_{cm}$ si moment cinetic $\vec{L}_C$ care variaza esxclusiv datorita torsorului total al fortelor externe.

Nu acelasi lucru se intampla atunci cand analizam variatia energiei cinetice a sistemului de particule deoarece aceasta se va datora atat lucrului mecanic al fortelor externe cat si lucrului mecanic al fortelor interne. Pentru a intelege acest lucru vom porni de la puterea dezvoltata de forta $\vec{F}^{(a)}$ in miscarea particulei (a) pe traiectorie,

$$P^{(a)} = \dot{\vec{x}}^{(a)} \cdot \vec{F}^{(a)} = \dot{\vec{x}}^{(a)} \cdot \vec{F}^{(a)}_{ext} + \dot{\vec{x}}^{(a)} \cdot \left(\sum_{b\neq a} \vec{F}^{(ab)}\right)\,. \tag{3.97}$$

Evident, puterea totala se obtine sumand peste toate particulele din sistem.

Definiţia 3.15 *Puterea totala dezvoltata de fortele care actioneaza asupra particulelor din sistem,*

$$P = \sum_a P^{(a)} = P_{ext} + P_{int}\,, \tag{3.98}$$

este suma dintre puterea totala datorata fortelor externe,

$$P_{ext} = \sum_a \dot{\vec{x}}^{(a)} \cdot \vec{F}^{(a)}_{ext}\,, \tag{3.99}$$

si puterea totala dezvoltata de fortele interne,

$$P_{int} = \sum_{a,b} \dot{\vec{x}}^{(a)} \cdot \vec{F}^{(ab)} = \frac{1}{2}\sum_{a,b} \dot{\vec{r}}^{(ab)} \cdot \vec{F}^{(ab)}\,. \tag{3.100}$$

Sa notam ca expresia (3.100) se obtine ca urmare a faptului ca vectorii de pozitie relativi (2.66) sunt antisimetrici in a si b. Ca si in cazul unei singure particule, lucrul mecanic se defineste intre doua momente date ale miscarii sistemului de particule.

Definiţia 3.16 *Lucru mecanic total efectuat de ansamblul fortelor $\vec{F}^{(a)}$ $(a = 1, 2, ..., N)$ intre momentele t_1 si t_2 este*

$$W(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} P(t)dt = W_{ext}(t_1, t_2) + W_{int}(t_1, t_2) \tag{3.101}$$

unde

$$W_{ext}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} P_{ext}(t)dt\,, \quad W_{int}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} P_{int}(t)dt\,, \tag{3.102}$$

reprezinta luctul mecanic total al fortelor externe si, respectiv, lucrul mecanic total al fortelor interne.

Pornind de la aceste definitii teorema energiei cinetice se demonstreaza ca si Teor.(3.4) in cazul unei singure particule.

Teoremă 3.9 *Variatia energiei cinetice este egala cu lucrul mecanic total efectuat de fortele care actioneaza asupra sistemului,*

$$W(t_1, t_2) = T(t_2) - T(t_1)\,. \tag{3.103}$$

3.2.3 Sisteme conservative si sisteme izolate

Teoremele de conservare ne permit construirea unor integrale prime legate de conservarea impulsului, momentului cinetic sau a energiei in cazul unor sisteme unde fortele care actioneaza asupra particulelor satisfac anumite conditii generale. Vom discuta, in continuare, cazurile cele mai importante de sisteme de forte susceptibile sa duca la legi de conservare.

O clasa larga de sisteme mecanice au dinamici determinate de campuri potentiale care produc atat fortele externe cat si pe cele interne. Componentele acestor forte se obtin din potentiale mecanice prin derivare in raport cu coordonatele particulei asupra careia se exercita forta. Sa ne oprim asupra particulei (a) ale carei coordonate sunt $x_i^{(a)}$ $(i = 1, 2, 3)$. Forta externa care se exercita asupra acestei particule este o forta potentiala daca exista un potential mecanic $V^{(a)}(\vec{x}^{(a)}, t)$ astfel incat componentele fortei externe sa se exprime astfel

$$F^{(a)}_{ext\,i}(\vec{x}^{(a)}, t) = -\frac{\partial}{\partial x_i^{(a)}} V^{(a)}(\vec{x}^{(a)}, t)\,. \tag{3.104}$$

Aceste relatii pot fi scrise in forma vectoriala compacta $\vec{F}^{(a)}_{ext} = -\nabla^{(a)}V^{(a)}$ cu ajutorul operatorului nabla corespunzator coordonatelor $x_i^{(a)}$,

$$\nabla^{(a)} = \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i^{(a)}} \,. \tag{3.105}$$

Si fortele interne pot avea caracterul de forte potentiale. Aceasta se intampla atunci cand pentru o pereche data de particule, (a) si (b), exista o functie $V^{(ab)}(\vec{r}^{(ab)}, t)$, numita *potential biparticula* sau potential de *interactiune* biparticula din care forta de interactiune se obtine prin aplicarea operatorului nabla astfel

$$\vec{F}^{(ab)}(\vec{r}^{(ab)}, t) = -\nabla^{(a)}V^{(ab)}(\vec{r}^{(ab)}, t) \tag{3.106}$$

In privinta formei potentialelor de interactiune biparticula exista anumite restictii care decurg din principiile generale.

Propoziţia 3.3 *Fiecarei perechi de particule, (a) si (b), i se poate asocia un singur potential de interactiune biparticula, $V^{(ab)} = V^{(ba)}$, care este o functie numai de distanta dintre particule, $|r^{(ab)}|$, si timp.*

Demonstraţie: Sa observam, mai intai, ca deoarece $r^{(ab)} = \vec{x}^{(a)} - \vec{x}^{(b)}$, se obtine prin calcul

$$\nabla^{(a)}|\vec{r}^{(ab)}| = -\nabla^{(b)}|\vec{r}^{(ab)}| = \frac{\vec{r}^{(ab)}}{|\vec{r}^{(ab)}|} \,. \tag{3.107}$$

Datorita faptului ca fortele interne $\vec{F}^{(ab)} = -\vec{F}^{(ba)}$ au forma (3.69), ceruta de principiului actiunii si reactiunii, rezulta ca singura optiune posibila este ca potentialele sa fie functii de $|r^{(ab)}|$ si timp. Orice alta alegere ar genera forte interne care nu ar mai pastra directia $\vec{r}^{(ab)}$. ■

Cu aceasta ajungem la urmatoarea definitie generala.

Definiţia 3.17 *Se spune ca dinamica unui sistem de particule este datorata unui sistem de forte potentiale daca toate fortele externe si interne deriva din potentiale. Functia*

$$V_{ext}(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, ..., \vec{x}^{(N)}, t) = \sum_a V^{(a)}(\vec{x}^{(a)}, t) \tag{3.108}$$

reprezinta potentialul mecanic al fortelor externe. Potentialul obtinut prin insumarea tuturor potentialelor de interatiune biparticula, luate o singura data,

$$V_{int}(|\vec{r}^{(12)}|, |\vec{r}^{(13)}|, ..., t) = \sum_{a,b>a} V^{(ab)}(|\vec{r}^{(ab)}|, t) \,, \tag{3.109}$$

se numeste potentialul de interactiune al sistemului de particule.

Ca si in cazul miscarii unei singure particule, toate potentialele sunt determinate pana la constante aditive *arbitrare*, fara semnificatie fizica (deoarece se anuleaza sub actiunea operatorului nabla). Acesta observatie ramane valabila si in cazul sistemelor conservative.

Sisteme conservative

generalizarea fireasca a campurilor externe conservative o reprezinta sistemele de forte datorate exclusiv unor potentiale independente de timp.

Definiţia 3.18 *Se numeste sistem conservativ un sistem de particule asupra carora actioneaza numai forte potentiale derivate din potentiale mecanice independente de timp, numite energii potentiale:*

1. Functiile $V^{(a)}(\vec{x}^{(a)})$ sunt energii potentiale uniparticula iar $V_{ext} = \sum_a V^{(a)}$ este energia potentiala totala a campului extern.

2. Fiecare functie $V^{(ab)}(|\vec{r}^{(ab)}|)$ reprezinta energia potentiala de interactiune dintre particulele (a) si (b). Suma lor, $V_{int} = \sum_{a,b>a} V^{(ab)}$, este energia potentiala de interactiune a sistemului de particule.

3. Se numeste energie potentiala totala functia

$$V(\vec{x}^{(a)}) = V_{ext}(\vec{x}^{(a)}) + V_{int}(|\vec{x}^{(a)} - \vec{x}^{(b)}|) + C\,, \tag{3.110}$$

definita pana la o constanta arbitrara, C.

Ajungem astfel la concluzia ca atat potentialele cat si energiile potentiale sunt marimi *aditive.* De aceea, energia potentiala totala are o structura care ne permite sa obtinem direct rezultanta fortelor care actioneaza asupra unei particule.

Propoziţia 3.4 *Rezultanta fortelor care actioneaza asupra unei particule dintr-un sistem conservativ deriva din energia potentiala totala a sistemului astfel*

$$\vec{F}^{(a)} = -\nabla^{(a)} V \tag{3.111}$$

Demonstraţie: In structura functiei V intra fiecare functie $V^{(a)}$ si $V^{(ab)}$. Tinand seama ca $V^{(a)}$ depinde numai de $\vec{x}^{(a)}$ iar energiile potentiale de interactiune depind numai de distantele relative dintre particule se obtine

$$-\nabla^{(a)} V = -\nabla^{(a)} V^{(a)} - \nabla^{(a)} \sum_{b\neq a} V^{(ab)} = \vec{F}^{(a)}_{ext} + \sum_{b\neq a} \vec{F}^{(ab)} = \vec{F}^{(a)}\,, \tag{3.112}$$

asa cum rezulta din relatiile (3.104) si (3.106). ■
Ajungem astfel la o formulare generala a teoremei conservarii energiei.

Teoremă 3.10 *Ecuatiile de miscare ale unui sistem conservativ admit integrala prima*

$$E = T(t) + V[\vec{x}^{(a)}(t)] = \text{const.} \tag{3.113}$$

in care energia totala a sistemului, E, este o marime conservata.

Demonstraţie: Daca tinem seama de relatia (3.111), de Teor.(3.5) si sumam dupa toate particulele obtinem rezultatul enuntat. ■

Sisteme de particule izolate

Sa consideram acum cazul foarte important al sistemelor *izolate.*

Definiţia 3.19 *Daca exista cel putin un sistem de referinta inertial S in care toate fortele externe sunt nule ($\vec{F}^{(a)}_{ext} = \vec{0}$, $a = 1, 2, ..., N$) atunci sistemul de particule se numeste izolat sau inchis.*

Cu alte cuvinte sistemele de particule izolate sunt decuplate de orice interactiune externa intelegand prin aceasta ca ele nu schimba nici substanta cu exteriorul. In aceste conditii din Teor.(3.6) rezulta:

Corolarul 3.2 *Daca sistemul de particule este izolat atunci torsorul total fata de orice punct fix in raport cu S este torsorul nul $(\vec{0}, \vec{0})$.*

Se poate demonstra prin inductie si reciproca care afirma ca daca torsorul total fata de un punct este nul atunci, in virtutea faptului ca torsorul total fata de orice punct este nul, toate fortele externe sunt nule si sistemul este izolat.

Teoremă 3.11 *In sistemele izolate impulsul total si momentul cinetic total se conserva iar energia cinetica variaza numai datorita lucrului mecanic al fortelor interne.*

Demonstraţie: Deoarece $\vec{F}^{(a)}_{ext} = \vec{0}$, $a = 1, 2, ..., N$, torsorul fortelor externe este nul si $W_{ext} = 0$. In virtutea teoremelor (3.7) si (3.8) avem $\dot{\vec{P}}_{cm} = \vec{0}$ si $\dot{\vec{L}}_C = \vec{0}$ ceea ce conduce la integralele prime $\vec{P}_{cm} =$ const. si $\vec{L}_C =$ const.. ■
Reamintind ca $\vec{P}_{cm}$ este legat de miscarea centrului de masa al sistemului prin Ec.(3.79), tragem concluzia ca, daca sistemul este izolat, atunci centrul sau de masa se poate afla in miscare rectilinie si uniforma sau in repaus relativ fata de un sistem de referinta inertial S. Aceasta inseamna ca sistemele de referinta ale centrului de masa, S_{cm}, ale unui sistem de particule izolat, sunt sisteme de referinta *inertiale* daca axele lor nu se afla in miscare de rotatie fata de S, ramanand paralele cu cele ale unui sistem inertial. Altfel spus, exista o multime de sisteme S_{cm} inertiale care difera intre ele doar printr-o transformare de rotatie independenta de timp din grupul Galilei.

Sistemele de particule care admit numarul maxim de integrale prime generale sunt sistemele *conservative izolate.*

Propoziţia 3.5 *Un sistem conservativ este izolat daca si numai daca energia sa potentiala externa se reduce la o constanta arbitrara, $V_{ext} =$const..*

Demonstraţie: Evident, daca $V_{ext} = 0$ atunci toate fortele externe sunt nule si sistemul consevativ este izolat. Reciproc, daca sistemul este izolat atunci toate componentele fortelor externe (3.104) se anuleaza ceea ce inseamna ca toate derivatele partiale ale functiilor $V^{(a)}$ sunt nule. Deci acestea se reduc la constante si implicit suma lor, V_{ext}, va fi o constanta. ■
Orice sistem conservativ izolat admite sapte integrale prime importante reprezentand tot atatea marimi conservate. Acestea sunt: trei componente ale impulsului total, trei ale momentului cinetic total si energia totala a sistemului.

Exemplu: **Problema celor N corpuri** se formuleaza, de obicei, pentru sisteme de particule izolate. Fortele interne (2.81) provin din energii potentiale de interactiune, $V^{(ab)}$, care conduc la energia potentiala totala de interactiune

$$V_{int} = \sum_{a,b>a} V^{(ab)} = -G \sum_{a,b>a} \frac{m^{(a)}m^{(b)}}{|\vec{r}^{(ab)}|}\,. \tag{3.114}$$

Astfel este clar ca problema celor N corpuri se refera la un sistem conservativ izolat. □

Un caz particular important este cel al sistemelor de particule care interactioneaza intre ele prin forte interne oarecare si se afla in miscare *libera* intr-un camp gravitational extern *omogen*, intelegand prin aceasta ca fortele externe sunt produse numai de campul gravitational extern $\vec{g}$ =const..

Teoremă 3.12 *Orice sistem de particule aflate in camp gravitational omogen se comporta ca un sistem izolat in raport cu un sistem de referinta al centrului de masa, atata timp cat asupra sa nu actioneaza alte forte externe.*

Demonstrație: Sa consideram sistemul de referinta S in care se da campul gravitational omogen $\vec{g}$ si un sistem al centrului de masa care nu se roteste fata de S. Atunci fortele externe sunt $\vec{F}^{(a)}_{ext} = m^{(a)}\vec{g}$ iar rezultanta lor este $\vec{F}_{ext} = M\vec{g}$. Inlocuind aceste expresii in ecuatiile de miscare (3.95) observam ca toti termenii continand forte externe se anuleaza, dinamica sistemului de particule ramanand guvernata numai de fortele interne, ca si cum sistemul de particule ar fi izolat. ■
Acest rezultat este valabil indiferent daca $\vec{g}$ este un camp produs de surse gravitationale sau este un camp de acceleratii datorat fortelor de inertie. Sa notam ca daca $\vec{g}$ nu este omogen, depinzand de punct, atunci fiecare forta externa se va calcula in alt punct astfel incat efectul fortelor externe nu va mai putea fi eliminat trecand in S_{cm}. Dar daca variatia in spatiu a campului gravitational este foarte mica, astfel incat el sa poata fi considerat aproximativ omogen pe distante mult mai mari decat dimensiunile sistemului, atunci acesta are o comportare in S_{cm} ce poate fi bine aproximata de cea a ca un sistem izolat. Imponderabilitatea obtinuta in statiile spatiale ilustreaza acest fapt.

3.2.4 Sisteme cu doua particule

Cel mai simplu tip de sistem de particule contine doar doua particule cu mase $m^{(1)}$ si $m^{(2)}$. In general, ecuatiile sale de miscare intr-un sistem de referinta oarecare, S, sunt

$$m^{(1)}\ddot{\vec{x}}^{(1)} = \vec{F}^{(1)}_{ext}(\vec{x}^{(1)}, \dot{\vec{x}}^{(1)}) + \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}})\,, \tag{3.115}$$

$$m^{(2)}\ddot{\vec{x}}^{(2)} = \vec{F}^{(2)}_{ext}(\vec{x}^{(2)}, \dot{\vec{x}}^{(2)}) - \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}})\,, \tag{3.116}$$

unde am notat cu $\vec{F} = \vec{F}^{(12)} = -\vec{F}^{(21)}$ fortele interne si cu

$$\vec{r} = \vec{r}^{(12)} = \vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(2)} \tag{3.117}$$

vectorul de pozitie relativ. Acest sistem are sase grade de libertate dintre care trei sunt datorate miscarii centrului de masa. De aceea, se va obtine o simplificare semnificativa a problemei dinamice daca vom *separa* miscarea centrului de masa, O_{cm}. Din teoria generala stim ca acesta are vectorul de pozitie

$$\vec{X}_{cm} = \frac{1}{M}\left(m^{(1)}\vec{x}^{(1)} + m^{(2)}\vec{x}^{(2)}\right) \tag{3.118}$$

unde $M = m^{(1)} + m^{(2)}$ este masa totala a sistemului. Vectorii de pozitie relativi ai celor doua particule fata de O_{cm}, $\vec{r}^{(1)}$ si $\vec{r}^{(2)}$ sunt definiti astfel incat

$$\begin{aligned} \vec{x}^{(1)} &= \vec{X}_{cm} + \vec{r}^{(1)}, \\ \vec{x}^{(2)} &= \vec{X}_{cm} + \vec{r}^{(2)}. \end{aligned} \tag{3.119}$$

Conform Ec.(3.76) ei satisfac conditia

$$m^{(1)}\vec{r}^{(1)} + m^{(2)}\vec{r}^{(2)} = \vec{0}, \tag{3.120}$$

care reduce la trei numarul de grade de libertate ale miscarii in raport cu S_{cm}. Acestea vor fi preluate de catre vectorul de pozitie relativ (3.117) cu ajutorul caruia se poate scrie

$$\vec{r}^{(1)} = \frac{m^{(2)}}{M}\vec{r}, \quad \vec{r}^{(2)} = -\frac{m^{(1)}}{M}\vec{r}. \tag{3.121}$$

Acum avem toate elementele pentru a studia in ce conditii se poate separa miscarea centrului de masa de miscarea relativa.

Teoremă 3.13 *Ecuatiile de miscare (3.115) si (3.116) sunt echivalente cu ecuatiile de miscare ale centrului de masa*

$$M\ddot{\vec{X}}_{cm} = \vec{F}^{(1)}_{ext} + \vec{F}^{(2)}_{ext}, \tag{3.122}$$

si ecuatiile miscarii relative

$$\mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) + \frac{1}{M}\left(m^{(2)}\vec{F}^{(1)}_{ext} - m^{(1)}\vec{F}^{(2)}_{ext}\right), \tag{3.123}$$

unde

$$\mu = \frac{m^{(1)}m^{(2)}}{M} \tag{3.124}$$

se numeste masa redusa *a sistemului.*

Demonstrație: Ecuatiile de miscare ale centrului de masa rezulta din teorema impulsului. Ecuatiile miscarii relative se obtin inlocuind relatiile (3.119) si (3.121) in ecuatiile de miscare (3.115) si (3.116). ∎

Aceasta teorema este un pas important deoarece desparte cele doua tipuri de miscari din punct de vedere cinematic. Dar ea nu produce o separare completa a acestor miscari deoarece sistemele de ecuatii raman cuplate datorita faptului ca fortele externe depind, in general, atat de $\vec{X}_{cm}$ cat si de $\vec{r}$ prin intermediul vectorilor de pozitie $\vec{x}^{(1)}$ si respectiv $\vec{x}^{(2)}$. Pentru a separa miscarea centrului de masa de cea relativa sunt necesare conditii suplimentare.

Corolarul 3.3 *Miscarea relativa se separa (decupleaza) de miscarea centrului de masa numai daca fortele externe care actioneaza asupra sistemului de doua particule sunt constante sau nule.*

Demonstraţie: Pentru ca cele doua sisteme de ecuatii de miscare sa se decupleze este necesar ca in membrul drept sa apara numai necunoscutele din membrul stang. Aceasta inseamna ca $\vec{F}_{ext}=\vec{F}^{(1)}_{ext}+\vec{F}^{(2)}_{ext}$ trebuie sa depinda numai de $\vec{X}_{cm}$ iar $\vec{F}'_{ext}=M^{-1}(m^{(2)}\vec{F}^{(1)}_{ext}-m^{(1)}\vec{F}^{(2)}_{ext})$ sa depinda numai de $\vec{r}$ ceea ce, in general, nu este posibil. De aceea trebuie sa ne limitam la cazul in care fortele externe sunt forte constante, independente de pozitiile si vitezele particulelor. Daca fortele externe sunt nule atunci sistemul de particule este izolat. ∎

In cazul sistemelor izolate ecuatiile de miscare se scriu astfel

$$\mu\ddot{\vec{r}}=\vec{F}(\vec{r},\dot{\vec{r}})\,,\qquad \ddot{\vec{X}}_{cm}=\vec{0} \tag{3.125}$$

ceea ce inseamna ca problema miscarii relative este echivalenta cu o problema de miscare in camp extern in timp ce centrul de masa al sistemului se afla intr-o miscare rectilinie si uniforma sau in repaus relativ fata de un sistem de referinta inertial.

Exemplu: **Problema celor doua corpuri** studiaza miscarea unui sistem izolat de doua particule, avand masele $m^{(1)}$ si $m^{(2)}$, aflate in interactiune datorita fortei de atractie universala derivate din energia potentiala

$$V(r)=-\frac{Gm^{(1)}m^{(2)}}{r}\,,\quad r=|\vec{r}|\,. \tag{3.126}$$

Dinamica miscarii relative descrisa de ecuatia $\mu\ddot{\vec{r}}=-\nabla V(r)$ este *echivalenta* cu cea a problemei Kepler in care luam $m=\mu$ si $m_s=M$. Solutia acestei probleme am discutat-o in Sec.3.1.6 unde am aratat ca traiectoriile sunt elipse. Acum intelegem ca ambele particule se misca pe traiectorii care sunt conice aflate in acelasi plan care trece prin O_{cm} si este perpendicular pe directia momentului cinetic total conservat, $\vec{L}$. In reperul $\{O_{cm};\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$ din acest plan ecuatiile celor doua conice sunt date de ecuatiile parametrice

$$\vec{r}_1(\varphi)=\frac{m^{(2)}}{M}\,\frac{p}{1+e\cos(\varphi-\varphi_0)}\vec{u}_r\,, \tag{3.127}$$

$$\vec{r}_2(\varphi)=-\frac{m^{(1)}}{M}\,\frac{p}{1+e\cos(\varphi-\varphi_0)}\vec{u}_r\,, \tag{3.128}$$

care rezulta din ecuatia traiectoriei in sistemul de coordonate polare $O_{cm}r\varphi$ al miscarii relative, preluata din problema Kepler cu substitutia mentionata. Reamintim ca $\vec{u}_r=\vec{r}/r=\cos\varphi\vec{u}_1+\sin\varphi\vec{u}_2$.

In concluzie, fiecare dintre cele doua particule se misca pe cate o conica iar cele doua conice sunt confocale si au axele paralele. Focarul comun este chiar in centrul de masa al sistemului, O_{cm}. □

3.2.5 Dinamica solidului rigid discret

O categorie importanta de probleme din mecanica sunt legate de diversele miscari ale corpurilor solide, libere sau supuse la legaturi si actionate de forte concentrate care pot actiona in diverse puncte ale corpurilor. In limita in care aceste forte sunt destul de slabe pentru a nu deforma corpurile intr-un mod semnificativ, putem spune ca acestea sunt nedeformabile sau rigide. De aici s-a dezvoltat conceptul de corp rigid ideal.

Definiţia 3.20 *Un corp solid care nu poate fi deformat de forte exterioare indiferent de intensitatea acestora se numeste corp solid rigid.*

In general, solidul rigid este considerat ca un mediu continuu cu anumita forma si densitate (distributie) de masa. Dar aici, pentru inceput, ne vom margini sa discutam doar mecanica corpurilor rigide discrete care este similara cu cea a celor continue dar avand avantajul de a evita integralele de volum ce ar putea interveni in definirea unor marimi globale.

Definiţia 3.21 *Un sistem de particule formeaza un corp solid rigid discret daca particulele sunt legate prin bare rigide de mase neglijabile astfel incat intreaga configuratie sa fie rigida.*

In general, un solid rigid are trei grade de libertate de translatie si trei grade de libertate de rotatie. Aceasta inseamna ca dinamica sa este complet descrisa de doua ecuatii vectoriale (cu cate trei proiectii fiecare) pe care le putem alege ca fiind chiar ecuatiile date de teoremele impulsului si momentului cinetic total.

Ecuatiile de miscare

Asadar, nu ne ramane decat sa adaptam ecuatiile celor doua teoreme generale la cazul rigidului discret aflat sub actiunea unor forte externe. Fortele interne nu trebiuesc considerate in mod explicit deoarece ele sunt compensate de reactiunile din legaturile perfect rigide dintre particule. Considerand ca miscarea este observata dintr-un sistem de referinta fix $S(O;\vec{e}_i;t)$, este util sa folosim un sistem al centrului de masa $S_{cm}(O_{cm};\vec{e}\,'_i;t)$ care are originea in centrul de masa al rigidului si se misca *solidar* cu acesta. Avantajul folosirii acestui sistem de referinta consta in faptul ca toate particulele care alcatuiesc rigidul sunt in *repaus* fata de el. In notatiile din Sec.3.2.1, aceasta revine la a spune ca toate coordonatele carteziene ale unei particule (a) fata de S_{cm} sunt constante, adica $r_i'^{(a)}$=const., si, implicit, vitezele si acceleratiile relative fata de S_{cm} sunt nule,

$$\vec{v}^{(a)} = \vec{0}\,, \quad \vec{a}^{(a)} = \vec{0}\,, \quad a = 1, 2, ..., N\,. \tag{3.129}$$

In consecinta, miscarea unei particule in raport cu sistemul S se datoreste exclusiv transportului produs de deplasarea centrului de masa si de rotatia S_{cm}. Se obtin astfel ecuatiile de miscare

$$\dot{\vec{P}}_{cm} = \vec{F}\,, \tag{3.130}$$

$$\dot{\vec{L}}_{cm} = \vec{M}_{(cm)}\,. \tag{3.131}$$

in care am simplificat scrierea notand cu $\vec{F} \equiv \vec{F}_{ext}$ rezultanta fortelor externe si cu $\vec{M}_{(cm)} \equiv \vec{M}_{ext(cm)}$ momentul total al fortelor externe in raport cu O_{cm}. Reamintim ca impulsul total este dat de relatia (3.79) si precizam ca momentul cinetic total in raport cu O_{cm}, definit de (3.82), se reduce la momentul cinetic propriu,

$$\vec{L}_{cm} = \vec{L}_{pr} = \sum_a m^{(a)}\vec{r}^{(a)} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^{(a)})\,, \tag{3.132}$$

deoarece restrictiile (3.129) impun ca momentul cinetic relativ (3.85) sa se anuleze. In aceste conditii energia cinetica totala (3.88) calculata pentru miscarea rigidului in raport cu sistemul de referinta S,

$$T = T_{cm} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{\vec{X}}_{cm})^2 + \frac{1}{2}\sum_a m^{(a)}(\vec{\omega}\times\vec{r}^{(a)})^2\,, \tag{3.133}$$

se compune doar din doi termeni dintre care T_{cm} este energia cinetica darorata miscarii globale a rigidului ca o particula de masa M si viteza $\dot{\vec{X}}_{cm}$, in timp ce T_{rot} reprezinta energia cinetica a miscarii de rotatie care se reduce la cea data de (3.89).

Detalierea ecuatiilor de miscare este interesanta, punand in evidenta modul cum sunt parametrizate cele sase grade de libertate ale solidului rigid. Prima ecuatie vectoriala (3.130) descrie exclusiv miscarea centrului de masa care este complet *decuplata* de miscarea de rotatie fiind cea prevazuta de principiul dinamic newtonian pentru o particula de masa M aflata sub actiunea fortei rezultante $\vec{F}$, adica

$$M\ddot{\vec{X}}_{cm} = \vec{F}\,. \tag{3.134}$$

A doua ecuatie (3.131) ne da miscarea de rotatie in jurul unei axe de rotatie instantanee (variabila in timp) care trece prin O_{cm}. Deoarece S_{cm} se misca solidar cu rigidul, in calculul derivatei in raport cu timpul a momentului cinetic va trebui sa tinem seama de (3.129) si sa luam doar viteza datorata rotatiei, $\dot{\vec{r}}^{(a)} = \vec{\omega}\times\vec{r}^{(a)}$. Atunci ecuatia (3.131) se dezvolta astfel

$$\sum_a m^{(a)}\vec{r}^{(a)}\times(\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}^{(a)}) + \sum_a m^{(a)}(\vec{r}^{(a)}\times\vec{\omega})(\vec{\omega}\cdot\vec{r}^{(a)}) = \vec{M}_{(cm)}\,. \tag{3.135}$$

Se obtine astfel o expresie complicata in care este implicat vectorul de rotatie a carui forma este determinata de modul cum a fost parametrizata rotatia (3.73) a bazei sistemului de referinta S_{cm} fata de S. Din acest motiv aceasta ecuatie cere un studiu special prin care trebuie sa separam marimile care depind exclusiv de forma rigidului de cele pur cinematice.

Momente de inertie

Problema enuntata se simplifica daca lucram intr-un sistem de referinta al centrului de masa, S_{cm}, solidar cu rigidul. Aici avem avantajul ca, toate coordonatele pariculelor, $r_i'^{(a)}$, sunt fixe in raport cu sistemul de coordonate $O_{cm}x_1'x_2'x_3'$ din S_{cm}. De aceea vom scrie ecuatia (3.135) pe componente in raport cu acest sistem (notand toate componentele vectorilor cu prim). Dupa cateva calcule simple, se obtin ecuatiile de miscare care determina rotatia,

$$I'_{ij}\dot{\omega}'_j + \mathcal{K}'_{ijk}\omega'_j\omega'_k = M'_{(cm)\,i}\,, \tag{3.136}$$

numite *ecuatiile Euler*. Aici am folosit notatiile

$$I'_{ij} = \sum_a m^{(a)}\left[(\vec{r}^{(a)})^2\delta_{ij} - r_i'^{(a)}r_j'^{(a)}\right]\,, \tag{3.137}$$

$$\mathcal{K}'_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{ijl}I'_{lk} + \varepsilon_{ikl}I'_{lj}\right)\,, \tag{3.138}$$

separand astfel doi tensori avand *toate* componentele din sistemul de referinta S_{cm} constante.

Definiţia 3.22 *Tensorul I simetric de rang 2 ale carui componente in sistemul S_{cm} sunt definite de relatia (3.137) se numeste tensorul momentului de inertie al rigidului in raport cu centrul sau de masa, O_{cm}.*

Celalalt tensor, $\mathcal{K}$, dat de relatia (3.138), este un tensor de rangul trei simetric in ultimii doi indici ale carui componente se pot exprima in functie de cele ale momentului de inertie. De aceea el nu poarta un nume special, fiind considerat ca o marime derivata.

Cu ajutorul tensorului I se pot exprima atat componentele momentului cinetic total fata de centrul de masa cat si energia cinetica de rotatie. Sa vedem cum arata aceste expresii in sistemul S_{cm} si in sistemul S unde I are componente I_{ij} tot de forma (3.137) dar in care componentele $r_i'^{(a)}$ se inlocuiesc cu cele din sistemul S, $r_i^{(a)}$, care variaza in timp. Din acest motiv, componentele I_{ij} depind, in general, de timp ceea ce se poate evidentia simplu si cu ajutorul regulii de transformare

$$I_{ij}(t) = R_{ki}(t)R_{lj}(t)I'_{kl}\,, \tag{3.139}$$

unde $R(t)$ este matricea rotatiei instantanee a sistemului S_{cm} fata de S cu ajutorul careia se defineste vectorul de rotatie. Din ecuatia (3.132) deducem ca $\vec{L}_{cm}$ are in sistemele de referinta S si respectiv S_{cm} urmatoarele componente

$$L_{cm\,j}(t) = I_{jk}(t)\omega_k(t)\,, \quad L'_{cm\,j}(t) = I'_{jk}\omega'_k(t)\,. \tag{3.140}$$

Energia cinetica de rotatie definita de relatia (3.133) este un invariant deoarece este un scalar avand aceeasi valoare in ambele sisteme,

$$T_{rot} = \frac{1}{2}I_{ij}\omega_i\omega_j = \frac{1}{2}I'_{ij}\omega'_i\omega'_j\,. \tag{3.141}$$

De aici se vede avantajul de a lucra in sistemul S_{cm} unde componentele I'_{ij} nu depind de timp.

Definitia tensorului moment de inertie fata de centrul de masa al rigidului se poate generaliza in raport cu orice punct din spatiu, indiferent daca acesta este mobil sau fix fata de rigid. Sa alegem acest punct tocmai originea O a sistemului de referinta S fata de care vectorii de pozitie (la un moment dat) ai particulelor din care este constituit rigidul, $\vec{x}^{(a)}$, satisfac ecuatia (3.74).

Definiţia 3.23 *Tensorul moment de inertie in raport cu punctul O este tensorul I_O ale carui componente in sistemul de referinta S sunt*

$$I_{O\,ij} = \sum_a m^{(a)}\left[(\vec{x}^{(a)})^2\delta_{ij} - x_i^{(a)}x_j^{(a)}\right]\,. \tag{3.142}$$

Rolul aparte jucat de centrul de masa al rigidului se evidentiaza si in studiul momentelor de inertie printr-o teorema atribuita de unii autori lui Steiner iar de altii lui Huyghens.

Teoremă 3.14 *Componentele in sistemul de referinta S ale tensorului moment de inertie in raport cu punctul O se exprima astfel*

$$I_{O\,ij} = I_{ij} + M(\vec{X}^2_{cm}\delta_{ij} - X_{cm\,i}X_{cm\,j})\,, \tag{3.143}$$

in functie de componentele I_{ij} ale momentului de inertie fata de centrul de masa calculate in acelasi sistem de referinta.

Demonstraţie: Acest rezultat se obtine simplu, inlocuind in (3.143) coordonatele din S ale particulelor rigidului, $x_i^{(a)} = X_{cm\,i} + r_i^{(a)}$, si tinand seama de conditia (3.76). ■
O alta marime importanta in aplicatii este momentul de inertie in raport cu o directie data. Sa consideram tensorul I_O si o axa oarecare care trece prin O si are versorul $\vec{u}$.

Definiţia 3.24 *Se numeste moment de inertie fata de axa de versor $\vec{u}$ marimea scalara*

$$I(\vec{u}) = I_{O\,jk}\, u_j u_k\,. \tag{3.144}$$

Desigur, aceasta definitie este valabila pentru orice punct si orice dreapta care trece prin acel punct.

Directii principale de inertie

Revenind la problema miscarii de rotatie, sa observam ca ecuatiile de miscare se pot simplifica si mai mult alegand in mod corespunzator sistemul de referinta S_{cm}. Reamintim ca aceste sisteme de referinta nu sunt determinate in mod univoc, ele fiind definite pana la o rotatiie fixa (independenta de timp) prin care solidul rigid se poate repozitiona fata de S_{cm}. Desigur, daca schimbam pozitia rigidului fata de acest sistem, vom schimba si componentele I'_{ij} ale tensorului de inertie I. Pe de alta parte, tensorul de inertie este un tensor simetric care, conform celor discutate in Sec.1.3.4, admite trei versori proprii ortogonali intre ei, $\vec{v}^{(i)}$, corespunzatori la trei valori proprii reale, notate acum cu $I_{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, care satisfac ecuatia de valori proprii

$$I'_{ij} v'^{(k)}_j = I_{(k)} v'^{(k)}_i\,. \tag{3.145}$$

Valorile proprii $I_{(i)} = \lambda_{(i)}$ sunt cele trei solutii ale ecuatiei seculare (1.39) pentru I care in S_{cm} se scrie $\det(I'_{ij} - \lambda\delta_{ij}) = 0$. In general, pentru un solid rigid de forma oarecare se obtin trei valori proprii diferite, $I_{(1)} \neq I_{(2)} \neq I_{(3)}$. Daca $I_{(1)} = I_{(2)} \neq I_{(3)}$ vom spune ca rigidul are simetrie cilindrica iar daca $I_{(1)} = I_{(2)} = I_{(3)} = I_0$ atunci simetria va fi sferica si componentele momentului de inertie in orice sistem S_{cm} vor fi $I'_{ij} = I_0\delta_{ij}$. Astfel, cele trei valori proprii $I_{(k)}$ sunt trei *invarianti* care caracterizeaza complet comportarea rigidului in miscarea de rotatie.

Definiţia 3.25 *Versorii proprii $\vec{v}^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$ ai tensorului moment de inertie, determina trei directii ortogonale intre ele numite directii principale de inertie ale centrului de masa.*

Deoarece cele trei directii principale de inertie sunt ortogonale intre ele si fixe in raport cu un S_{cm} dat, exista o rotatie independenta de timp care permite rotirea axelor sistemului S_{cm} in lungul directiilor principale, obtinand astfel un sistem de coordonate special, deosebit de util in aplicatii.

Definiţia 3.26 *Sistemul de coordonate S_{cm} ale carui axe de coordonate coincid cu directiile principale de inertie se numeste sistem propriu* [6] *si se noteaza cu S_{pr}.*

In sistemul de referinta propriu matricea tensorului moment de inertie ia forma diagonala $I = \mathrm{diag}(I_{(1)}, I_{(2)}, I_{(3)})$ care simplifica la maximum scrierea ecuatiilor Euler.

[6] In mod obisnuit acest sistem se numeste *sistemul axelor principale de inertie ale centrului de masa* dar din motive de simplitate vom prefera denumirea de *sistem propriu* care este in acord cu dezvoltarile ulterioare din relativitatea einsteiniana.

Teoremă 3.15 *In sistemul de referinta propriu, S_{pr}, ecuatiile Euler capata forma*

$$I_{(1)}\dot{\omega}'_1 - (I_{(2)} - I_{(3)})\omega'_2\omega'_3 = M'_{(cm)\,1}\,, \tag{3.146}$$

$$I_{(2)}\dot{\omega}'_2 - (I_{(3)} - I_{(1)})\omega'_1\omega'_3 = M'_{(cm)\,2}\,, \tag{3.147}$$

$$I_{(3)}\dot{\omega}'_3 - (I_{(1)} - I_{(2)})\omega'_1\omega'_2 = M'_{(cm)\,3}\,, \tag{3.148}$$

unde ω'_i sunt componentele vectorului rotatie in acest sistem.

Demonstraţie: Deoarece in S_{pr} momentul de inertie are numai componente diagonale, calculand componentele tensorului (3.138) si inlocuind in ecuatiile (3.136) se ajunge la rezultatul enuntat. ■